

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN 2019

VORLESUNG ÜBER

MATHEMATISCHE KONTINUUMSMECHANIK

PROF. DR. H.W. ALT

Version: 20190223 **Letzte wesentliche Änderung: 31.05.2018**

Copyright © 2011-2019 Prof. Dr. H.W. Alt

Die Verteilung dieses Dokuments in elektronischer oder gedruckter Form ist gestattet, solange die Autoren- und Copyright-Angabe, sowie dieser Text unverändert bleiben und exakt in allen Versionen dieses Dokuments wiedergegeben werden, die Verteilung ferner kostenlos erfolgt – abgesehen von einer Gebühr für den Datenträger, den Kopiervorgang usw. – und dafür Sorge getragen wird, dass jeder, an den dieses Dokument verteilt wird, die hier spezifizierten Rechte seinerseits wahrnehmen kann.

Diese Version ist nicht endgültig, sie kann nichtrichtige Aussagen enthalten, die noch korrigiert werden. Dieses Skript wird parallel zu der Vorlesung erstellt. Diese aktuelle Version ist für Studenten der Vorlesung gedacht.

To my parents

Inhaltsverzeichnis

I	Masse und Impuls	8
1	Erhaltungsgleichungen	11
2	Distributionen	24
3	Impulserhaltung	46
4	Oberflächen	73
5	Koordinatentransformation	85
6	Referenzkoordinaten	99
7	Aufgaben	109
II	Objektivität	116
1	Klassische Beobachtertransformationen	119
2	Lorentz Transformationen	125
3	Objektivität von Differentialgleichungen	137
4	Konstitutive Beziehungen	157
5	Objektivität in Referenzkoordinaten	175
6	Drehmoment	179
7	Aufgaben	190
III	Energie und Entropie	195
1	Entropiegleichung	201
2	Energiegleichung	212
3	Mischungen	221
4	Lagrange Multiplikatoren	227
5	Dissipationsungleichung	231
6	Distributionelle Entropie	236
7	Aufgaben	244
IV	Modellgleichungen	247
1	Ebbe und Flut	247
2	Flüssigkeitsgleichung	260
3	Navier-Stokes Gleichung	272
4	Euler Gleichungen	285
5	Nichtlineare Elastizität	306

6	Wachstum fester Körper	322
7	Schallausbreitung	327
8	vr-Wirbel	346
9	Fraktionierung	365
10	Mischungen in Bewegung	387
11	Reaktions-Diffusionsgleichungen	394
12	Temperaturabhängige Diffusion	416
13	Chemische Reaktionen	427
14	Biologische Reaktionen	443
15	Prandtl'sche Grenzschicht	450
16	Selbstgravitation	457
17	Flüssigkristalle	481
18	Übungen	482
V Höhere Momente		483
1	Cattaneo's 8-Momente Gleichung	484
2	Boltzmann Gleichung	491
3	Die Chapman-Enskog Hierarchie	499
4	Grad's 13-Momente Gleichung	509
VI Lichtgeschwindigkeit		514
1	Beobachtertransformationen	516
2	Maxwell Gleichungen	518
3	Bewegte Ladungen	535
4	Magnetohydrodynamik (MHD)	549
5	Ohm'sches Gesetz	558
6	Aufgaben	559

Einführung

*Die Naturwissenschaft beschreibt und erklärt
die Natur nicht einfach, sie ist Teil des Wechselspiels
zwischen der Natur und uns selbst.*

Werner Heisenberg (1901-1976)

Die mathematische Modellierung physikalischer Phänomene führt zu Erhaltungsgleichungen, die von allen Beobachtern gleich formuliert werden müssen. Daher stellen wir in der Vorlesung folgende Prinzipien auf:

- die Formulierung mit Erhaltungssätzen,
- die Objektivität bei Beobachtertransformationen,
- das Entropieprinzip bzw. die freie Energieungleichung,

wobei das Entropieprinzip ausdrückt, dass wir es mit irreversiblen Prozessen zu tun haben. Diese Prinzipien haben Auswirkungen auf die Behandlung physikalischer Effekte, sie haben Konsequenzen was die mathematische Existenztheorie betrifft, als auch für die Entwicklung von numerischen Algorithmen. Es soll in dieser Vorlesung dargestellt werden, wie diese Prinzipien in Standardsituationen aussehen und welche Konsequenzen zu ziehen sind. Die abstrakten Formulierungen als partielle Differentialgleichung werden so in Zusammenhang mit alltäglichen Gleichungen gebracht. Die Idee zu dieser Vorlesung ist aus meiner Veröffentlichung [\[19\]](#) entstanden und ich hoffe sehr, dass dieses Skript dazu beiträgt zu verstehen, wie die physikalische Theorie auf ein einfaches System von Axiomen aufgebaut ist.

Es sei bemerkt, dass die allgemeinen Prinzipien in einem strengen Sinne zu verstehen sind, obwohl das im Text nicht immer so zum Ausdruck kommt. Das gilt in Standardsituationen als auch bei speziellen Theorien, sie sind allgemeine physikalische Prinzipien. Dies bestimmt im wesentlichen den Aufbau des Skriptes. Im ersten Abschnitt werden Erhaltungssätze vorgestellt, und zwar geben wir diese in der üblichen Differentialschreibweise an. Eine Formulierung mit Hilfe von Testvolumina wird als Einführung in das Kapitel **I** angegeben. Da viele physikalische Vorgänge nichtklassische Lösungen

beinhalten, wird danach, also möglichst früh, der Begriff der Distribution eingeführt. Nichtklassische Lösungen sind etwa bei der Selbstgravitation und bei der Temperaturmessung der Standardfall. Es werden in dieser Vorlesung jedoch nur solche Beweise über Distributionslösungen gebracht, bei denen keine Größen auf der Fläche auftreten, obwohl dies häufig der Fall wäre. Das heißt, der Gauß'sche Satz im Raum ist hinreichend für die Beweise, bei denen die Flächen von der Zeit nicht abhängen. Das Kapitel **I** enthält auch die Darstellung der Erhaltungssätze in Lagrange Koordinaten. Dazu wird eine allgemeine Transformationsformel bewiesen, die auch später bei der Beobachterunabhängigkeit sowohl im klassischen Newton'schen Fall, als auch bei den Lorentztransformationen benutzt wird. Damit sind in diesem Kapitel **I** alle mathematischen Hilfsmittel zusammengestellt.

Das Kapitel **II** enthält alle Aussagen über die Objektivität, wobei bei diesem Begriff gemeint ist, dass physikalische Aussagen unabhängig vom Beobachter getroffen werden müssen. Dies ist notwendig, da sonst eine Kommunikation zwischen beteiligten Wissenschaftlern unnötig verkompliziert wird, bzw. eine physikalische Beschreibung in Büchern bzw. elektronisch unmöglich wird. Große Teile dieses Skripts basieren auf klassischen Newton Transformationen, die in Abschnitt **II.1** behandelt werden. Um die Abhängigkeit der Theorie von den Transformationen zu verdeutlichen, geben wir in diesem Kapitel auch Lorentz Transformationen an, die allerdings erst im Kapitel **VI** benötigt werden.

Das nächste Kapitel **III** handelt von der Energie und Entropie. Es ist eines der herausragenden Ergebnisse des 19. und 20. Jahrhunderts, die Irreversibilität von Prozessen mit einem Anstieg der Entropiedichte und des Entropieflusses in Verbindung zu setzen. Dabei wird hier der Standpunkt vertreten, dass diese Größen an sich von vornherein unbekannt sind. Erst durch die Anwendung des Prinzips wird deutlich, welche Bedingungen das Entropieprinzip an die konstitutiven Funktionen stellt. Die Aufgabe besteht also darin, das Entropieprinzip mit zu berücksichtigen und so zu einem tragfähigen Modell zu kommen.

Das ist nun Aufgabe des Kapitels **IV**, in dem aus den verschiedensten Bereichen Modellgleichungen dargestellt werden, und zwar unter Benutzung des Entropieprinzips bzw. der Energieungleichung. Es wird klar, dass alle in den Beispielgleichungen gemachten Ungleichungen auf dieses Prinzip zurückzuführen sind.

Hinweise für die Lehrenden

Die Anwendung der Distributionstheorie ist wesentlich für dieses Skript, und wird gleich im zweiten Paragraphen eingeführt, wobei es zur Darstellung der Punktmechanik gebraucht wird. In den weiteren Kapiteln werden sie auf eindimensionalen Kurven und zweidimensionalen Flächen im \mathbb{R}^n angewandt. Es wird, bei gleicher Definition, auch zwischen Distributionen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und Distributionen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ unterschieden, in dieser Vorlesung ist jede Dimension vertreten.

Die erste Vorlesung wurde ein Semester im Umfang von 4Std/Woche gehalten (im Wintersemester 2011). Dies umfasste die grundlegenden Kapitel I-III, und insgesamt fünf Abschnitte aus Kapitel IV. Die Wahl der Abschnitte kann nach der besonderen Situation der Universität oder nach den speziellen Wünschen des Lehrenden gewählt werden.

Im Skript wurden oft mehrere Beweise gegeben, obwohl in der Vorlesung jeweils nur ein Beweis dargestellt wurde. Zum Teil sind auch Beweise aufgeschrieben, die in der Vorlesung garnicht gebracht wurden. Dies ist bei der Auswahl des Stoffes zu berücksichtigen.

Der Text ist z.Z. noch im Entwicklungsstadium und wird ständig verbessert und erweitert. Die vorhandenen Paragraphen werden aber mit Sicherheit bleiben.

I Masse und Impuls

Die Gleichungen der Kontinuumsphysik basieren auf Systemen von Erhaltungsgleichungen. In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns auf das einfachste System, und zwar ist dies die Erhaltung von Masse und Impuls. Mathematisch werden wir Erhaltungssätze und Distributionen einführen, die wesentlichen Hilfsmittel für dieses Kapitel.

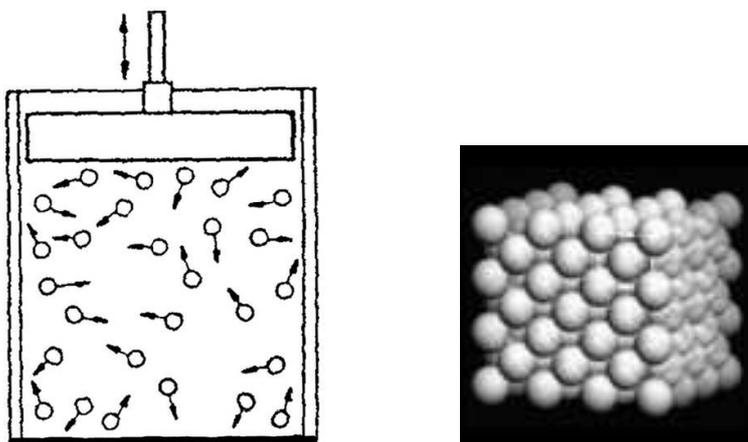


Abb. 1: Gas und fester Körper

Für Ingenieure wird der Begriff der Erhaltungsgleichung mit Hilfe von Testvolumina $V \subset \mathbb{R}^n$ eingeführt, wobei in der Physik $n \leq 3$. Dazu schreibt man die Änderung einer physikalische Größe, deren Dichte u ist, als ¹

$$\frac{d}{dt} \int_V u(t, x) dx = - \int_{\partial V} q(t, x) \bullet \nu_V(x) dH^{n-1} + \int_V \mathbf{r}(t, x) dx .$$

Dabei bedeutet q den Fluss über den Rand des Testvolumens, und \mathbf{r} die Rate mit der im Volumen eine Änderung der Größe u hervorgerufen wird. Das Testvolumen V ist dabei von der Zeit unabhängig, und ν_V bezeichnet die äußere Normale auf dem Rand ∂V von V . Die Tatsache, dass keine anderen Terme auftreten, ist das Charakteristikum von Kontinuumsphysik.

¹Wir verwenden die Bezeichnung H^m für das m -dimensionale Hausdorffmaß in jedem \mathbb{R}^n mit $n \geq m$ und L^n für das n -dimensionale Lebesguemaß im \mathbb{R}^n .

Eine weitere äquivalente Formulierung von Erhaltungssätzen ist die Version als Differentialgleichung für C^1 -Funktionen

$$\partial_t u + \operatorname{div} q = \mathbf{r}. \quad (\text{I0.1})$$

Dies folgt aus der Formulierung für Testvolumina mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, was man an folgender Rechnung sieht:

$$\begin{aligned} \int_V \partial_t u(t, x) \, dx &= \frac{d}{dt} \int_V u(t, x) \, dx \\ &= - \int_{\partial V} q(t, x) \bullet \nu_V(x) \, dH^{n-1}(x) + \int_V \mathbf{r}(t, x) \, dx \\ &= \int_V (-\operatorname{div} q(t, x) + \mathbf{r}(t, x)) \, dx, \end{aligned}$$

also

$$\int_V (\partial_t u(t, x) + \operatorname{div} q(t, x) - \mathbf{r}(t, x)) \, dx = 0.$$

Da das Gaußgebiet V beliebig ist, erhalten wir die Differentialgleichung (I0.1). Übrigens folgt die Formulierung mit Testvolumina auch aus der starken Differentialgleichung durch Umkehrung der Schlüsse.

Es hat seinen besonderen Grund, dass in der Kontinuumsphysik die Formulierung mit Differentialgleichungen gewählt wird, und es berührt überhaupt nicht die Struktur der Materie im Kleinen. So ist in Abb. 1 auf der linken Seite dargestellt, wie sich die Atome irregulär bewegen, so dass man nicht mehr weiß, ob und wie die Atome im Moment zuvor angeordnet waren. Währenddessen ist auf der rechten Seite die Situation in einem Festkörper dargestellt. Hier bewegen sich die Atome nach denselben Gesetzen, aber sie bleiben fast immer in derselben Anordnung. Das liegt daran, dass die auf die Atome wirkenden Kräfte ihr Vorzeichen ändern, bevor sie selbst ihre Ordnung zu verlieren drohen. Also kommen wir zu dem folgenden Schluss: Wir müssen (t, x) als einen "Punkt" interpretieren, der viele Atome mitsamt ihren lokalen Gesetzen beinhaltet, und die makroskopischen Erhaltungsgleichungen sind zu verstehen als eine Methode, diese lokalen Gesetze von Ort zu Ort zu "vermitteln". Nichtsdestotrotz geben diese makroskopischen Gleichungen das Verhalten der Materie in der Natur wieder, wir werden dies bei der Massen- und Impulserhaltung im einzelnen sehen. Die später eingeführte Temperatur ist dann wie eine "Verschlüsselung" der lokalen Bewegung der Atome.

Viele konkrete Funktionen sind jedoch keine klassischen Lösungen der Differentialgleichung, so zum Beispiel das Schwerfeld der Erde an der Erdoberfläche, siehe 2.15. In diesem Falle kann die Formulierung mit Testvolumina sehr aufwändig werden. Deshalb verwenden wir hier Testfunktionen statt Testvolumina. Auf dem Raum der Testfunktionen

$$\mathcal{D}(\mathcal{U}) := \{\zeta \in C^\infty(\mathcal{U}); \zeta \text{ hat kompakten Träger in } \mathcal{U}\},$$

L. Schwartz's theory of distributions had two important effects in mathematical analysis. First of all, it provided a rigorous justification for a number of formal manipulations that had become quite common in the technical literature. The second and more important effect was that it opened up a new area of mathematical research, which in turn provided an impetus in the development of a number of mathematical disciplines, such as ordinary and partial differential equations, operational calculus, transformation theory, and functional analysis. However, the subject has remained pretty much in the realm of advanced mathematics, and only a few aspects of it have found their way into the technical literature.

To be sure, a certain type of distribution (in particular, the delta function and its derivatives) had been used in the physical and engineering sciences for quite some time before the advent of distribution theory. Indeed, the delta function dates back to the nineteenth century. A summary of its history is given by Van der Pol and Bremmer (see Van der Pol and Bremmer [1], pp. 62–66, in the bibliography, Appendix D). On the other hand, distribution theory appears to have first been formulated in 1936 by S. L. Soboleff (see Soboleff [1]) and then developed in a symmetric and thorough way by L. Schwartz (see Schwartz [1]), whose books appeared in 1950 and 1951. A somewhat different version of this theory was proposed by S. Bochner around 1927 (see Bochner [1], chap. VI), who used it to generalize the Fourier transformation for functions $f(t)$ that grow as some power of t as $|t|$ approaches infinity.

Abb. 2: Bedeutung der Distributionen (aus [79])

wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, betrachten wir hier also Linearformen U , Q und R in dem Dualraum $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ (siehe den Abschnitt 2), so dass

$$\partial_t U + \operatorname{div} Q = R \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{U}), \quad (\text{I0.2})$$

wobei $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ der Raum der Distributionen genannt wird. Diese Formulierung anstatt (I0.1), siehe (I2.3), bietet den Vorteil, dass sie allgemeiner und zugleich einfach ist. Dies wird insbesondere dann deutlich, wenn man zu Beschreibungen von Erhaltungssätzen auf Flächen übergeht. Den Unterschied von Testfunktionen im Gegensatz zu Testvolumina sieht man, wenn man, rein formal (und auch durch rigorose Approximation), die charakteristische Funktionen \mathcal{X}_V durch glatte Funktionen ζ ersetzt. Es sind beide Darstellungen in der Literatur üblich, die Darstellung eines Erhaltungssatzes mit Hilfe von Testvolumina findet man in der Regel in Physikbüchern.

1 Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten skalare Erhaltungsgleichungen der Form:

<p><i>Erhaltungsgleichung:</i></p> $\partial_t u + \operatorname{div} q = \mathbf{r}$ <hr style="width: 50%; margin: 10px auto;"/> <p>u physikalische Größe, q zugehöriger Flußvektor, \mathbf{r} Quellterm oder Reaktionsterm.</p>	(I1.1)
---	--------

Also haben wir reellwertige Funktionen u , \mathbf{r} und q_i für $i = 1, \dots, n$. Hierbei ist n die Raumdimension, in der physikalischen Realität ist dies 3, kann aber auch 1 und 2 sein, wenn die Größen von den übrigen raumfüllenden Koordinaten nicht abhängen. Mathematisch kann n beliebig sein. Die Funktionen hängen von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und dem Ort $x \in \mathbb{R}^n$ ab. Wir schreiben $(t, x) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, d.h. \mathcal{U} ist der betrachtete Bereich. Diese Definition der Erhaltungsgleichung ist zunächst natürlich nur definiert, wenn u , q und \mathbf{r} regulär genug sind, genauer wenn u und q differenzierbar sind, und \mathbf{r} stetig ist. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $q: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$q = (q_i)_{i=1, \dots, n} = (q_1, \dots, q_n) = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},^2$$

wir identifizieren also Vektoren mit Spaltenmatrizen.

1.1 Bemerkung. Die Erhaltungsgleichung $\partial_t u + \operatorname{div} q = \mathbf{r}$ in t und x kann auch aufgefasst werden als Divergenzgleichung $\operatorname{div}(u, q) = \mathbf{r}$ in (t, x) , wobei $\operatorname{div} := (\partial_t, \operatorname{div})$.

Es gelten folgende Definitionen.³

1.2 Definition der Ableitung. Für eine Funktion $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ und einen Vektor $e \in \mathbb{R}^N$ ist die **Richtungsableitung** in Richtung e gegeben durch

$$\partial_e g(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(y + he) - g(y)) \in \mathbb{R}^M.$$

Wichtig: Dieselbe Definition und die folgenden Aussagen sind auch anwendbar auf von y abhängiger Richtungsableitung $y \mapsto e(y) \in \mathbb{R}^N$.

Alle weiteren Ableitungen basieren auf dieser Definition.

² Es ist \mathbb{R}^N die Menge der N -Vektoren (mit runden Klammern) und $\mathbb{R}^{N \times M}$ die Menge der $N \times M$ -Matrizen (mit eckigen Klammern). Die lineare Abbildung $I: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 1}$ wird hier nicht geschrieben, d.h. \mathbb{R}^N und $\mathbb{R}^{N \times 1}$ werden "identifiziert".

³ *Hinweis:* Es wird hier nicht die genaue mathematische Voraussetzung genannt, wie z.B. der Unterschied zwischen Differenzierbarkeit und stetiger Differenzierbarkeit.

(1) Ist speziell $\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, also $N = n + 1$ und $y = (t, x)$, so schreiben wir für $e = (0, \tilde{e}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\partial_e g(t, x) &= \partial_{(0, \tilde{e})} g(t, x) \text{ (als Abbildung auf } \mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{)} \\ &= \partial_{\tilde{e}} g(t, x) \text{ (als Abbildung } g(t, \bullet): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{)} .\end{aligned}$$

(2) Auf \mathbb{R}^n definieren wir für $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{e}_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ mit der 1 an der } i\text{-ten Stelle.} \quad (\text{II.2})$$

Dann heißt $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ die **Standardorthonormalbasis** des \mathbb{R}^n .

(3) Es ergeben sich die folgenden Formeln für $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\partial_i g(t, x) := \partial_{x_i} g(t, x) := \begin{cases} \partial_{(0, \mathbf{e}_i)} g(t, x) \text{ als Abbildung auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \partial_{\mathbf{e}_i} g(t, x) \text{ als Abbildung } g(t, \bullet): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(t, x + h\mathbf{e}_i) - g(t, x)), \end{cases}$$

$$\partial_t g(t, x) := \partial_{(1, 0)} g(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(t + h, x) - g(t, x)).$$

(4) Für eine Abbildung $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist der **Gradient** von g gegeben durch

$$\nabla g = (\partial_{x_i} g)_{i=1, \dots, n} = \begin{bmatrix} \partial_1 g \\ \vdots \\ \partial_n g \end{bmatrix},$$

also ist $(t, x) \mapsto \nabla g(t, x) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. **Wichtig:** Die Bezeichnung ‘‘Gradient’’, wie auch die folgende ‘‘Ableitung’’, bezieht sich nur auf die Raumvariablen.

(5) Die **Ableitung (im Raume)** eines Vektorfeldes $q = (q_1, \dots, q_n)$ ist

$$Dq = (\partial_{x_i} q_k)_{k, i=1, \dots, n} = \begin{bmatrix} \partial_1 q_1 & \cdots & \partial_n q_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 q_n & \cdots & \partial_n q_n \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Oft wird in der Literatur auch der Gradient ∇q des Vektorfeldes q benutzt, wir definieren ihn als ⁴

$$\nabla q = (\partial_{x_i} q_k)_{i, k=1, \dots, n} = (Dq)^T = \begin{bmatrix} \partial_1 q_1 & \cdots & \partial_1 q_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n q_1 & \cdots & \partial_n q_n \end{bmatrix}.$$

Für $n = 1$ ist dies die obige Definition des Gradienten einer Funktion.

⁴Für eine Matrix $M = (M_{ij})_{i, j}$ wird die **transponierte** Matrix mit $M^T = (M_{ji})_{i, j}$, der **symmetrische** Anteil mit $M^S = \frac{1}{2}(M + M^T)$, und der **antisymmetrische** Anteil mit $M^A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ bezeichnet.

(6) Die **Divergenz** von q ist gegeben durch die Spur von Dq

$$\operatorname{div} q := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} q_i = \operatorname{trace} Dq.$$

(7) Für ein Vektorfeld q und eine Richtung $e: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt ⁵

$$\partial_e q = (e \bullet \nabla) q = Dq e \quad \text{für alle } e \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Es ist $\operatorname{div} q = \nabla \bullet q$ wobei $\nabla \bullet := \sum_j e_j \bullet \partial_j$ in der Welt mit dem "Nabla Operator".

Man beachte diese Definitionen, sie werden in diesem Skript systematisch in dieser Form benutzt. Gewisse Identitäten für Ableitungen finden sich in Aufgabe 7.2.

1.3 Darstellung der Divergenz. Für ein differenzierbares Vektorfeld q und für Orthonormalbasen $\{e_1(t, x), \dots, e_n(t, x)\}$ des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^n gilt

$$\operatorname{div} q = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} q_i = \sum_{i=1}^n e_i \bullet \partial_{e_i} q. \quad (\text{II.3})$$

Hierbei können die Basisvektoren beliebig von (t, x) abhängen.

Es sei bemerkt, dass im Allgemeinen

$$\operatorname{div} q \neq \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} (e_i \bullet q) = \underbrace{\sum_{i=1}^n e_i \bullet \partial_{e_i} q}_{= \operatorname{div} q} + \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_{e_i} e_i}_{\text{i.A. } \neq 0} \right) \bullet q,$$

falls e_i variabel sind. Die Tatsache, dass die Divergenz die Eigenschaft (II.3) hat, beinhaltet die Isotropie des leeren Raumes.

Beweis. Die Orthonormalität von $\{e_1, \dots, e_n\}$ bedeutet, dass

$$e_i \bullet e_j = \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n.$$

Mit ⁶

$$e_i = (e_{ik})_{k=1, \dots, n} \quad \text{also } e_{ik} = e_i \bullet e_k$$

heißt dies

$$\sum_{k=1}^n e_{ik} e_{jk} = \delta_{ij}$$

⁵Das **Euklidische Skalarprodukt** ist gegeben durch $x \bullet y := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und analog definieren wir das **Skalarprodukt für Matrizen** $R, S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ durch $R \bullet S := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij} S_{ij}$. Die reellen $n \times m$ -Matrizen werden mit $\mathbb{R}^{n \times m}$ bezeichnet.

⁶zu e_k siehe (II.2)

oder in Matrixschreibweise

$$E E^T = \text{Id} \text{ wenn } E = (e_{ik})_{i,k=1,\dots,n} . \quad (\text{II.4})$$

Das besagt, dass E^T die Rechtsinverse von E ist, was aber gleich der Linksinverse ist, eine Aussage für endliche Matrizen, denn

$$(E^T E - \text{Id}) E^T = E^T (E E^T - \text{Id}) = 0 ,$$

und da E^T injektiv ist (folgt aus (II.4)), somit surjektiv ist, schließen wir $E^T E - \text{Id} = 0$, also

$$E^T E = \text{Id}$$

und damit

$$\delta_{kl} = (E^T E)_{kl} = \sum_{i=1}^n e_{ik} e_{il} .$$

Dann ist wegen 1.2(7)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i \bullet \partial_{e_i} q &= \sum_{i=1}^n e_i \bullet (\text{D}q) e_i \\ &= \sum_{k,l=1}^n \underbrace{e_k \bullet (\text{D}q) e_l}_{= \partial_l q_k} \sum_{i=1}^n \underbrace{(e_i \bullet e_k)}_{= e_{ik}} \underbrace{(e_i \bullet e_l)}_{= e_{il}} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \partial_l q_k \sum_{i=1}^n e_{ik} e_{il} = \sum_{k,l=1}^n \partial_l q_k \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n \partial_k q_k = \text{div } q . \end{aligned}$$

□

Wir geben nun einige Beispiele zur Berechnung von $\text{div } q$.

1.4 Beispiel. Sei eine Matrix $(t, r) \mapsto A(t, r) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben und

$$q(t, x) := A(t, |x|)x .$$

(1) Wenn A nur von der Zeit t abhängt, so gilt

$$\text{div } q = \text{trace } A .$$

(2) Für stetig differenzierbares A gilt für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\text{div } q(t, x) = \text{trace } A(t, |x|) + \frac{1}{|x|} (x \bullet \partial_r A(t, |x|)) x .$$

(3) Ist $n = 2$ und a stetig differenzierbar mit

$$A(t, r) = a(t, r) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

dann ist

$$q(t, x) = a(t, |x|) i x \quad \text{mit} \quad \text{div } q = 0 .$$

Beweis. Siehe die Übung 7.6.

□

1.5 Polarvektoren in der Ebene. Es sei $n = 2$ und für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei⁷

$$\mathbf{e}_r = \widehat{\mathbf{e}}_r(x) := \frac{x}{|x|}, \quad \mathbf{e}_\theta = \widehat{\mathbf{e}}_\theta(x) := \frac{ix}{|x|} = \frac{(-x_2, x_1)}{|x|}. \quad (\text{II.5})$$

Dann ist $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$ ein Orthonormalsystem von \mathbb{R}^2 und es gilt

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{e}_r} \widehat{\mathbf{e}}_r(x) &= 0, & \partial_{\mathbf{e}_\theta} \widehat{\mathbf{e}}_r(x) &= \frac{1}{|x|} \widehat{\mathbf{e}}_\theta(x), \\ \partial_{\mathbf{e}_r} \widehat{\mathbf{e}}_\theta(x) &= 0, & \partial_{\mathbf{e}_\theta} \widehat{\mathbf{e}}_\theta(x) &= -\frac{1}{|x|} \widehat{\mathbf{e}}_r(x). \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

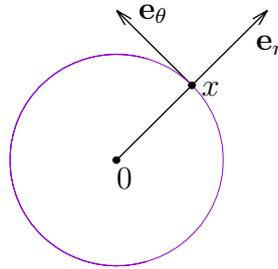


Abb. 3: The orthonormal system $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$ for $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Beweis. Auf \mathbb{R}^2 sind **Polarkoordinaten** gegeben durch

$$x = \tau(r, \theta) = re^{i\theta}$$

und dann gilt

$$\widehat{\mathbf{e}}_r \circ \tau = e^{i\theta}, \quad \widehat{\mathbf{e}}_\theta \circ \tau = ie^{i\theta}.$$

Es folgt für jede Funktion g

$$(\partial_{\mathbf{e}_r} g) \circ \tau = \partial_r(g \circ \tau), \quad (\partial_{\mathbf{e}_\theta} g) \circ \tau = \frac{1}{r} \partial_\theta(g \circ \tau),$$

denn

$$\begin{aligned} ((\partial_{\mathbf{e}_r} g) \circ \tau)(r, \theta) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(re^{i\theta} + he^{i\theta}) - g(re^{i\theta})) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g((r+h)e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})) = \partial_r(g \circ \tau), \end{aligned}$$

⁷Hier ist ix die komplexe Multiplikation von zwei Zahlen $i \in \mathbb{C}$ und $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen \mathbb{C} werden mit \mathbb{R}^2 identifiziert, also $i = (0, 1)$. Den Ingenieurstuden-
ten sei [9, 6.1 General Principles] empfohlen, und Mathematikstudenten seien auf die
Anfängervorlesung verwiesen.

$$\begin{aligned}
((\partial_{\mathbf{e}_\theta} g) \circ \tau)(r, \theta) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(re^{i\theta} + hie^{i\theta}) - g(re^{i\theta})) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(r \underbrace{(1 + \frac{h}{r}i)}_{= e^{i\frac{h}{r}} + \mathcal{O}(h^2)} e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})) \\
&= \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{1}{r\tilde{h}} (g(re^{i(\theta+\tilde{h})}) + \mathcal{O}(\tilde{h}^2)) - g(re^{i\theta}) = \frac{1}{r} \partial_\theta (g \circ \tau).
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
(\partial_{\mathbf{e}_r} \widehat{\mathbf{e}}_r) \circ \tau &= \partial_r (\widehat{\mathbf{e}}_r \circ \tau) = \partial_r (e^{i\theta}) = 0, \\
(\partial_{\mathbf{e}_\theta} \widehat{\mathbf{e}}_r) \circ \tau &= \frac{1}{r} \partial_\theta (\widehat{\mathbf{e}}_r \circ \tau) = \frac{1}{r} \partial_\theta (e^{i\theta}) = \frac{1}{r} i e^{i\theta} = \frac{1}{r} \widehat{\mathbf{e}}_\theta \circ \tau, \\
(\partial_{\mathbf{e}_r} \widehat{\mathbf{e}}_\theta) \circ \tau &= \partial_r (\widehat{\mathbf{e}}_\theta \circ \tau) = \partial_r (ie^{i\theta}) = 0, \\
(\partial_{\mathbf{e}_\theta} \widehat{\mathbf{e}}_\theta) \circ \tau &= \frac{1}{r} \partial_\theta (\widehat{\mathbf{e}}_\theta \circ \tau) = \frac{1}{r} \partial_\theta (ie^{i\theta}) = -\frac{1}{r} e^{i\theta} = -\frac{1}{r} \widehat{\mathbf{e}}_r \circ \tau.
\end{aligned}$$

□

Wir benutzen dies um die Divergenz eines Vektorfeldes $q: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu berechnen.

1.6 Divergenz in der Ebene. Jedes Vektorfeld $q: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ eine eindeutige Darstellung

$$q = s_1 \mathbf{e}_r + s_2 \mathbf{e}_\theta, \quad \text{wobei } s_1 = q \bullet \mathbf{e}_r, \quad s_2 = q \bullet \mathbf{e}_\theta,$$

mit $s_1, s_2: \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei das Orthonormalsystem wie in 1.5 gewählt sei. Es gilt in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$

$$\operatorname{div} q(t, x) = \partial_{\mathbf{e}_r} s_1(t, x) + \frac{s_1(t, x)}{|x|} + \partial_{\mathbf{e}_\theta} s_2(t, x).$$

Ist das Vektorfeld q vom Ursprung nach außen gerichtet, so ist $s_1 \geq 0$ und $s_2 = 0$, wenn sich das Vektorfeld q um den Ursprung "herum dreht", so ist $s_1 = 0$ und s_2 beliebig.

Konvention: Wir schreiben \mathbf{e}_r für $\widehat{\mathbf{e}}_r$ usw. um die Formeln übersichtlich zu lassen.

Beweis 1. Version. Es ist nach 1.3

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} q &= \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} q + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} q \\
&= \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} (s_1 \mathbf{e}_r + s_2 \mathbf{e}_\theta) + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} (s_1 \mathbf{e}_r + s_2 \mathbf{e}_\theta) \\
&= \partial_{\mathbf{e}_r} s_1 + \partial_{\mathbf{e}_\theta} s_2 \\
&\quad + s_1 (\mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_r) + s_2 (\mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta).
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Regeln (II.6) folgt mir $r = |x|$, dass dies

$$= \partial_{\mathbf{e}_r} s_1 + \partial_{\mathbf{e}_\theta} s_2 + \frac{1}{r} s_1,$$

also folgt die Behauptung. □

Beweis 2. Version. Es ist nach 1.3

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} q &= \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} q + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} q \\
&= \partial_{\mathbf{e}_r} (\mathbf{e}_r \bullet q) + \partial_{\mathbf{e}_\theta} (\mathbf{e}_\theta \bullet q) - (\partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r + \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta) \bullet q \\
&= \partial_{\mathbf{e}_r} s_1 + \partial_{\mathbf{e}_\theta} s_2 - (\partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r + \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta) \bullet q.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Regeln (II.6) folgt, dass dies

$$\begin{aligned} &= \partial_{e_r} s_1 + \partial_{e_\theta} s_2 + \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \bullet \mathbf{q} \\ &= \partial_{e_r} s_1 + \partial_{e_\theta} s_2 + \frac{1}{r} s_1, \end{aligned}$$

also folgt die Behauptung. \square

Das wichtigste Beispiel für einen Erhaltungssatz ist die Massenerhaltung. Wir setzen dann $u = \varrho$, wobei ϱ die ‘‘Massendichte’’ ist, das heißt, die Masse pro Volumen

$$\varrho = \frac{\text{Masse [kg]}}{\text{Volumen [m}^3\text{]}}$$

Weiter setzen wir $q = \varrho v + \mathbf{J}$, wobei v die ‘‘Geschwindigkeit’’ der Masse ist und \mathbf{J} die ‘‘Massendiffusion’’ (wir werden diese Gleichung in II.3.4 noch herleiten.). Wir betrachten also die⁸

Allgemeine Massenerhaltung:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x (\varrho v + \mathbf{J}) = \mathbf{r}$$

$\varrho \geq 0$ die Volumendichte der Masse,

$q = \varrho v + \mathbf{J}$ der Massenfluss,

$v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$ die Geschwindigkeit,

$\mathbf{J} = (\mathbf{J}_i)_{i=1,\dots,n}$ der Diffusionsterm der Masse,

\mathbf{r} der Quellterm oder Reaktionsterm der Masse,

(II.7)

was man auch schreiben kann als

$$\partial_t \varrho + \underbrace{\operatorname{div}(\varrho v)}_{\text{Transport}} = \underbrace{\mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J}}_{\text{Änderung der Masse}} .$$

Der \mathbf{J} -Term hat also eine zweifache Bedeutung. Er kann einerseits als $-\operatorname{div} \mathbf{J}$ auf der rechten Seite geschrieben werden, er ist dann ein ‘‘externer’’ Term, oder er wird als \mathbf{J} in den Flussterm geschrieben, er ist dann ein ‘‘interner’’ Term (es sei auf den Abschnitt IV.13 verwiesen, wo \mathbf{J} in Systemen vorkommt).

Oft sind mehrere Teilmassen an der Gesamtmasse beteiligt, siehe zum Beispiel Abb. 4, das heißt, es gilt

$$\varrho = \sum_{k=1}^{k_0} \varrho_k, \quad (\text{II.8})$$

wobei ϱ_k die k_0 Einzelmassen sind sowie ϱ die Gesamtmasse ist. Als Beispiel betrachte die Luft, siehe z.B. Abb. 4. Es gilt

⁸ Wir schreiben ‘‘ div_x ’’ statt ‘‘ div ’’, um die Variablen (t, x) zu betonen.

Components in dry air		Volume ratio = Molar ratio compared to dry air		Molar mass	Molar mass in air		Atmospheric boiling point		
Name	Formula	[mol/mol _{air}]	[vol%]	[g/mol], [kg/kmol]	[g/mol _{air}], [kg/kmol _{air}]	[wt%]	[K]	[°C]	[°F]
Nitrogen	N ₂	0.78084	78.084	28.013	21.873983	75.52	77.4	-195.8	-320.4
Oxygen	O ₂	0.20946	20.946	31.999	6.702469	23.14	90.2	-183.0	-297.3
Argon	Ar	0.00934	0.934	39.948	0.373114	1.29	87.3	-185.8	-302.5
Carbon dioxide	CO ₂	0.00033	0.033	44.010	0.014677	0.051	194.7	-78.5	-109.2
Neon	Ne	0.00001818	0.001818	20.180	0.000367	0.0013	27.2	-246.0	-410.7
Helium	He	0.00000524	0.000524	4.003	0.000021	0.00007	4.2	-269.0	-452.1
Methane	CH ₄	0.00000179	0.000179	16.042	0.000029	0.00010	111.7	-161.5	-258.7
Krypton	Kr	0.0000010	0.0001	83.798	0.000084	0.00029	119.8	-153.4	-244.0
Hydrogen	H ₂	0.0000005	0.00005	2.016	0.000001	0.000003	20.3	-252.9	-423.1
Xenon	Xe	0.00000009	0.000009	131.293	0.000012	0.00004	165.1	-108.1	-162.5
Average molar mass of air					28.9647				

Abb. 4: Atmosphere of Earth: “Components in Dry Air” from [127]. See also [Wikipedia: Atmosphere of Earth] [129] “Water vapor H₂O strongly varies locally 0.001% – 5%”. Here the mass of components in air are relevant.

1.7 Satz. Es seien Teilmassen wie in (I.8) gegeben und mögen

$$\partial_t \varrho_k + \operatorname{div}_x(\varrho_k v + \mathbf{J}_k) = \mathbf{r}_k \quad \text{für } k = 1, \dots, k_0 \quad (\text{I.9})$$

erfüllen. Wir definieren die **Konzentration** der Komponente k durch

$$c_k := \frac{\varrho_k}{\varrho}, \quad \text{also } \varrho_k = c_k \varrho \quad \text{und } \varrho > 0.$$

Wenn dann

$$\mathbf{J} := \sum_{k=1}^{k_0} \mathbf{J}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} := \sum_{k=1}^{k_0} \mathbf{r}_k = \mathbf{0},$$

dann ist das System (I.9) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) &= 0, \\ \varrho(\partial_t c_k + v \bullet \nabla c_k) + \operatorname{div}_x \mathbf{J}_k &= \mathbf{r}_k \quad \text{für } k = 1, \dots, k_0. \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Beachte: Da $c_1 + c_2 + \dots + c_{k_0} = 1$ ist, sind von den letzten k_0 Gleichungen in (I.10) nur $k_0 - 1$ relevant, oder die k_0 Gleichungen sind linear abhängig.

Beweis. Es mögen die k_0 Gleichungen der Komponenten erfüllt sein. Indem wir die Summe berechnen, erhalten wir

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x \left(\varrho v + \underbrace{\sum_k \mathbf{J}_k}_{=0} \right) = \underbrace{\sum_k \mathbf{r}_k}_{=0},$$

also $\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) = 0$. Die einzelnen Gleichungen schreiben sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k - \operatorname{div}_x \mathbf{J}_k &= \partial_t \varrho_k + \operatorname{div}_x(\varrho_k v) = \partial_t(c_k \varrho) + \operatorname{div}_x(c_k \varrho v) \\ &= c_k(\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v)) + \varrho(\partial_t c_k + \sum_{i=1}^n v_i \partial_{x_i} c_k) \\ &= \varrho(\partial_t c_k + v \bullet \nabla c_k). \end{aligned}$$

□

Die Massenerhaltung für die Gesamtmasse ist gewöhnlich ohne die \mathbf{J} und \mathbf{r} Terme erfüllt, wir nehmen also $\mathbf{r} = 0$ und $\mathbf{J} = 0$ an. Die Differentialgleichung lautet dann

<p>Massenerhaltung:</p> $\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) = 0$ <hr style="width: 50%; margin: 10px auto;"/> <p>$\varrho > 0$ die Volumendichte der Masse, $q = \varrho v$ der Massenfluss, $v = (v_i)_{i=1, \dots, n}$ die Geschwindigkeit.</p>	(II.11)
--	---------

Wir betrachten nun diese Differentialgleichung.

1.8 Relativität der Geschwindigkeit. Es erfülle (ϱ, v) die Massenerhaltung (II.11). Wir verschieben die Massendichte mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\varrho^*(t, x) := \varrho(t, x + tv_0).$$

Gibt es ein v^* , so dass (II.11) für (ϱ^*, v^*) erfüllt ist? Ja, für

$$v^*(t, x) = v(t, x + tv_0) - v_0.$$

Hinweis: Das ist der Doppler-Effekt für konstantes v_0 . Wir werden dies im Abschnitt II.3 noch systematisch studieren.

Also erfüllen (ϱ^*, v^*) und (ϱ, v) dieselbe Gleichung (II.11), und der Beweis zeigt, dass dies aus einem Koordinatenwechsel folgt.

Beweis. Wir fragen, was die Eigenschaft

$$\partial_t \varrho^* + \operatorname{div}_x(\varrho^* v^*) = 0 \tag{II.12}$$

für ein v^* bedeutet. Wir betrachten die Transformation

$$Y \left(\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t \\ x + tv_0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist für jedes Vektorfeld q

$$\operatorname{div}_x(q \circ Y) = (\operatorname{div}_x q) \circ Y, \quad (\text{II.13})$$

also berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho^* &= \partial_t(\varrho \circ Y) = (\partial_t \varrho) \circ Y + v_0 \bullet (\nabla \varrho) \circ Y \\ &= -(\operatorname{div}_x(\varrho v)) \circ Y + v_0 \bullet (\nabla \varrho) \circ Y \quad (\text{since } \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) = 0) \\ &= -(\operatorname{div}_x(\varrho v)) \circ Y + (\operatorname{div}_x(\varrho v_0)) \circ Y \quad (\text{since } v_0 \text{ is constant}) \\ &= -(\operatorname{div}_x(\varrho(v - v_0))) \circ Y = -\operatorname{div}_x((\varrho(v - v_0)) \circ Y) \quad (\text{nach (II.13)}) \\ &= -\operatorname{div}_x(\varrho^*((v - v_0) \circ Y)). \end{aligned}$$

Therefore the differential equation (II.12) is satisfied, if

$$v^* = (v - v_0) \circ Y = v \circ Y - v_0,$$

which was the guess in the assertion. \square

Im folgenden Beispiel betrachten wir die Massenerhaltung und ein leichtes Teilchen in dieser Flüssigkeit, oder wir denken uns ein Fähnchen an einem Massepunkt befestigt.

1.9 Partikel in einer Flüssigkeit. Sei ϱ die Massendichte der Flüssigkeit, die nach (II.11) erfüllt

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0. \quad (\text{II.14})$$

Wir bewegen uns mit der Flüssigkeit mit, d.h. wir nehmen zum Zeitpunkt t den Ort $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ ein, wobei wir uns von der Geschwindigkeit v treiben lassen, d.h. ξ ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\dot{\xi}(t) = v(t, \xi(t)).$$

Hier ist $\dot{\xi}$ die Zeitableitung von $t \mapsto \xi(t)$. Wenn dann $\bar{\varrho}(t) := \varrho(t, \xi(t))$ die Massendichte an der Stelle ist, an der wir uns zur Zeit t aufhalten, so gilt

$$\dot{\bar{\varrho}}(t) + a(t)\bar{\varrho}(t) = 0, \quad a(t) := (\operatorname{div} v)(t, \xi(t)).$$

Die Massendichte an unserem Ort ändert sich also mit der Rate $-a(t)$. Man schreibt deswegen allgemein (II.14) auch in der Form⁹

$$\overset{\circ}{\varrho} + \varrho \operatorname{div} v = 0, \quad \overset{\circ}{\varrho} := \partial_t \varrho + v \bullet \nabla \varrho. \quad (\text{II.15})$$

⁹ Es ist $\overset{\circ}{h} := \partial_t h + v \bullet \nabla h$ für jede Funktion h definiert. In der Literatur wird das üblicherweise geschrieben als $\overset{\circ}{h} = \dot{h}$ und als "totale Zeitableitung" oder "substantielle Zeitableitung" bezeichnet. Es sei aber betont, dass diese Ableitung von v abhängt.

Beweis. Allgemein gilt

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = (\partial_t \varrho + v \bullet \nabla \varrho) + \varrho \operatorname{div} v,$$

woraus (II.15) folgt. Wir berechnen dann

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}(t) &= \frac{d}{dt}(\varrho(t, \xi(t))) = (\partial_t \varrho)(t, \xi(t)) + \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \varrho)(t, \xi(t)) \dot{\xi}_i(t) \\ &= (\partial_t \varrho + v \bullet (\nabla \varrho))(t, \xi(t)) \quad (\text{da } \dot{\xi}_i(t) = v_i(t, \xi(t))) \\ &= -(\varrho \operatorname{div} v)(t, \xi(t)) = -(\operatorname{div} v)(t, \xi(t)) \varrho(t), \end{aligned}$$

which is the statement. \square

Betrachtet man Polarkoordinaten (r, θ) für $n = 2$, so kann dies auch aufgefasst werden als der Fall, dass im Raum, das heißt für $n = 3$ die Funktionen nicht von x_3 abhängen. Wir betrachten nun den Fall $n = 3$ und Zylinderkoordinaten (r, θ, z) , d.h. $x_3 = z$, und von allen Koordinaten abhängige Funktionen.

1.10 Zylinderkoordinaten. Im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Transformation

$$(t, x) = (t, x_1, x_2, x_3) = \tau(t, r, \theta, z)$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} t &= \tau_0(t, r, \theta, z) := t, \\ x_1 &= \tau_1(t, r, \theta, z) := r \cos \theta, \\ x_2 &= \tau_2(t, r, \theta, z) := r \sin \theta, \\ x_3 &= \tau_3(t, r, \theta, z) := z. \end{aligned}$$

Wir wollen den Erhaltungssatz (II.1)

$$\partial_t u + \operatorname{div} q = \mathbf{r}$$

in Zylinderkoordinaten schreiben. Dazu zerlegen wir den Flussvektor q bezüglich Zylinderkoordinaten als

$$q = q_r \mathbf{e}_r + q_\theta \mathbf{e}_\theta + q_z \mathbf{e}_z, \quad (\text{II.16})$$

wobei $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z \in \mathbb{R}^3$ (vergleiche (II.6)), wo \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_θ in der Ebene betrachtet wurden) mit $\mathbf{e}_r = \widehat{\mathbf{e}}_r(x)$, $\mathbf{e}_\theta = \widehat{\mathbf{e}}_\theta(x)$, $\mathbf{e}_z = \widehat{\mathbf{e}}_z(x)$ gegeben sind durch¹⁰

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{e}}_r(x) &:= (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}(x_1, x_2, 0), & \tau'_{r_r} &= (0, \cos \theta, \sin \theta, 0) = (0, \widehat{\mathbf{e}}_r \circ \tau), \\ \widehat{\mathbf{e}}_\theta(x) &:= (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}(-x_2, x_1, 0), & \frac{1}{r} \tau'_{r_\theta} &= (0, -\sin \theta, \cos \theta, 0) = (0, \widehat{\mathbf{e}}_\theta \circ \tau), \\ \widehat{\mathbf{e}}_z(x) &:= (0, 0, 1), & \tau'_{r_z} &= (0, 0, 0, 1) = (0, \widehat{\mathbf{e}}_z \circ \tau), \\ \{\widehat{\mathbf{e}}_r(x), \widehat{\mathbf{e}}_\theta(x), \widehat{\mathbf{e}}_z(x)\} &\text{ für } x \neq 0 \text{ ist eine Orthonormalbasis des } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

¹⁰ **Notation für die partielle Ableitung:** Wir bezeichnen partielle Ableitungen auch durch "nachgestellte Ableitung", so z.B. in der Aussage $\tau'_{r_r}(t, r, \theta, z) := \partial_r \tau(t, r, \theta, z)$. Wir werden diese neue Bezeichnung verwenden bei Koeffizientenfunktionen, um dadurch die Beschreibung von partiellen Differentialgleichungen übersichtlicher zu gestalten.

Definieren wir weiter $\underline{u} = u \circ \tau$, $\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \tau$, $\underline{q} = q \circ \tau$ (und damit $\underline{q}_r = q_r \circ \tau$, $\underline{q}_\theta = q_\theta \circ \tau$, $\underline{q}_z = q_z \circ \tau$) so folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{u} + \partial_z \underline{q}_z + \underbrace{\partial_r \underline{q}_r + \frac{1}{r} \underline{q}_r}_{= \frac{1}{r} \partial_r (r \underline{q}_r)} + \frac{1}{r} \partial_\theta \underline{q}_\theta &= \underline{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit r , so erhalten wir

$$\partial_t (r \cdot \underline{u}) + \partial_z (r \cdot \underline{q}_z) + \partial_r (r \cdot \underline{q}_r) + \partial_\theta \underline{q}_\theta = r \cdot \underline{\mathbf{r}}, \quad (\text{II.18})$$

die Divergenzstruktur bleibt also in den neuen Koordinaten erhalten (vergleiche das Resultat 5.4).

Konvention: Wir schreiben \mathbf{e}_r für $\hat{\mathbf{e}}_r$ usw. um die Formeln übersichtlich zu lassen.

Beweis (1. Version). We compute using lemma 1.3

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q &= \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} q + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} q + \mathbf{e}_z \bullet \partial_{\mathbf{e}_z} q \\ &= \partial_{\mathbf{e}_r} (\mathbf{e}_r \bullet q) + \partial_{\mathbf{e}_\theta} (\mathbf{e}_\theta \bullet q) + \partial_{\mathbf{e}_z} (\mathbf{e}_z \bullet q) \\ &\quad - (\partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r + \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta + \partial_{\mathbf{e}_z} \mathbf{e}_z) \bullet q \\ &= \partial_{\mathbf{e}_r} q_r + \partial_{\mathbf{e}_\theta} q_\theta + \partial_{\mathbf{e}_z} q_z + \frac{1}{r} q_r \end{aligned}$$

where $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, since

$$\partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r = 0, \quad \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_r, \quad \partial_{\mathbf{e}_z} \mathbf{e}_z = 0 \quad (\text{see (II.6)}).$$

Then, since for any function g

$$\begin{aligned} (\partial_{\mathbf{e}_r} g) \circ \tau &= \partial_r (g \circ \tau), \\ (\partial_{\mathbf{e}_\theta} g) \circ \tau &= \frac{1}{r} \partial_\theta (g \circ \tau), \\ (\partial_{\mathbf{e}_z} g) \circ \tau &= \partial_z (g \circ \tau), \end{aligned}$$

we obtain

$$(\operatorname{div} q) \circ \tau = \partial_r (q_r \circ \tau) + \frac{1}{r} \partial_\theta (q_\theta \circ \tau) + \partial_z (q_z \circ \tau) + \frac{1}{r} q_r \circ \tau,$$

the assertion. □

Beweis (2. Version). We compute, since \mathbf{e}_z is constant, using lemma 1.3

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} q &= \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} q + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} q + \mathbf{e}_z \bullet \partial_{\mathbf{e}_z} q \\
&= \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} (q_r \mathbf{e}_r + q_\theta \mathbf{e}_\theta + q_z \mathbf{e}_z) \\
&\quad + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} (q_r \mathbf{e}_r + q_\theta \mathbf{e}_\theta + q_z \mathbf{e}_z) \\
&\quad + \mathbf{e}_z \bullet \partial_{\mathbf{e}_z} (q_r \mathbf{e}_r + q_\theta \mathbf{e}_\theta + q_z \mathbf{e}_z) \\
&= \partial_{\mathbf{e}_r} q_r + \partial_{\mathbf{e}_\theta} q_\theta + \partial_{\mathbf{e}_z} q_z \\
&\quad + q_r (\mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \bullet \partial_{\mathbf{e}_z} \mathbf{e}_r) \\
&\quad + q_\theta (\mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z \bullet \partial_{\mathbf{e}_z} \mathbf{e}_\theta) \\
&= \partial_{\mathbf{e}_r} q_r + \partial_{\mathbf{e}_\theta} q_\theta + \partial_{\mathbf{e}_z} q_z + \frac{1}{r} q_r,
\end{aligned}$$

since

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r &= 0, \quad \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \partial_{\mathbf{e}_z} \mathbf{e}_r = 0, \\
\partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_\theta &= 0, \quad \partial_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_r, \quad \partial_{\mathbf{e}_z} \mathbf{e}_\theta = 0.
\end{aligned} \quad (\text{see (II.6)}).$$

Then, since for any function g

$$\begin{aligned}
(\partial_{\mathbf{e}_r} g) \circ \tau &= \partial_r (g \circ \tau), \\
(\partial_{\mathbf{e}_\theta} g) \circ \tau &= \frac{1}{r} \partial_\theta (g \circ \tau), \\
(\partial_{\mathbf{e}_z} g) \circ \tau &= \partial_z (g \circ \tau),
\end{aligned}$$

we obtain

$$(\operatorname{div} q) \circ \tau = \partial_r (q_r \circ \tau) + \frac{1}{r} \partial_\theta (q_\theta \circ \tau) + \partial_z (q_z \circ \tau) + \frac{1}{r} q_r \circ \tau,$$

the assertion. □

2 Distributionen

Wir multiplizieren die skalare Erhaltungsgleichung (I1.1) für C^1 -Funktionen u, q_i, \mathbf{r}

$$\partial_t u + \operatorname{div} q = \mathbf{r} \quad \text{in } \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (\text{I2.1})$$

mit einer **Testfunktion** $\zeta \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ und erhalten nach partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{U}} \zeta (-\partial_t u - \operatorname{div} q + \mathbf{r}) \, d\mathbf{L}^{n+1} \\ &= \int_{\mathcal{U}} (\partial_t \zeta \cdot u + \nabla \zeta \bullet q + \zeta \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{L}^{n+1} \end{aligned}$$

wobei im letzten Integral nur noch gebraucht wird, dass die Funktionen u, q_i und r in $L_{\text{loc}}^1(\mathcal{U})$ sind. Der Erhaltungssatz enthält also die folgenden drei Bestandteile

$$\begin{aligned} \zeta &\mapsto \int_{\mathcal{U}} \partial_t \zeta \cdot u \, d\mathbf{L}^{n+1}, \\ \zeta &\mapsto \int_{\mathcal{U}} \nabla \zeta \bullet q \, d\mathbf{L}^{n+1}, \\ \zeta &\mapsto \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot \mathbf{r} \, d\mathbf{L}^{n+1}, \end{aligned} \quad (\text{I2.2})$$

die linear in ζ sind. Diese lineare Funktionen sind nun, wie wir sehen werden, spezielle Distributionen, wobei wir $N = n + 1$ setzen.

Definition der Distributionen

We start with the essential property of distributions.

2.1 Distributionen. Ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}(\mathcal{U}) := C_0^\infty(\mathcal{U})$$

den **Raum der Testfunktionen**. Wir betrachten Abbildungen

$$T: \mathcal{D}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}$$

und nennen sie **Distributionen** und schreiben $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$, wenn sie die Abschätzung 2.4(1) erfüllen. Wir schreiben für den Wert $T(\zeta)$

$$\langle \zeta, T \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} := T(\zeta),$$

was durch die Integrale in (I2.2) motiviert ist. Oft schreiben wir einfach auch $\langle \zeta, T \rangle = \langle \zeta, T \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})}$ wenn klar ist, welches Gebiet \mathcal{U} wir meinen.

Es gibt zwei Operationen, die wichtig sind, das ist die Ableitung von Distributionen und die Multiplikation mit einer Funktion.

A physical variable is customarily thought of as a function, i.e., a rule which assigns a number to each numerical value of some independent variable. For example, if the independent variable is time t and the physical quantity is a force f , then one would say that the force is known if its value $f(t)$ is specified at every instant of time t . However, it is impossible to observe the instantaneous values of $f(t)$. Any measuring instrument would merely record the effect that f produces on it over some nonvanishing interval of time.

As we shall see, another way of describing a physical variable is to specify it as a functional, i.e., as a rule which assigns a number to each function in a set of so-called "testing functions." We shall be exclusively concerned with functionals of a special type, namely, distributions. It turns out that the distribution concept provides a better mechanism for analyzing certain physical phenomena than does the function concept because, for one reason, various entities, such as the delta function, which arise naturally in several mathematical sciences can be correctly described as distributions but not as functions. Moreover, any physical quantity that can be adequately represented as a function can also be characterized as a distribution and, indeed, there is an advantage in using the latter representation. One cannot assign instantaneous values to a distribution, and consequently the problem of physically interpreting such values does not arise.

Abb. 5: Funktionen als Funktionale (aus [79])

2.2 Operationen auf Distributionen.

(1) **Ableitung einer Distribution.** Für $j \in \{1, \dots, N\}$ ist eine lineare Abbildung $\partial_j T: \mathcal{D}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle \zeta, \partial_j T \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} := \langle -\partial_j \zeta, T \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} .$$

Merke: Entsprechend sind höhere Ableitungen definiert, siehe 2.6(1).

Definition in Raumzeit: Ist $N = n + 1$ mit $n \geq 1$, so ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und j läuft von 0 bis n . Es ist $\partial_0 = \partial_t$ sowie $\partial_i = \partial_{x_i}$ für $i = 1, \dots, n$.

(2) **Multiplikation mit einer Funktion.** Für $a \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathcal{U})$ ist eine lineare Abbildung $aT: \mathcal{D}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle \zeta, aT \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} := \langle a\zeta, T \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} .$$

Beides, $\partial_j T$ und aT sind wieder Distributionen, denn sie erfüllen die Abschätzung 2.4(1).

Dies sind die gesamten Definitionen für Distributionen so, wie wir sie brauchen. Für unsere drei Terme (I2.2) aus der Differentialgleichung ist also noch zu definieren

2.3 Funktionen als Distributionen. Wir betrachten nun spezielle Abbildungen $T = [g]$, wobei $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{U})$. Diese Abbildungen sind für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ definiert durch

$$\langle \zeta, [g] \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot g \, dL^N.$$

Bemerkung: Die messbare Funktion g lässt sich aus $[g]$ rekonstruieren (siehe dazu Aufgabe 7.9). *Hinweis:* Siehe auch die Definition 2.5.

Die Aussage besagt, dass g nur fast überall aus seiner Distribution wieder hervorgeholt werden kann (siehe dazu auch Abb. 5). Auch die Ableitung $\partial_i[g]$, falls sie von einer Funktion dargestellt wird, ist nur fast überall definiert. Es ist zum Beispiel, wenn g Lipschitz-stetig ist, $\partial_i[g] = [g_i]$ mit einer L^∞ -Funktion g_i (siehe die Definition in 2.6(2)).

Referenzen: Zur Geschichte der Distributionen siehe [80]. Mathematische Einführungen werden für $N = 1$ in [79], für beliebiges N in [72, in Abschnitt 3], [74, Kapitel I-II], [76, Kapitel 1-9], [78, Kapitel 1-2] gegeben. Ich habe auch ein eigenes Skript [71] dazu angefertigt. Siehe auch die sehr gute Darstellung in [Wikipedia: Distribution (Mathematik)].

Wir geben noch eine vollständige Definition der Distributionen an.

2.4 Distributionsabschätzung. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und $\mathcal{D}(\mathcal{U}) = C_0^\infty(\mathcal{U})$ wie oben. Eine *Distribution*, das ist ein Element in $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$, erfüllt nach Definition eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften:

- (1) Ein Element $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ ist eine lineare Abbildung $T: \mathcal{D}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$, die erfüllt ¹¹

$$\forall U \subset\subset \mathcal{U} : \exists k_U \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und } C_U \geq 0 : \\ \forall \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{U}) \text{ mit } \text{supp } \zeta \subset U : \left| \langle \zeta, T \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} \right| \leq C_U \|\zeta\|_{C^{k_U}(\bar{U})}.$$

- (2) $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ ist die Menge der *linearen stetigen Abbildungen*, also der Dualraum von $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, wenn $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ mit folgender Topologie \mathcal{T} versehen wird:

$$\mathcal{T} := \{V \subset C_c^\infty(\mathcal{U}) ; \forall \zeta \in V : \exists \varepsilon : \zeta + V_\varepsilon \subset V\}.$$

Dabei ist $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und

$$V_\varepsilon := \text{conv} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\zeta \in C_c^\infty(\mathcal{U}) ; \text{supp } (\zeta) \subset U_j \text{ und } p(\zeta) < \varepsilon_j\} \right), \\ (U_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ eine offene Überdeckung von } \mathcal{U} \text{ mit } \bar{U}_j \subset \mathcal{U} \text{ kompakt,} \\ p(\zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|\zeta\|_{C^k(\bar{U})}}{1 + \|\zeta\|_{C^k(\bar{U})}} \text{ für } \text{supp } (\zeta) \subset U, \bar{U} \text{ kompakt in } \mathcal{U}.$$

Resultat: Damit wird $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ ein lokal konvexer topologischer Vektorraum, siehe [72, 3.19] und [71, section 6]. Dort wird auch die Vollständigkeit des Dualraums $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ behandelt.

Beweis der Äquivalenz: Dies wird z.B. in [72, 3.21 Der Dualraum von $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$] gezeigt.

¹¹ $U \subset\subset \mathcal{U}$ heißt $U \subset \mathcal{U}$ und \bar{U} kompakt in \mathcal{U} , in Worten: U relativ kompakt in \mathcal{U} .

Es ist effektiv mit der Eigenschaft 2.4(1) zu arbeiten, so wie das in [71] dargestellt wird. Setzen wir in der Abschätzung 2.4(1) $k_U = 0$ für alle $U \subset\subset \mathcal{U}$, so erhalten wir

2.5 Radon-Maße als Distribution. Ein Radon-Maß μ auf \mathcal{U} ist eine lineare Abbildung $\mu: C_c^0(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$, wir schreiben $\zeta \mapsto \langle \zeta, \mu \rangle_{C_c^0(\mathcal{U})}$, so dass

$$\forall U \subset\subset \mathcal{U} : \exists C_U \geq 0 : \\ \forall \zeta \in C^0(\mathcal{U}) \text{ mit } \text{supp } \zeta \subset U : \left| \langle \zeta, \mu \rangle_{C_c^0(\mathcal{U})} \right| \leq C_U \|\zeta\|_{C^0(\bar{U})}.$$

Falls $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathcal{U})$ dann ist $\mu := [g]$ ein Radon-Maß, siehe dazu die Definition 2.3. *Hinweis:* For a measure theoretical definition of Radon measures on the Borel sets of an open set $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ we identify

$$\mu(E) = \int_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_E d\mu = \langle \mathcal{X}_E, \mu \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} \text{ für Borelmengen } E \subset\subset \mathcal{U}.$$

Referenz: Diese Definition findet sich in Tartar [77, Definition 4.3]. Für eine maßtheoretische Definition siehe [75, Definition 2.2] und [Wikipedia: Radon measure].

Die mathematische Definition der Distributionen zeigt im Wesentlichen, dass Funktionen (als Distributionen) dicht im gesamten Raum der Distributionen liegen (siehe [71, End of section 2]). Diese Definition, d.h. 2.4(1), wird in dieser Vorlesung nicht gebraucht (außer in der Aussage 2.10). Wir geben hier noch einige wichtige Eigenschaften der Distributionen an.

2.6 Einige Eigenschaften von Distributionen.

(1) **Höhere Ableitungen.** Für alle Multiindizes $s = (s_1, \dots, s_N)$ ist die Distributionsableitung $\partial^s T := \partial_1^{s_1} \dots \partial_N^{s_N} T$ definiert und es gilt

$$\langle \zeta, \partial^s T \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} = (-1)^{|s|} \langle \partial^s \zeta, T \rangle_{\mathcal{D}(\mathcal{U})} \text{ für } \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{U}).$$

Es gilt

$$\partial^s T = \partial^{r_1} (\partial^{r_2} T) \text{ für alle } r_1, r_2 \text{ mit } r_1 + r_2 = s.$$

(2) **Ableitung von Funktionen.** Für $g \in C^1(\mathcal{U})$ gilt $\partial_j [g] = [\partial_j g]$ wegen der Regel der partiellen Integration. Man definiert daher in Analogie dazu

$$W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathcal{U}) := \{g \in L_{\text{loc}}^p(\mathcal{U}); \forall i : \exists g_i \in L_{\text{loc}}^p(\mathcal{U}) : \partial_i [g] = [g_i]\}.$$

Hierbei ist $1 \leq p \leq \infty$. (Entsprechend ist $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathcal{U})$ definiert.)

(3) **Vektorwertige Distributionen.** Analog ist die Definition von $[g]$ für vektorwertiges $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^M$, es ist dann ¹² für $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^M) = C_0^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{R}^M)$

$$\langle \zeta, [g] \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}} \zeta \bullet g dL^N.$$

Wir schreiben dann $[g] \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}; \mathbb{R}^M)$ (siehe auch [71, 5.4]).

(4) **Ordnung einer Distribution.** Eine Distribution T ist von der Ordnung k , falls die Eigenschaft 2.4(1) immer mit $k_U = k$ erfüllt ist. Es gilt: Ist T eine Distribution der Ordnung k , so ist $\partial^s T$ eine Distribution der Ordnung $k + |s|$.

(5) **Fortsetzung von Distributionen.** Ist T eine Distribution der Ordnung k , so kann T eindeutig fortgesetzt werden zu einer linearen Abbildung auf $C_0^k(\mathcal{U})$. Es ist also $\langle \zeta, T \rangle := T(\zeta)$ für $\zeta \in C_0^k(\mathcal{U})$ als Fortsetzung definiert. Es folgt, dass aT als Distribution definiert ist für $a \in C^k(\mathcal{U})$, es ist (siehe auch [71, 4.1]).

$$\langle \zeta, aT \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} := \langle a\zeta, T \rangle_{C_0^k(\mathcal{U})} \text{ für } \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{U}).$$

¹² Es bezeichnet “•” das Skalarprodukt im Euklid’sischen Raum.

What does it mean for our conservation law?

Zurück zum Erhaltungssatz

Wir werden nun die Erhaltungssätze im Rahmen der Distributionen schreiben, wobei wir $N = n + 1$ setzen, d.h. es ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und die Distributionen, die wir betrachten, leben in der Raumzeit:

2.7 Distributionen in Zeit und Raum. Sei $N = n + 1$ mit $n \geq 1$ und $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dann erfüllt für $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{U})$ die Distribution $[g] \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$

$$\langle \zeta, [g] \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} := \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot g \, dL^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathcal{U}_t} \zeta(t, x) g(t, x) \, dx \, dt,$$

wobei $\mathcal{U}_t := \{x \in \mathbb{R}^n; (t, x) \in \mathcal{U}\}$.

Mit dieser Definition erhalten wir für obiges Integral

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{U}} \zeta(-\partial_t u - \text{div } q + \mathbf{r}) \, dL^{n+1} \\ &= \int_{\mathcal{U}} (\partial_t \zeta \cdot u + \nabla \zeta \bullet q + \zeta \cdot \mathbf{r}) \, dL^{n+1} \\ &= \int_{\mathcal{U}} \partial_t \zeta \cdot u \, dL^{n+1} + \int_{\mathcal{U}} \nabla \zeta \bullet q \, dL^{n+1} + \int_{\mathcal{U}} \zeta \cdot \mathbf{r} \, dL^{n+1} \\ &= \langle \partial_t \zeta, [u] \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} + \langle \nabla \zeta, [q] \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} + \langle \zeta, [\mathbf{r}] \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} \\ &= \langle \zeta, -\partial_t [u] - \text{div } [q] + [\mathbf{r}] \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})}, \end{aligned}$$

wobei $[u]$, $[\mathbf{r}]$, $[q_j]$ ($j = 1, \dots, n$) wie in 2.3 definiert sind. Somit heißt der Erhaltungssatz (I2.1) für Funktionen $u, \mathbf{r}, q_j \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{U})$

$$\partial_t [u] + \text{div} [q] = [\mathbf{r}] \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{U}), \quad (\text{I2.3})$$

und für allgemeine Distributionen, also lineare Abbildungen

$$U, Q_j, R: \mathcal{D}'(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R},$$

lautet die Formulierung der distributionellen Gleichung:

Distributionelle Erhaltungsgleichung:

$$\partial_t U + \text{div} Q = R \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{U}),$$

(I2.4)

$$U, Q_j, R \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}) \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Das sagt aus, dass für $\zeta \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \zeta, -\partial_t U - \text{div} Q + R \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} \\ &= \langle \partial_t \zeta, U \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} + \langle \nabla \zeta, Q \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} + \langle \zeta, R \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} \\ &= \langle \partial_t \zeta, U \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} + \sum_j \langle \partial_j \zeta, Q_j \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} + \langle \zeta, R \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})}. \end{aligned}$$

Wir geben nun verschiedene Anwendungen.

Distribution eines Massepunktes

Als erstes Beispiel betrachten wir eine Trajektorie $t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$.

2.8 Trajektorie als Distribution. Gegeben sei eine Trajektorie in Zeit und Raum

$$t \mapsto (t, \xi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Wir definieren dazu eine Distribution $\boldsymbol{\mu}_\xi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} &:= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \zeta(t, \cdot), \boldsymbol{\delta}_{\xi(t)} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} dt \text{ für } \zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (\text{I2.5})$$

Es ist $\boldsymbol{\mu}_\xi$ ein Radon-Maß wie in Definition 2.5.

Dirac Distribution: Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist $\boldsymbol{\delta}_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\langle \zeta, \boldsymbol{\delta}_{x_0} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \zeta(x_0) \text{ für } \zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (\text{I2.6})$$

Unser Beispiel zeigt nun, dass die Bewegung eines Massepunktes Lösung der allgemeinen distributionellen Massenerhaltung ist. Und zwar befinde sich auf der Trajektorie eine veränderliche Masse $t \mapsto m(t) \in \mathbb{R}$. Wenn m eine beschränkte (und messbare) Funktion ist, dann ist auch $m\boldsymbol{\mu}_\xi$ ein Radon-Maß und es gilt die folgende Aussage.

2.9 Massenpunkt. Es sei $\boldsymbol{\mu}_\xi$ die Distribution in 2.8 zur Trajektorie ξ , und seien $t \mapsto m(t) \in \mathbb{R}$ sowie $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ als beschränkte Funktionen gegeben. Weiter sei $(t, x) \mapsto v(t, x) \in \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Dann ist die Massenerhaltung mit Massenproduktion

$$\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) + \operatorname{div}(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) = \mathbf{r}\boldsymbol{\mu}_\xi \quad (\text{I2.7})$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ erfüllt genau dann, wenn die folgenden Aussagen gelten:

$$\dot{m}(t) = \mathbf{r}(t) \quad \text{und} \quad v(t, \xi(t)) = \dot{\xi}(t), \quad (\text{I2.8})$$

wenigstens solange $m(t) > 0$.

Beweis (I2.8) \Rightarrow (I2.7) im Falle $\mathbf{r} = 0$. Im Falle $\dot{m} = \mathbf{r} = 0$ ist $m = \text{const}$, also hat der Körper eine konstante Masse. Wir haben zu zeigen, dass

$$\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) + \operatorname{div}(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

ist. Nun gilt für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
& - \langle \zeta, \partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) + \operatorname{div}(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) \rangle \\
& = m \langle \partial_t \zeta, \boldsymbol{\mu}_\xi \rangle + m \sum_{i=1}^n \langle \partial_{x_i} \zeta, v_i \boldsymbol{\mu}_\xi \rangle \\
& = m \int_{\mathbb{R}} \left((\partial_t \zeta)(t, \xi(t)) + \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \zeta)(t, \xi(t)) \underbrace{v_i(t, \xi(t))}_{= \dot{\xi}_i(t)} \right) dt \\
& = m \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} (\zeta(t, \xi(t))) dt = 0,
\end{aligned}$$

da ζ kompakten Träger hat. \square

Beweis (I2.8) \Rightarrow (I2.7) im allgemeinen Falle. Für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}
& \langle \zeta, -\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) - \operatorname{div}(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) + \mathbf{r}\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\
& = \langle \partial_t \zeta, m\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \langle \nabla \zeta, mv\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \langle \zeta, \mathbf{r}\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\
& = \int_{\mathbb{R}} \left(m(t) \partial_t \zeta(t, \xi(t)) + m(t) \nabla \zeta(t, \xi(t)) \bullet \underbrace{v(t, \xi(t))}_{= \dot{\xi}(t)} + \zeta(t, \xi(t)) \mathbf{r}(t) \right) dt \\
& = \int_{\mathbb{R}} \left(m(t) \frac{d}{dt} (\zeta(t, \xi(t))) + \zeta(t, \xi(t)) \mathbf{r}(t) \right) dt \\
& = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} (m(t) \zeta(t, \xi(t))) dt + \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) \underbrace{(\mathbf{r}(t) - \dot{m}(t))}_{= 0} dt = 0,
\end{aligned}$$

also $-\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) - \operatorname{div}(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) + \mathbf{r}\boldsymbol{\mu}_\xi = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. \square

Beweis (I2.7) \Rightarrow (I2.8). Choose a test function $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Then

$$\begin{aligned}
0 & = \langle \zeta, -\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) - \operatorname{div}(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) + \mathbf{r}\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\
& = \langle \partial_t \zeta, m\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \langle \nabla \zeta, mv\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \langle \zeta, \mathbf{r}\boldsymbol{\mu}_\xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\
& = \int_{\mathbb{R}} \left(m(t) \partial_t \zeta(t, \xi(t)) + m(t) \nabla \zeta(t, \xi(t)) \bullet v(t, \xi(t)) + \zeta(t, \xi(t)) \mathbf{r}(t) \right) dt,
\end{aligned}$$

For the first term we get

$$\begin{aligned}
& m(t) \partial_t \zeta(t, \xi(t)) \\
& = m(t) \frac{d}{dt} (\zeta(t, \xi(t))) - m(t) \dot{\xi}(t) \bullet \nabla \zeta(t, \xi(t)) \\
& = \frac{d}{dt} (m(t) \zeta(t, \xi(t))) - \dot{m}(t) \zeta(t, \xi(t)) - m(t) \dot{\xi}(t) \bullet \nabla \zeta(t, \xi(t)),
\end{aligned}$$

and integrating this

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} m(t) \partial_t \zeta(t, \xi(t)) \, dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\dot{m}(t) \zeta(t, \xi(t)) + m(t) \dot{\xi}(t) \bullet \nabla \zeta(t, \xi(t)) \right) \, dt. \end{aligned}$$

Plugging this in the above identity we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \zeta, -\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) - \operatorname{div}(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) + \mathbf{r}\boldsymbol{\mu}_\xi \right\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(m(t) \nabla \zeta(t, \xi(t)) \bullet (v(t, \xi(t)) - \dot{\xi}(t)) + \zeta(t, \xi(t)) (\mathbf{r}(t) - \dot{m}(t)) \right) \, dt. \end{aligned} \tag{I2.9}$$

This identity is true for all $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. We now choose special test functions ζ . First we choose a function $\chi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ with

$$\chi = 1, \nabla \chi = 0 \text{ on } \Gamma := \{(t, \xi(t)); t \in \mathbb{R}\}$$

and $\chi(t, x) = 0$ whenever the distance of (t, x) from Γ is greater than 1. Then let $\zeta(t, x) = \eta(t)\chi(t, x)$ with a function $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Taking this test function in (I2.9), we obtain, since $\nabla \zeta(t, \xi(t)) = 0$ for all t ,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) (\mathbf{r}(t) - \dot{m}(t)) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \eta(t) (\mathbf{r}(t) - \dot{m}(t)) \, dt.$$

Since this is true for any function $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ we conclude

$$\mathbf{r}(t) - \dot{m}(t) = 0.$$

Thus the first assertion is shown. With this the equation (I2.9) reduces to

$$0 = \int_{\mathbb{R}} m(t) \nabla \zeta(t, \xi(t)) \bullet (v(t, \xi(t)) - \dot{\xi}(t)) \, dt$$

for all $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Now we choose $\zeta(t, x) = \chi(t, x) x \bullet w(t)$ with a vector function $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Then $\nabla \zeta(t, \xi(t)) = w(t)$ for all t and therefore

$$0 = \int_{\mathbb{R}} m(t) w(t) \bullet (v(t, \xi(t)) - \dot{\xi}(t)) \, dt$$

for all $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. We conclude, if $m(t) > 0$,

$$v(t, \xi(t)) - \dot{\xi}(t) = 0,$$

that is the second assertion. \square

Einzig und allein aus der distributionellen Massenerhaltung in 2.9 im Falle $\mathbf{r} = 0$ folgt also die Konstanz der Masse. Dies beweist, dass dieses distributionelle Gesetz das richtige Gesetz ist. Im Rahmen der Impulserhaltung in Abschnitt 3 kommen wir auf dieses Beispiel zurück. In [21, Flug eines Asteroiden] nehmen wir diese distributionelle Differentialgleichung und machen eine “gesamte Massenbilanz”, in der geklärt wird, wie die ausgestoßene Materie im umgebenden Vakuum verteilt wird.

Gravitationsgleichung

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Schwerefeld, die zugehörige Feldgleichung hat im allgemeinen Fall, da die Dichte einen Sprung macht, eine Distributionslösung, sie ist also keine glatte C^2 -Funktion. Die Feldgleichung lautet

Newton'sches Gravitationsgesetz:

$$\operatorname{div}(-\nabla[\phi]) = [\rho]$$

in ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (physikalisch $n = 3$), d.h in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

ρ die vorhandene Gesamtmasse (als Funktion),

ϕ das differenzierbare Feld (als Funktion),

$\phi(t, x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ (falls $n = 3$),

$G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$ die Gravitationskonstante,

$\phi_{Literatur} = -4\pi G\phi$ Potential in der Literatur ($n = 3$).

(I2.10)

Man kann sich diese Gleichung auch vorstellen als Erhaltungsgleichung

$$\partial_t 0 + \operatorname{div}(-\nabla[\phi]) = [\rho],$$

also sieht es aus wie die allgemeine Massenerhaltung ohne irgendeine Masse, was aber irreführend ist. In Wahrheit entsteht die 0, wenn wir die Lichtgeschwindigkeit gegen ∞ streben lassen. In der Literatur lautet die Gleichung wegen der Definition von $\phi_{Literatur}$ also $\Delta\phi_{Literatur} = 4\pi G\rho$. Man kann auch schreiben $\operatorname{div}\nabla[\phi] = \Delta[\phi]$, also die Differentialgleichung als $-\Delta[\phi] = [\rho]$. Im Allgemeinen können die Masseverteilung ρ und das Feld ϕ auch Distributionen Φ und R sein mit der Gleichung

Allgemeines Gravitationsgesetz:

$$\operatorname{div}(-\nabla\Phi) = R \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

R die vorhandene Gesamtmasse als Distribution,

Φ das Feld als Distribution.

(I2.11)

Im Gravitationsgesetz tritt die Zeit t nur als Parameter auf (in der hier betrachteten Newton'schen Physik), es wird keine Ableitung nach der Zeit gebildet. Deshalb ist das allgemeine Gravitationsgesetz verwandt mit der distributionellen Poisson-Gleichung, die lautet:

Distributionelle Poissongleichung :

$$-\Delta\Phi = R \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

R der Quellterm als Distribution,

Φ die Lösung als Distribution.

Δ der Laplace-Operator im \mathbb{R}^n .

(I2.12)

Im Folgenden wenden wir die Poisson-Gleichung für den Raum \mathbb{R}^n an, wobei die Zeit nur einen Parameter bildet. Das Newton'sche Gesetz ist jedoch in Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ formuliert.

2.10 Bemerkung. Sind $U_t, R_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ für $t \in \mathbb{R}$ Distributionen von der Ordnung k , genauer

$$|\langle \zeta, U_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}| + |\langle \zeta, R_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}| \leq C(t) \|\zeta\|_{C^k(\mathbb{R}^n)}$$

mit $C \in L^1(\mathbb{R})$, und erfüllen die distributionelle Poissongleichung

$$-\operatorname{div}\nabla U_t = R_t \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ für fast alle } t,$$

so definieren (unter Messbarkeitsvoraussetzung an $t \mapsto R_t, t \mapsto U_t$)

$$\langle \zeta, R \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}} \langle \zeta(t, \bullet), R_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} dt,$$

$$\langle \zeta, U \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}} \langle \zeta(t, \bullet), U_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} dt$$

Distributionen $U, R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllen das allgemeine Gravitationsgesetz

$$-\operatorname{div}\nabla U = R \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Beachte: Nicht jede Distribution $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ lässt sich wie angegeben darstellen (siehe z.B. Übung 7.13, aber beachte 2.11).

Beweis. Es sind U und R Distributionen und es gilt

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \Delta U + R \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} &= \langle \Delta \zeta, U \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \langle \zeta, R \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\langle \Delta \zeta(t, \bullet), U_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} + \langle \zeta(t, \bullet), R_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \zeta(t, \bullet), \Delta U_t + R_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} dt. \end{aligned}$$

□

Als Beispiel wählen wir einen sich bewegenden Massepunkt.

2.11 Beispiel. Ist $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ die Distribution, die zu einem Massepunkt mit der Trajektorie $\{(t, \xi(t)); t \in \mathbb{R}\}$ gehört, so sagt die Definition $R = m\mu_\xi$, dass

$$\langle \zeta, R \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} = m \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} \langle \zeta(t, \bullet), R_t \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} dt,$$

wobei also $R_t = m\delta_{\xi(t)}$, d.h.

$$\langle \eta, R_t \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} := m \cdot \eta(\xi(t)) \text{ für } \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

also ist R_t durch die Dirac-Distribution gegeben.

Wir konzentrieren uns jetzt zunächst auf die Poissongleichung. Hier können wir in (I2.12) als Spezialfall $R = \delta_{x_0}$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ betrachten, dabei ist $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ die Dirac Distribution im Punkte y_0 , siehe 2.8. Die Lösung $\Phi = [\phi]$ zu $R = \delta_0$ mit $\phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist dann die Fundamentallösung für den negativen Laplace Operator:

2.12 Fundamentallösung für den Laplace Operator. Ist $n \geq 3$, so ist eine Lösung $\phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ von

$$-\Delta[\phi] = \delta_0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

mit der Randbedingung $\phi(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$, gegeben durch

$$\phi(x) := \frac{1}{\sigma_n(n-2)} |x|^{2-n} \text{ für } |x| > 0. \tag{I2.13}$$

Remark: Es ist ϕ die Fundamentallösung für $-\Delta$, dem negativen Laplace-Operator. *Definition:* Es ist $\sigma_n := \text{H}^{n-1}(\partial B_1(0)) = n\kappa_n$ die **Oberfläche der Einheitskugel** im \mathbb{R}^n , und $\kappa_n := \text{L}^n(B_1(0))$ das **Volumen der Einheitskugel** im \mathbb{R}^n .

n	1	2	3	beliebig	(I2.14)
κ_n	2	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\text{L}^n(B_1(0))$	
σ_n	2	2π	4π	$\text{H}^{n-1}(\partial B_1(0)) = n\kappa_n$	

Beweis. Es ist für $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, -\partial_i[\phi] \rangle &= \langle \partial_i \zeta, [\phi] \rangle = \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \zeta(x) \frac{dx}{|x|^{n-2}} \\ &= \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \partial_{x_i} \zeta(x) \frac{dx}{|x|^{n-2}} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \zeta(x) \mathbf{e}_i \bullet \boldsymbol{\nu}_{B_\varepsilon(0)}(x) \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} d\text{H}^{n-1}(x) \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \zeta(x) \partial_{x_i} \frac{1}{|x|^{n-2}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x) \frac{x_i}{|x|^n} dx \\ &= \langle \zeta, [F_i] \rangle \end{aligned}$$

mit

$$F(x) := \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n},$$

also $-\nabla[\phi] = [F]$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \operatorname{div}[F] \rangle &= \langle -\nabla\zeta, [F] \rangle = -\frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\zeta(x) \bullet \frac{x}{|x|^n} dx \\ &= -\frac{1}{\sigma_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\zeta(x) \bullet \frac{x}{|x|^n} dx \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \underbrace{\zeta(x) \nu_{B_\varepsilon(0)}(x) \bullet \frac{x}{|x|^n}}_{= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}} dH^{n-1}(x) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \underbrace{\zeta(x) \operatorname{div} \frac{x}{|x|^n}}_{= 0} dx \quad (\text{siehe 7.12}) \\ &= \zeta(0) = \langle \zeta, \delta_0 \rangle, \end{aligned}$$

also ist F die Fundamentallösung des Divergenzoperators. □

Es gibt auch im Falle $n = 1, 2$ Fundamentallösungen des Laplaceoperators, diese sind für uns nur interessant in endlichen Umgebungen der Singularität. Sie lauten

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{im Falle } n = 2, \\ -\frac{1}{2} |x| & \text{im Falle } n = 1. \end{cases}$$

Es ist für alle n

$$\left. \begin{aligned} -\nabla[\phi] &= [F] \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \\ F(x) &:= \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n} \end{aligned} \right\} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Im Falle $n = 3$ ist die Fundamentallösung, wie schon gesagt, verwandt mit der Lösung des allgemeinen Gravitationsgesetzes für einen Massepunkt.

2.13 Gravitationspotential eines punktförmigen Sternes. Sei $n \geq 3$ (physikalisch ist $n = 3$), $m > 0$ die Masse und $R := m\mu_\xi$ die Masse des sich bewegenden Punktes $t \mapsto \xi(t)$. Dann ist die Lösung, d.h. die Distribution Φ , des allgemeinen Gravitationsgesetzes

$$\operatorname{div}(-\nabla\Phi) = R := m\mu_\xi \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

gegeben durch $\Phi = [\phi]$,

$$\phi(t, x) := \frac{m}{\sigma_n(n-2)} |x - \xi(t)|^{2-n} \text{ für } |x - \xi(t)| > 0. \quad (\text{I2.15})$$

Die Lösung ist eindeutig bestimmt mit der Bedingung, dass für $|x| \rightarrow \infty$ gilt $\phi(t, x) \rightarrow 0$. Im physikalischen Fall $n = 3$ ist die Lösung gegeben durch

$$\phi(t, x) := \frac{m}{4\pi|x - \xi(t)|} \text{ für } x \neq \xi(t). \quad (\text{I2.16})$$

Beweis. Dies folgt auf die gleiche Weise wie im Beweis von 2.12. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus dem Folgenden, wobei $\phi(t, \bullet) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Eine andere Möglichkeit dies zu beweisen ist 2.17 anzuwenden. \square

2.14 Eindeutigkeit. Sei $n \geq 3$ und $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Dann gibt höchstens ein $\phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-\nabla[\phi]) &= R \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ \phi(t, x) &\rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty \text{ für fast alle } t. \end{aligned}$$

Beweis. Denn sind ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen zu R , so folgt mit $\phi := \phi_1 - \phi_2$, dass

$$\begin{aligned} -\Delta[\phi] &= 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ \phi(t, x) &\rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty \text{ für fast alle } t. \end{aligned}$$

Es folgt für $\zeta(t, x) = \eta_0(t)\eta_1(x)$

$$0 = \langle \zeta, \Delta[\phi] \rangle = \langle \Delta\zeta, [\phi] \rangle = \int_{\mathbb{R}} \eta_0(t) \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\eta_1(x)\phi(t, x) \, dx \, dt$$

Da dies für alle η_0 gilt, folgt für fast alle t

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\eta_1(x)\phi(t, x) \, dx,$$

d.h. $\phi(t, \bullet)$, oder besser $[\phi(t, \bullet)]$, ist eine harmonische Distribution, also

$$\Delta[\phi(t, \bullet)] = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

und für solche gilt die Mittelwerteigenschaft auf Sphären (siehe [PDG]), d.h.

$$\phi(t, x_0) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \phi(t, x) \, dH^{n-1}(x) \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty.$$

Also ist $\phi = 0$. \square

Wir werden nun das Schwerfeld für einen Planeten berechnen. Die Lösung ist eine Distribution, und zwar beim Übergang vom festen Körper zum Vakuum, da hier die Dichte einen Sprung macht. (Also ist $\Delta\phi \in L^\infty$, wobei wir nicht die eckigen Klammern benutzen. Das Beste, was die Regularitätstheorie zeigen könnte, ist, dass $\phi \in C^{1,1}$. Denn es gilt die scharfe Aussage $\Delta\phi \in L^p$ impliziert $\phi \in W^{2,p}$ für $p < \infty$.) Dies ist konsistent mit dem folgenden Theorem.

2.15 Satz. Es sei $\Gamma \subset D \subset \mathbb{R}^N$ eine C^1 -Fläche und $D = D_+ \cup \Gamma \cup D_-$ mit disjunkten offenen Mengen D_+ und D_- (so, dass Γ keinen Rand in D besitzt) und

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_+ \text{ in } D_+, & \varrho_+ \in C^0(\overline{D_+}), \\ \varrho_- \text{ in } D_-, & \varrho_- \in C^0(\overline{D_-}), \end{cases} \quad \phi = \begin{cases} \phi_+ \text{ in } D_+, & \phi_+ \in C^2(\overline{D_+}), \\ \phi_- \text{ in } D_-, & \phi_- \in C^2(\overline{D_-}). \end{cases}$$

Dann ist

$$-\Delta\Phi = R \text{ in } \mathcal{D}'(D), \quad \Phi = [\phi], \quad R = [\varrho], \quad (\text{I2.17})$$

äquivalent zu

$$\left. \begin{aligned} -\Delta\phi_+ = \varrho_+ \text{ in } D_+, \quad -\Delta\phi_- = \varrho_- \text{ in } D_-, \\ \phi_+ = \phi_- \\ \partial_\nu\phi_+ = \partial_\nu\phi_- \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Gamma. \quad (\text{I2.18})$$

Also ist $\phi \in C^1(D)$, wobei $\nu = \nu_{D_+} = -\nu_{D_-}$.

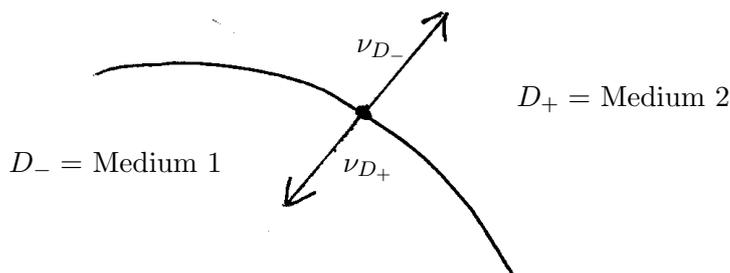


Abb. 6: Sprungbedingung am Interface

Beachte: Für das Resultat in 2.15 ist die Voraussetzung $R = [\varrho]$ mit $\varrho \in L^\infty(D)$ wesentlich. Ist z.B. ¹³

$$R = \varrho_+ L^N \llcorner D_+ + \varrho_- L^N \llcorner D_- + \varrho_0 H^{N-1} \llcorner \Gamma,$$

so ist ϕ nur stetig mit

$$\partial_\nu\phi_+ = \partial_\nu\phi_- + \varrho_0$$

auf Γ . Der Fall $\varrho_0 \neq 0$ wird in 2.18 behandelt.

Beweis (I2.17) \Rightarrow (I2.18). Für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(D)$ gilt

$$\langle \zeta, \Delta[\phi] \rangle = -\langle \zeta, [\varrho] \rangle.$$

Die rechte Seite ist

$$-\langle \zeta, [\varrho] \rangle = -\int_D \zeta \varrho \, dL^N = -\int_{D_+} \zeta \varrho_+ \, dL^N - \int_{D_-} \zeta \varrho_- \, dL^N.$$

¹³ Ist μ ein Maß, so ist das Maß $\mu \llcorner S$ definiert durch $(\mu \llcorner S)(E) := \mu(S \cap E)$.

Die linke Seite ist

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, \Delta[\phi] \rangle &= \langle \Delta\zeta, [\phi] \rangle = \int_D \Delta\zeta \cdot \phi \, dL^N \\
&= \int_{D_+} \Delta\zeta \cdot \phi_+ \, dL^N + \int_{D_-} \Delta\zeta \cdot \phi_- \, dL^N \\
&= - \int_{D_+} \nabla\zeta \bullet \nabla\phi_+ \, dL^N - \int_{D_-} \nabla\zeta \bullet \nabla\phi_- \, dL^N \\
&\quad + \int_{\Gamma} \nabla\zeta \bullet (\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-}) \, dH^{N-1} \\
&= \int_{D_+} \zeta \Delta\phi_+ \, dL^N + \int_{D_-} \zeta \Delta\phi_- \, dL^N \\
&\quad + \int_{\Gamma} (\nabla\zeta \bullet (\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-}) - \zeta (\nabla\phi_+ \bullet \nu_{D_+} + \nabla\phi_- \bullet \nu_{D_-})) \, dH^{N-1}.
\end{aligned}$$

Wählen wir nun ζ in $C_0^\infty(D_+)$, so folgt

$$\int_{D_+} \zeta \Delta\phi_+ \, dL^N = - \int_{D_+} \zeta \varrho_+ \, dL^N$$

für alle solche Testfunktionen, also

$$\Delta\phi_+ = -\varrho_+ \text{ in } D_+.$$

Entsprechend folgt, indem wir ζ in $C_0^\infty(D_-)$ wählen,

$$\Delta\phi_- = -\varrho_- \text{ in } D_-.$$

Indem wir diese Identitäten in obige Gleichung einsetzen, erhalten wir für beliebige Testfunktionen

$$0 = \int_{\Gamma} (\nabla\zeta \bullet (\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-}) - \zeta (\nabla\phi_+ \bullet \nu_{D_+} + \nabla\phi_- \bullet \nu_{D_-})) \, dH^{N-1}.$$

Nun erweitern wir durch ein Approximationsargument dies von $\zeta \in C_0^\infty(D)$ auf $\zeta \in C_0^1(D)$. Ist dies getan, wählen wir eine Funktion $\eta \in C^1(D)$, welche auf Γ verschwindet, und für die $\nabla\eta \neq 0$ auf Γ ist (z.B. $\eta(x) = \text{dist}(x, \Gamma)$ auf D_+ und $\eta(x) = -\text{dist}(x, \Gamma)$ auf D_-). Setze

$$\zeta = \zeta_0 \cdot \eta \in C_0^1(D),$$

wobei $\zeta_0 \in C_0^\infty(D)$. Dann ist auf Γ

$$\zeta = 0, \quad \nabla\zeta = \zeta_0 \nabla\eta.$$

Es folgt

$$0 = \int_{\Gamma} \zeta_0 \nabla\eta \bullet (\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-}) \, dH^{N-1}$$

und da ζ_0 beliebig ist, $0 = \nabla\eta \bullet (\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-})$ auf Γ . Da $\nabla\eta$ in die Richtung einer Normalen ν zeigt, folgt

$$0 = \nu \bullet (\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-}) = \nu \bullet \nu_{D_+} (\phi_+ - \phi_-)$$

und daher

$$\phi_+ = \phi_- \text{ auf } \Gamma,$$

d.h. ϕ ist stetig fortsetzbar auf Γ . Obige Identität wird nun also für beliebige Testfunktionen zu

$$0 = \int_{\Gamma} \zeta (\nabla\phi_+ \bullet \nu_{D_+} + \nabla\phi_- \bullet \nu_{D_-}) \, dH^{N-1}.$$

Daraus folgt nach bekanntem Schluss, d.h. ζ hat beliebige Werte,

$$\nabla\phi_+ \bullet \nu_{D_+} + \nabla\phi_- \bullet \nu_{D_-} = 0 \text{ auf } \Gamma,$$

also d.h. die Differenzierbarkeit von ϕ . □

Beweis (I2.18) \Rightarrow (I2.17). Es ist für Testfunktionen $\zeta \in C_0^\infty(D)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_+} \zeta (\Delta\phi_+ + \varrho_+) \, dL^N + \int_{D_-} \zeta (\Delta\phi_- + \varrho_-) \, dL^N \\ &= - \int_{D_+} \nabla\zeta \bullet \nabla\phi_+ \, dL^N - \int_{D_-} \nabla\zeta \bullet \nabla\phi_- \, dL^N \\ &\quad - \int_{\Gamma} -\zeta \underbrace{(\nabla\phi_+ \bullet \nu_{D_+} + \nabla\phi_- \bullet \nu_{D_-})}_{= \partial_{\nu_{D_+}} \phi_+ - \partial_{\nu_{D_+}} \phi_- = 0} \, dH^{N-1} + \int_D \zeta \varrho \, dL^N \\ &= \int_{D_+} \Delta\zeta \cdot \phi_+ \, dL^N + \int_{D_-} \Delta\zeta \cdot \phi_- \, dL^N \\ &\quad - \int_{\Gamma} \nabla\zeta \bullet \underbrace{(\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-})}_{= (\phi_+ - \phi_-) \nu_{D_+} = 0} \, dH^{N-1} + \int_D \zeta \varrho \, dL^N \\ &= \int_D \Delta\zeta \cdot \phi \, dL^N + \int_D \zeta \varrho \, dL^N \\ &= \langle \Delta\zeta, [\phi] \rangle + \langle \zeta, [\varrho] \rangle = \langle \zeta, \Delta[\phi] + [\varrho] \rangle \end{aligned}$$

also $\Delta[\phi] + [\varrho] = 0$ in $\mathcal{D}'(D)$. □

Beweis der Bemerkung. Wir betrachten nur den Fall $R = \varrho_0 [H^{N-1} \llcorner \Gamma]$. Der Beweis ist derselbe bis auf die Tatsache, dass nun

$$-\langle \zeta, R \rangle = - \int_{\Gamma} \zeta \varrho_0 \, dH^{N-1}$$

und der Term auf Γ

$$-\int_{\Gamma} \zeta \varrho_0 \, d\mathbb{H}^{N-1} = \int_{\Gamma} \left(\nabla \zeta \bullet (\phi_+ \nu_{D_+} + \phi_- \nu_{D_-}) - \zeta (\nabla \phi_+ \bullet \nu_{D_+} + \nabla \phi_- \bullet \nu_{D_-}) \right) d\mathbb{H}^{N-1}$$

ist. Mit dergleichen Argumentation wie oben ist dann $\phi_- = \phi_+$ auf Γ und daher

$$0 = \int_{\Gamma} \zeta (\varrho_0 - \nabla \phi_+ \bullet \nu_{D_+} - \nabla \phi_- \bullet \nu_{D_-}) \, d\mathbb{H}^{N-1}$$

für alle ζ , weswegen $\nabla \phi_+ \bullet \nu_{D_+} + \nabla \phi_- \bullet \nu_{D_-} = \varrho_0$. \square

Die Situation in 2.15 ist zum Beispiel die Situation bei dem Schwerefeld, wenn der Körper in unserer Näherung eine glatte Oberfläche aufweist. Das ist z.B. für die Kugel der Fall.

2.16 Gravitationspotential einer Kugel. Es sei $n \geq 3$ (physikalisch ist $n = 3$), $m > 0$ die Masse und $t \mapsto \xi(t)$ die Bewegung des Zentrums des Planeten. Dann ist

$$\varrho(t, x) = \frac{m}{L^n(B_R(\xi(t)))} \mathcal{X}_{B_R(\xi(t))}(x)$$

die Massenverteilung des Planeten idealisiert als homogene Massendichte auf einer Kugel mit Radius R (siehe dazu auch 4.5), die Gesamtmasse des Planeten ist

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(t, x) \, dx.$$

Wir suchen eine Lösung ϕ der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-[\nabla \phi]) &= [\varrho] \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \\ \text{mit } \phi(t, x) &\rightarrow 0 \text{ falls } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{I2.19}$$

welche C^1 in den Raumvariablen ist (siehe die Aussage 2.15).

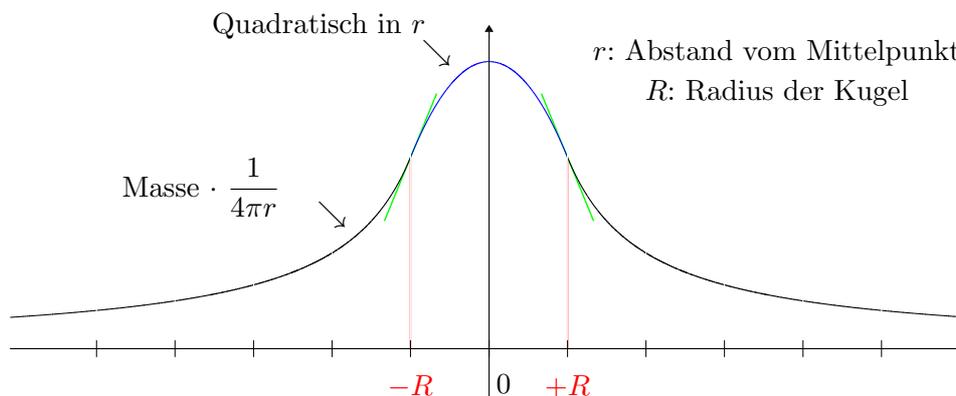
Behauptung: Die Lösung, welche (für $n \geq 3$) im Unendlichen verschwindet, ist ¹⁴

$$\phi(t, x) = \begin{cases} \frac{m}{2\kappa_n} \frac{1}{R^n} \left(\frac{R^2}{n-2} - \frac{|x - \xi(t)|^2}{n} \right) & \text{für } |x - \xi(t)| \leq R, \\ \frac{m}{n\kappa_n(n-2)} \frac{1}{|x - \xi(t)|^{n-2}} & \text{für } |x - \xi(t)| \geq R. \end{cases} \tag{I2.20}$$

Für $n = 3$ ist die Lösung gegeben durch

$$\phi(t, x) = \begin{cases} \frac{3m}{8\pi} \frac{1}{R^3} \left(R^2 - \frac{|x - \xi(t)|^2}{3} \right) & \text{für } |x - \xi(t)| \leq R, \\ \frac{m}{4\pi} \frac{1}{|x - \xi(t)|} & \text{für } |x - \xi(t)| \geq R. \end{cases} \tag{I2.21}$$

¹⁴ Es ist $\kappa_n := L^n(B_1(0))$, siehe (I2.14).

Abb. 7: Schwerfeld einer inkompressiblen Kugel ($n = 3$)

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\xi(t) = 0$. Da $\kappa_n R^n = L^n(B_R(0))$, ist

$$\varrho(t, x) = \frac{m}{\kappa_n R^n} \mathcal{X}_{B_R(0)}(x) = m_R \mathcal{X}_{B_R(0)}(x) \text{ wenn } m_R := \frac{m}{\kappa_n R^n}.$$

Es sei

$$\phi(t, x) := \begin{cases} \phi_-(t, x) & \text{für } |x| < R, \\ \phi_+(t, x) & \text{für } |x| > R, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} -\Delta \phi_-(t, x) &= m_R \text{ für } |x| < R, \\ -\Delta \phi_+(t, x) &= 0 \text{ für } |x| > R. \end{aligned}$$

Dies ist erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \phi_-(t, x) &:= c_0 - \frac{m_R}{2n} |x|^2, \\ \phi_+(t, x) &:= c_\infty \frac{1}{|x|^{n-2}}. \end{aligned}$$

Dann ist ϕ stetig im Raum genau dann, wenn $\phi_-(t, x) = \phi_+(t, x)$ für $x \in \partial B_R(0)$ d.h.

$$c_0 - \frac{m_R}{2n} R^2 = c_\infty R^{2-n}. \quad (\text{I2.22})$$

Weiter gilt dass ϕ stetig differenzierbar im Raume ist genau dann, wenn $\partial_\nu \phi_-(t, x) = \partial_\nu \phi_+(t, x)$ für $x \in \partial B_R(0)$, d.h.

$$\frac{m_R}{n} R = (n-2) c_\infty R^{1-n}. \quad (\text{I2.23})$$

Aus (I2.22) und (I2.23) folgt, dass ϕ stetig differenzierbar im Raume ist, und dass

$$\begin{aligned} c_\infty &= \frac{m_R}{n(n-2)} R^n = \frac{m}{n \kappa_n (n-2)}, \\ c_0 &= m_R \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n(n-2)} \right) R^2 = \frac{m}{2 \kappa_n (n-2)} R^{2-n}. \end{aligned} \quad (\text{I2.24})$$

Die Bedingungen in (I2.24) ergeben (I2.20). Also ist (I2.17) gezeigt, und somit folgt aus Satz 2.15, dass (I2.18) gilt. Damit ist der Satz bewiesen. \square

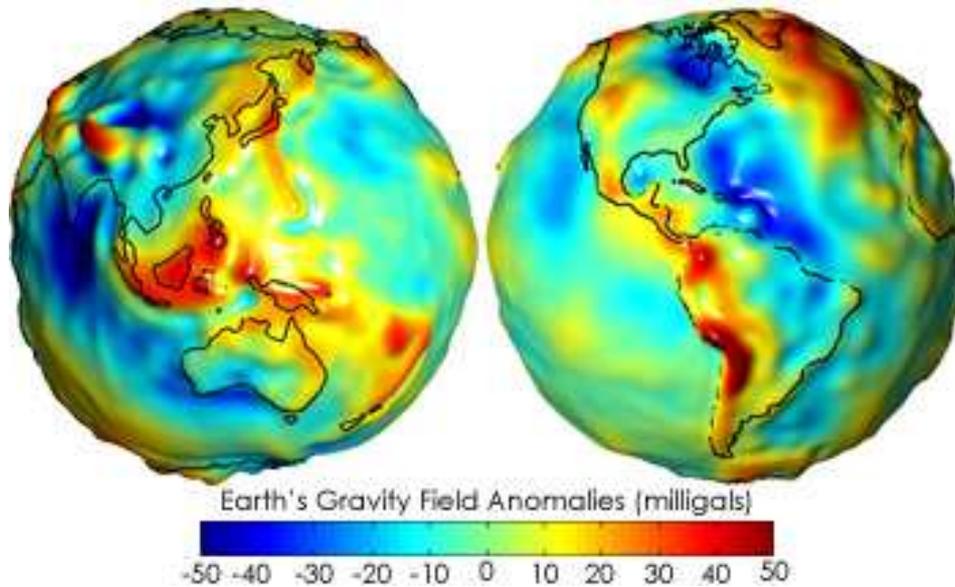


Abb. 8: Anomalie der Erdschwerkraft: “Earth’s gravity measured by NASA GRACE mission, showing deviations from the theoretical gravity of an idealized smooth Earth, the so-called Earth ellipsoid. Red shows the areas where gravity is stronger than the smooth, standard value, and blue reveals areas where gravity is weaker.” [Wikipedia: Gravity of Earth].

Bei einem Körper im Weltraum ist die Kugelform natürlich nur approximativ erfüllt. So befinden sich Berge auf der Oberfläche und die Dichte ist nicht konstant, siehe Abb. 8 und auch [GRACE_globe_animation.gif]. Aber was auch immer ρ ist, das Gravitationspotential ist durch das Randwertproblem (I2.19) gegeben. Entartet der Planet zu einem Punkt der Masse m , so gilt:

2.17 Konvergenz zum Massepunkt. Sei $n \geq 3$. Für $m > 0$ fest und $R \rightarrow 0$ konvergiert dann das Schwerefeld als Lösung aus 2.16 in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ zu einer Lösung ϕ von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}([\nabla\phi]) &= m\mu_\xi \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ \phi(t, x) &\rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist gegeben durch ¹⁵

$$\phi(t, x) := \frac{m}{\sigma_n(n-2)} |x - \xi(t)|^{2-n} \text{ für } |x - \xi(t)| > 0. \quad (\text{I2.25})$$

¹⁵ Wir definieren $\sigma_n := \mathbb{H}^{n-1}(\partial B_1(0))$, $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, und es ist $\sigma_n = n\kappa_n$.

Beweis der Konvergenz. Die Gravitationslösung ϕ_R und ϱ_R aus 2.16 erfüllt

$$\operatorname{div}(-[\nabla\phi_R]) = [\varrho_R] \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),$$

oder mit Testfunktionen $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

$$\int \zeta \varrho_R \, dL^{n+1} = \int \nabla\zeta \bullet \nabla\phi_R \, dL^{n+1} = - \int \Delta\zeta \cdot \phi_R \, dL^{n+1}.$$

Nun gilt $\phi_R \rightarrow \phi$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ unter Nutzung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes und folgender Abschätzung

$$\begin{aligned} \phi_R(t, x) &= \phi(t, x) \text{ für } |x - \xi(t)| \geq R, \\ 0 \leq \phi_R(t, x) &\leq \phi(t, x) \text{ für } |x - \xi(t)| \leq R. \end{aligned}$$

Die erste Identität folgt aus der Definition von ϕ_R . Die zweite Ungleichung lautet $\phi_R(t, x) \leq \phi(t, x)$ für $0 \leq r = |x - \xi(t)| \leq R$ und das gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \frac{m}{2\kappa_n} \frac{1}{R^n} \left(\frac{R^2}{n-2} - \frac{r^2}{n} \right) &\leq \frac{m}{n\kappa_n(n-2)} r^{2-n} \\ \iff \frac{R^2}{(n-2)R^n} &\leq \frac{2}{n(n-2)} r^{2-n} + \frac{r^2}{nR^n} \\ \iff \frac{s^{n-2}}{n-2} &\leq \frac{2}{n(n-2)} + \frac{s^n}{n} \text{ für } s = \frac{r}{R} \leq 1 \\ \iff s^{n-2} &\leq \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} s^n \text{ für } s = \frac{r}{R} \leq 1, \end{aligned}$$

was aus der Young'schen Ungleichung folgt. (Für die L^1 -Konvergenz reicht es zu zeigen, dass $\phi_R(t, x) \leq C|x - \xi(t)|^{2-n}$ für alle R , wobei C unabhängig von R ist.) Und es gilt $\varrho_R L^{n+1} \rightarrow m\mu_\xi$ für $R \rightarrow 0$, denn

$$\begin{aligned} \int \zeta \varrho_R \, dL^{n+1} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B_R(\xi(t))} \zeta(t, x) \frac{m}{\kappa_n R^n} \, dx \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B_1(0)} \zeta(t, \xi(t) + Ry) \frac{m}{\kappa_n} \, dy \, dt \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) m \, dt = \langle \zeta, m\mu_\xi \rangle. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\langle \zeta, m\mu_\xi \rangle = - \langle \Delta\zeta, \phi \rangle,$$

was zu zeigen war. \square

Es stimmt also außerhalb eines symmetrischen ‘‘Sterns’’ (jedenfalls wenn er eine konstante Massendichte aufweist) die Lösung der Gravitationsgleichung mit der Lösung überein, die man erhält, wenn man den ‘‘Stern als Punktmasse’’ ansetzt. Im nächsten Abschnitt 3 werden wir die Impulserhaltung betrachten und auch dort Sterne im inkompressiblen Fall betrachten (siehe 4.5). Im kompressiblen Fall sei auf Abschnitt IV.16 verwiesen.

Dass die Lösung der Gravitationsgleichung C^1 ist, trifft nicht zu, wenn die Masse auf einer Fläche verteilt ist. Für eine C^0 -Lösung betrachte folgendes Beispiel einer Masse, die auf einer Schale konzentriert ist. Das folgende Beispiel hat eine eine homogene Massenverteilung.

2.18 Hohlkugel. Es sei $n \geq 3$, $m > 0$ konstant und $t \mapsto \xi(t)$ die Bewegung des Zentrums einer Kugelschale, und $\partial B_R(\xi(t))$ sein Träger. Es sei dann $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\langle \zeta, \boldsymbol{\mu} \rangle := \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial B_R(\xi(t))} \zeta(t, x) \, d\mathbb{H}^{n-1}(x) \, dt$$

für $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Weiter sei

$$\varrho_s(t, x) := \frac{m}{\mathbb{H}^{n-1}(\partial B_R(0))} \mathcal{X}_{\partial B_R(\xi(t))}(x)$$

die konstante Dichte auf $\partial B_R(\xi(t))$. Dann ist die Lösung $\boldsymbol{\phi}$ von

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-\nabla[\boldsymbol{\phi}]) &= \varrho_s \boldsymbol{\mu} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ \boldsymbol{\phi}(t, x) &\rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\boldsymbol{\phi}(t, x) = \begin{cases} \frac{m}{\sigma_n(n-2)} |x - \xi(t)|^{2-n} & \text{wenn } |x - \xi(t)| \geq R, \\ \frac{mR^{2-n}}{\sigma_n(n-2)} & \text{wenn } |x - \xi(t)| \leq R. \end{cases}$$

Die Lösung $\boldsymbol{\phi}$ ist also nur von der Klasse C^0 .

Beweis. Wenn $\boldsymbol{\phi}$ wie in der Formel gegeben ist, dann ist

$$\nabla \boldsymbol{\phi}(t, x) = \begin{cases} -\frac{m}{\sigma_n} \frac{x - \xi(t)}{|x - \xi(t)|^n} & \text{wenn } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(\xi(t))}, \\ 0 & \text{wenn } x \in B_R(\xi(t)), \end{cases}$$

wobei $\Delta \boldsymbol{\phi} = \operatorname{div} \nabla \boldsymbol{\phi} = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(\xi(t))}$. Also ist für $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \nabla[\boldsymbol{\phi}] \rangle &= -\langle \operatorname{div} \zeta, [\boldsymbol{\phi}] \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \zeta(t, x) \cdot \boldsymbol{\phi}(t, x) \, dx \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(\xi(t))}} \zeta(t, x) \bullet \nabla \boldsymbol{\phi}(t, x) \, dx \, dt, \end{aligned}$$

da ϕ stetig ist. Damit gilt für $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \langle \eta, \operatorname{div}(-\nabla[\phi]) \rangle &= \langle \nabla\eta, \nabla[\phi] \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(\xi(t))}} \nabla\eta(t, x) \bullet \nabla\phi(t, x) \, dx \, dt \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(\xi(t))}} \eta(t, x) \underbrace{\Delta\phi(t, x)}_{=0} \, dx \, dt \\
 &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial B_R(\xi(t))} \eta(t, x) \underbrace{\nabla\phi(t, x) \bullet \nu_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(\xi(t))}}}_m \, dH^{n-1}(x) \, dt \\
 &= \frac{\sigma_n |x - \xi(t)|^{n-1}}{\sigma_n |x - \xi(t)|^{n-1}} \\
 &= \langle \eta, \varrho_s \boldsymbol{\mu} \rangle,
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Integral $\nabla\phi(t, x)$ von außen genommen wird, d.h.

$$\nabla\phi(t, x) = \lim_{h \searrow 0} \nabla\phi(t, x + h\nu_{B_R(\xi(t))})$$

□

3 Impulserhaltung

Die Impulserhaltung braucht für ihre Formulierung die Massenerhaltung, sie ist also nur formulierbar mit Hilfe der Massenerhaltung, was sich aus den Beobachtertransformationen in Abschnitt II.3 ergibt. Dieses System ist die Masse-Impuls-Erhaltung und lautet

Allgemeine Masse-Impuls-Erhaltung:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) = \mathbf{r} ,$$

$$\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) = \tilde{\mathbf{f}} \quad ^{16}$$

wobei neben den schon bekannten Größen aus (II.7)

$\Pi = (\Pi_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ Drucktensor,

$\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{\mathbf{f}}_i)_{i=1,\dots,n}$ allgemeine Kraftdichte.

(I3.1)

Der $\tilde{\mathbf{f}}$ -Term beinhaltet sowohl “äußere” Kräfte als auch “innere” Kräfte wie z.B. die Selbstgravitation. Außerdem hängt (I3.1) von dem Beobachter ab, der diese Gleichung hinschreibt wie z.B. die Coriolis-Kraft in 5.5 (siehe auch Abschnitt II.3). Es besteht eine Korrespondenz zwischen Flusstermen und der rechten Seite, also zwischen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ v \mathbf{J}^T + \Pi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ (\mathbf{r} + \mathbf{J} \bullet \nabla)v + \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (\text{I3.2})$$

wobei die “klassische Kraftdichte” $\mathbf{f} := \tilde{\mathbf{f}} - (\mathbf{r} + \mathbf{J} \bullet \nabla)v$ in (II3.17) eingeführt wird. Die Korrespondenz z.B. zwischen dem Druckterm Π und dem Kraftterm \mathbf{f} ist wichtig, ähnlich wie zwischen \mathbf{J} und \mathbf{r} (vgl. die Bemerkung im Anschluss an (II.7)). Teile der Kraft können auch als Term in dem Drucktensor umgeschrieben werden und werden dann auch als “innere Kraft” oder “interne Kraft” bezeichnet (siehe als Beispiel für Massenpunkte 3.4). Die v -Terme in den Flüssen und auf der rechten Seite ergeben sich aus Objektivitätsgründen (was wir in Abschnitt II.3 genau ausführen). Unter der Zeitableitung ist ϱ die **Massendichte** und ϱv die **Impulsdichte**. Die Divergenz von Matrizen wird allgemein dadurch definiert, dass sie auf dem letzten Index wirkt, also gilt die folgende

Definition: Ist

$$M = (M_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix}$$

¹⁶ Während $(x, y) \mapsto x \bullet y = x^T y$ das skalare Produkt zweier Vektoren bezeichnet, wird das **äußere Produkt** oder **Tensorprodukt** durch $(x, y) \mapsto x y^T = x \otimes y$ ausgedrückt.

eine matrixwertige Funktion, so ist die Divergenz der Matrix definiert durch

$$\operatorname{div} M := \left(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} M_{ij} \right)_{i=1, \dots, n} .$$

Weiter ist in obiger Gleichung

$$v v^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} [v_1 \ \dots \ v_n] = \begin{bmatrix} v_1 v_1 & \dots & v_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n v_1 & \dots & v_n v_n \end{bmatrix} = (v_i v_j)_{i,j=1, \dots, n} ,$$

$$v \mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} [\mathbf{J}_1 \ \dots \ \mathbf{J}_n] = \begin{bmatrix} v_1 \mathbf{J}_1 & \dots & v_1 \mathbf{J}_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n \mathbf{J}_1 & \dots & v_n \mathbf{J}_n \end{bmatrix} = (v_i \mathbf{J}_j)_{i,j=1, \dots, n} .$$

Also ist

$$\varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi = (\varrho v_i v_j + v_i \mathbf{J}_j + \Pi_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$$

und die Differentialgleichungen in (I3.1) können als $n + 1$ reelle Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \sum_{j=1}^n \partial_j (\varrho v_j + \mathbf{J}_j) &= \mathbf{r} , \\ \partial_t (\varrho v_k) + \sum_{j=1}^n \partial_j (\varrho v_k v_j + v_k \mathbf{J}_j + \Pi_{kj}) &= \tilde{\mathbf{f}}_k \text{ für } k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{I3.3})$$

geschrieben werden.

Impuls von Massenpunkten

Wir betrachten zunächst die Bewegung eines Massenpunktes, bei dem die Trajektorie wieder wie in 2.8 mit $t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet wird, und die Masse-Impuls-Erhaltung eine distributionelle Formulierung hat, die wir in 3.1 vorstellen werden. Wir zeigen dann, dass diese distributionellen Erhaltungssätze äquivalent sind zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung für m und zweiter Ordnung für ξ .

3.1 Massenpunkt. Wir betrachten den Massenpunkt aus 2.9, der sich mit $t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$ bewegt und dessen Masse $t \mapsto m(t) > 0$ ist. Weiter betrachte Abbildungen $v: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die allgemeine Kraft $\tilde{\mathbf{f}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist das Folgende äquivalent:

(1) Es sind die Distributionsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t (m \boldsymbol{\mu}_\xi) + \operatorname{div} (m v \boldsymbol{\mu}_\xi) &= \mathbf{r} \boldsymbol{\mu}_\xi , \\ \partial_t (m v \boldsymbol{\mu}_\xi) + \operatorname{div} (m v v^T \boldsymbol{\mu}_\xi) &= \tilde{\mathbf{f}} \boldsymbol{\mu}_\xi \end{aligned} \quad (\text{I3.4})$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ erfüllt, wobei die Distribution $\boldsymbol{\mu}_\xi$ gegeben ist durch 2.8.

(2) Es ist $v(t, \xi(t)) = \dot{\xi}(t)$ die Geschwindigkeit, und es gelten die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{m} = \mathbf{r}, \quad (m\dot{\xi})' = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (\text{I3.5})$$

(3) Es ist $v(t, \xi(t)) = \dot{\xi}(t)$ die Geschwindigkeit, und wenn die Kraft gegeben ist durch $\mathbf{f}(t) := \mathbf{f}(t) - \mathbf{r}(t)v(t, \xi(t))$, so ist

$$\dot{m} = \mathbf{r}, \quad m\ddot{\xi} = \mathbf{f}. \quad (\text{I3.6})$$

Zusatz: Ist $\mathbf{r} = 0$, so ist $m = \text{const.}$

Beachte, dass hier $\tilde{\mathbf{f}}\boldsymbol{\mu}_\xi$ in der distributionellen Masse-Impuls-Gleichung (I3.4) die ‘‘allgemeine Kraftdichte’’ ist, aber auf der rechten Seite der gewöhnlichen Differentialgleichung (I3.5) $\tilde{\mathbf{f}}$ die ‘‘allgemeine Kraft’’ ist. (Hier sehen wir also, wie sich die Identität zwischen $\tilde{\mathbf{f}}$ und \mathbf{f} , die wir in II.3.8 mit Hilfe der Transformationsformeln herleiten, auf die gewöhnliche Differentialgleichung auswirkt.)

Beweis (1)⇒(2). Die erste Differentialgleichung in (I3.4), d.h. die Massenerhaltung, behandelt man wie in 2.9. Daraus ergibt sich die Gleichung $v(t, \xi(t)) = \dot{\xi}(t)$ und die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{m} = \mathbf{r}$. Für die zweite Gleichung gilt dann für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} & \left\langle \zeta, -\partial_t(mv\boldsymbol{\mu}_\xi) - \text{div}_x(mv v^T \boldsymbol{\mu}_\xi) + \tilde{\mathbf{f}}\boldsymbol{\mu}_\xi \right\rangle \\ &= \sum_k \left\langle \zeta_k, -\partial_t(mv_k\boldsymbol{\mu}_\xi) - \text{div}_x(mv_k v \boldsymbol{\mu}_\xi) + \tilde{\mathbf{f}}_k\boldsymbol{\mu}_\xi \right\rangle \\ &= \sum_k \left(\left\langle \partial_t \zeta_k, mv_k\boldsymbol{\mu}_\xi \right\rangle + \left\langle \nabla \zeta_k, mv_k v \boldsymbol{\mu}_\xi \right\rangle + \left\langle \zeta_k, \tilde{\mathbf{f}}_k\boldsymbol{\mu}_\xi \right\rangle \right) \\ &= \sum_k \int_{\mathbb{R}} m(t) v_k(t, \xi(t)) \underbrace{(\partial_t \zeta_k + v \bullet \nabla \zeta_k)(t, \xi(t))}_{= \dot{\xi}_k(t)} dt \\ & \quad + \sum_k \int_{\mathbb{R}} \zeta_k(t, \xi(t)) \tilde{\mathbf{f}}_k(t) dt \\ &= \sum_k \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{d}{dt}(m(t)\dot{\xi}_k(t)) + \tilde{\mathbf{f}}_k(t) \right) \zeta_k(t, \xi(t)) dt. \end{aligned}$$

Dies gilt für beliebige Testfunktionen und deshalb ist

$$\frac{d}{dt}(m(t)\dot{\xi}(t)) = \tilde{\mathbf{f}}(t). \quad (\text{I3.7})$$

Das ist die zweite gewöhnliche Differentialgleichung. \square

Beweis (3). Es ist

$$m\ddot{\xi} + \dot{m}\dot{\xi} = \left(m\dot{\xi}\right)' = \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{r}v = \mathbf{f} + \dot{m}\dot{\xi},$$

also $m\ddot{\xi} = \mathbf{f}$. □

Die Gleichung (I3.5) besagt also, wie Newton in seinen Principia schreibt, siehe Newton [118, Axiomata sive Leges Motus: Lex.II] oder Newton [119, Axioms, or the Laws of Motion: Law 2]¹⁷,

Zeitliche Änderung des Impulses = Allgemeine Kraft

und das ist bei sich ändernder Masse richtig. Es ist aber genauso richtig, dass Gleichung (I3.6) sagt

Masse \times Beschleunigung = Kraft

was auch bei sich ändernder Masse richtig ist. Die Newton'sche Physik ist also in den distributionellen Masse-Impuls Gleichungen enthalten.

Die distributionelle Masse-Impuls Gleichung ist auch nützlich bei zwei Massenpunkten, die sich zu einer Zeit t_0 treffen. Bei diesem Zusammenstoß kann vieles passieren. Wir betrachten hier die Situation, dass nach dem Stoß wieder zwei Massepartikel vorhanden sind, zum Zeitpunkt t_0 sonst keine Auswirkung in der Masse-Impuls Gleichung zu bemerken ist. Es können sich natürlich auch mehrere Massen nach dem Zusammenstoß bilden (siehe z.B. Abb. 9), was zu entsprechenden Formeln führt, oder es können sich noch Lichtblitze bilden. Wir verweisen auf III.6.5, wo die Gleichungen mit Energiebilanz betrachtet werden, und auf III.6.6, wo realitischere Situationen wie elastischer Stoß und plastische Kollision behandelt werden.

3.2 Kollision von Massenpunkten. Es seien zwei Massenpunkte wie in 2.9

$$t \mapsto \xi^\alpha(t) \in \mathbb{R}^n \text{ stetig, } \alpha = 1, 2,$$

gegeben, deren Trajektorien sich genau im Raumzeitpunkte (t_0, x_0) mit

$$x_0 = \xi^1(t_0) = \xi^2(t_0)$$

treffen. Wir bezeichnen die Distributionen μ_{ξ^α} wie in 2.8. Die Massen seien gegeben durch stetige beschränkte Funktionen $t \mapsto m^\alpha(t) > 0$ für $t \neq t_0$, also ist die distributionelle Gesamtmasse des Systems gegeben durch

$$\sum_{\alpha=1,2} m^\alpha \mu_{\xi^\alpha} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

¹⁷I. Bernard Cohen writes there in "A Guide to Newton's Principia": 'For example, in law 2, Newton writes that a "change in motion" is "proportional to the motive force". Here he means "change in the quantity of motion" or, in our terminology, change in momentum.'

Behauptung: Es mögen die Distributionsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\sum_{\alpha} m^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} m^{\alpha} v^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) &= 0, \\ \partial_t \left(\sum_{\alpha} m^{\alpha} v^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} m^{\alpha} v^{\alpha} v^{\alpha \Gamma} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) &= \sum_{\alpha} \mathbf{f}^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{I3.8})$$

gelten, wobei $v^{\alpha}(t, \xi(t)) := \dot{\xi}^{\alpha}(t)$ die Geschwindigkeiten sind, und es ist $\mathbf{f}^{\alpha} = \mathbf{f}^{\alpha}$. Die Ableitungen $\dot{\xi}^{\alpha}(t)$ für $t \neq t_0$ seien stückweise stetig bis in den Punkt t_0 hinein, ebenfalls die Vektorfelder \mathbf{f}^{α} . Es folgt

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} m^{\alpha} \ddot{\xi}^{\alpha} &= \mathbf{f}^{\alpha}, \\ m^{\alpha} \text{ lokal konstant in } t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für } t \neq t_0 \\ &\text{und } \alpha = 1, 2, \end{aligned} \\ m_{-}^1 + m_{-}^2 &= m_{+}^1 + m_{+}^2 \quad (\text{Massenerhalt in } t_0), \\ m_{-}^1 v_{-}^1 + m_{-}^2 v_{-}^2 &= m_{+}^1 v_{+}^1 + m_{+}^2 v_{+}^2 \quad (\text{Impulserhalt in } t_0), \end{aligned} \quad (\text{I3.9})$$

wobei

$$\begin{aligned} m_{-}^{\alpha} &:= \lim_{t \nearrow t_0} m^{\alpha}(t), & m_{+}^{\alpha} &:= \lim_{t \searrow t_0} m^{\alpha}(t) \\ v_{-}^{\alpha} &:= \lim_{t \nearrow t_0} v^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)), & v_{+}^{\alpha} &:= \lim_{t \searrow t_0} v^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)). \end{aligned}$$

Es wird hier also nicht beschrieben, was beim Zusammenstoß passiert, es wird aber eine Gesamtmassenbilanz und eine Gesamtimpulsebilanz aufgestellt unter der Maßgabe, dass als Ergebnis des Stoßes wieder nur zwei Partikel in der Welt sind.

Beweis. Außerhalb des Punktes (t_0, x_0) sind die Trajektorien ξ^{α} verschieden. Sei $t \neq t_0$. In einer kleinen Umgebung des Punktes $(t, \xi^{\alpha}(t))$ haben wir nur die α -Phase zu betrachten, d.h. in dieser Umgebung gilt

$$\begin{aligned} \partial_t (m^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}}) + \operatorname{div} (m^{\alpha} v^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}}) &= 0, \\ \partial_t (m^{\alpha} v^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}}) + \operatorname{div} (m^{\alpha} v^{\alpha} v^{\alpha \Gamma} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}}) &= \mathbf{f}^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Nach 3.1 und 2.9 folgt dann, dass m^{α} in diesem Bereich konstant ist, dass $v^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) = \dot{\xi}^{\alpha}(t)$ und dass $m^{\alpha} \ddot{\xi}^{\alpha}(t) = \mathbf{f}^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t))$ für $t \neq t_0$.

Wir haben also die Massen- und Impulsbilanz nahe dem Punkte (t_0, x_0) aufzustellen. Wir schreiben die Massenerhaltung und die Komponenten der Impulserhaltung von (I3.8) in einer Gleichung

$$\partial_t \left(\sum_{\alpha} g^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} g^{\alpha} v^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) = \sum_{\alpha} r^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}}$$

auf, wobei

$$\begin{aligned} g^{\alpha} &:= m^{\alpha}, \quad r^{\alpha} := 0 \quad \text{für die Massenerhaltung,} \\ g^{\alpha} &:= m^{\alpha} v_k^{\alpha}, \quad r^{\alpha} := \mathbf{f}_k^{\alpha}, \quad k = 1, \dots, n \quad \text{für die Impulserhaltung.} \end{aligned}$$

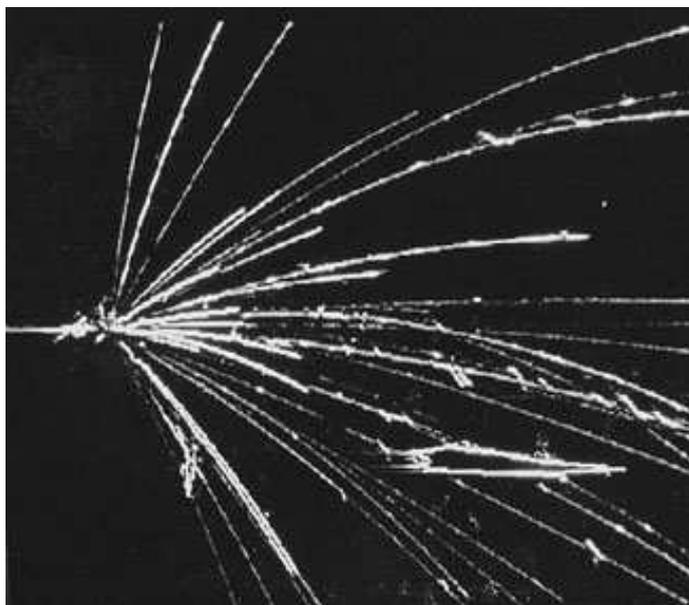


Abb. 9: “Particle tracks from the collision of an accelerated nucleus of a niobium atom with another niobium nucleus. The single line on the left is the track of the incoming projectile nucleus, and the other tracks are fragments from the collision.” (Courtesy of the Department of Physics and Astronomy, Michigan State University)

Indem wir jetzt Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ wählen, die Träger in einer Umgebung von (t_0, x_0) haben, berechnen wir

$$\begin{aligned}
 0 &= \left\langle \zeta, -\partial_t \left(\sum_{\alpha} g^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) - \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} g^{\alpha} v^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha} r^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right\rangle \\
 &= \left\langle \partial_t \zeta, \sum_{\alpha} g^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right\rangle + \left\langle \nabla \zeta, \sum_{\alpha} g^{\alpha} v^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right\rangle + \left\langle \zeta, \sum_{\alpha} r^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \right\rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} (\partial_t \zeta)(t, \xi^{\alpha}(t)) g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} (\nabla \zeta)(t, \xi^{\alpha}(t)) \bullet \underbrace{(g^{\alpha} v^{\alpha})(t, \xi^{\alpha}(t))}_{= g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) \dot{\xi}^{\alpha}(t)} dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} \zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) r^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) dt \right) \\
 &= \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} \left(\frac{d}{dt} (\zeta(t, \xi^{\alpha}(t))) g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) + \zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) r^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) \right) dt \\
 &\quad \text{(wir integrieren jetzt partiell)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} \zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) \left(-\frac{d}{dt}(g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t))) + r^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) \right) dt \\
&\quad + \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} \frac{d}{dt} \left(\zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) \right) dt \\
&\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{10em}} \\
&\qquad\qquad\qquad = \zeta(t_0, \xi^{\alpha}(t_0)) (g_{-}^{\alpha} - g_{+}^{\alpha}) \\
&\qquad\qquad\qquad = \zeta(t_0, x_0) (g_{-}^{\alpha} - g_{+}^{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} \zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) \left(-\frac{d}{dt}(g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t))) + r^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)) \right) dt \\
&\quad + \zeta(t_0, x_0) \sum_{\alpha} (g_{-}^{\alpha} - g_{+}^{\alpha}),
\end{aligned}$$

wobei

$$g_{-}^{\alpha} := \lim_{t \nearrow t_0} g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)), \quad g_{+}^{\alpha} := \lim_{t \searrow t_0} g^{\alpha}(t, \xi^{\alpha}(t)).$$

Da die Testfunktion ζ beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g^{\alpha}(t, \xi(t))) &= r^{\alpha}(t, \xi(t)) \text{ für } t \neq t_0 \text{ und } \alpha = 1, 2, \\
\sum_{\alpha} g_{-}^{\alpha} &= \sum_{\alpha} g_{+}^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt alle Gleichungen in (I3.9). □

Schwerkraft angewandt auf Himmelskörper

Wir betrachten nun das Newton'sche Gravitationsgesetz (I2.10)

$$\operatorname{div}(-\nabla[\phi]) = [\rho]$$

für die gesamte Massendichte ρ . Wir stellen uns die Frage, wie ϕ als Kraft auf die Impulserhaltung (I3.31)

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\
\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}
\end{aligned} \tag{I3.10}$$

wirkt. Es ist dies die Newton'sche Kraft(dichte), die für \mathbf{f} bedeutet

Newton's Kraftdichte:

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} \rho \nabla \phi$$

\mathbf{f} Kraftdichte,

(I3.11)

wobei hier angenommen wird, dass es die alleinige Kraft ist, im Allgemeinen können noch andere Kräfte wirksam sein. Die zugehörige Beschleunigung ist

$$a = \mathbf{g} \nabla \phi. \tag{I3.12}$$

Bemerkung: Im Falle $n = 3$ ist

$$\mathbf{g} = 4\pi G \quad \text{with} \quad G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \quad (\text{I3.13})$$

die *Gravitationskonstante* ist. Hier die Liste einiger Dimensionen:

$$\left\| \begin{array}{c} \phi \\ \nabla \phi \\ a, \mathbf{g} \nabla \phi \end{array} \right\| \begin{array}{c} \frac{kg}{m} \\ \frac{kg}{m^2} \\ \frac{m}{s^2} \end{array} \left\| \begin{array}{c} \text{div} \nabla \phi, \varrho \\ \partial_t \varrho \\ \varrho a, \mathbf{f}, \mathbf{g} \varrho \nabla \phi \end{array} \right\| \begin{array}{c} \frac{kg}{m^3} \\ \frac{kg}{m^3 s} \\ \frac{kg}{m^2 s^2} \end{array} \left\|$$

Dabei ist a eine Beschleunigung.

Wir denken uns nun die gesamte Massendichte ϱ aus disjunkten Teilmassen ϱ_α zusammengesetzt, etwa ein Teil des Himmels bestehend aus Sonnen und Planeten. Für das Gravitationspotential gilt dann wegen der Linearität des Gravitationsgesetzes

$$\varrho = \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha}, \quad \phi = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}, \quad \text{div}(-\nabla[\phi_{\alpha}]) = [\varrho_{\alpha}].$$

Da wir annehmen, dass die Teilmassen alle verschiedenen Träger haben, sagen wir disjunkte $D_{\alpha} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ für den α -Träger, können wir definieren

$$v = v_{\alpha} + u_{\alpha} \quad \text{und} \quad \Pi = \Pi_{\alpha} \quad \text{in } D_{\alpha},$$

wobei v_{α} die Bewegung des Himmelskörpers als Ganzes und u_{α} z.B. die lokale Rotationsbewegung ist. Es gilt damit nach (I3.10) für jedes α

$$\begin{aligned} \text{div}(-\nabla[\phi_{\alpha}]) &= [\varrho_{\alpha}], \\ \partial_t[\varrho_{\alpha}] + \text{div}[\varrho_{\alpha} v_{\alpha} + \varrho_{\alpha} u_{\alpha}] &= 0, \\ \partial_t[\varrho_{\alpha} v_{\alpha} + \varrho_{\alpha} u_{\alpha}] + \text{div}[\varrho_{\alpha} v_{\alpha} v_{\alpha}^T + \varrho_{\alpha} u_{\alpha} v_{\alpha}^T + \varrho_{\alpha} v_{\alpha} u_{\alpha}^T] & \\ &= \mathbf{g} \sum_{\beta} [\varrho_{\alpha} \nabla \phi_{\beta}] - \text{div}[\varrho_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}^T + \Pi_{\alpha}]. \end{aligned} \quad (\text{I3.14})$$

Wir lassen nun die Teilkörper gegen Punktmassen konvergieren, also konvergiert für alle α

$$\begin{aligned} [\varrho_{\alpha}] &\rightarrow m_{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi_{\alpha}} \quad \text{punktweise in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ v_{\alpha} &\text{ gleichmäßig in Raum und Zeit } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Weiter konvergiert dann

$$[\varrho_{\alpha} u_{\alpha}] \rightarrow 0 \quad \text{punktweise in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

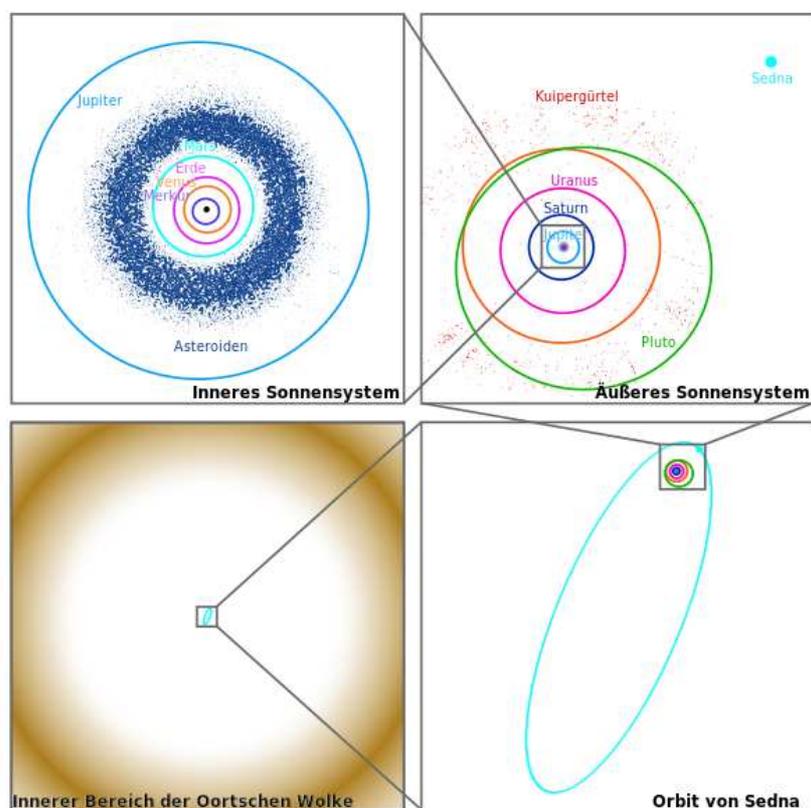


Abb. 10: “Die Umlaufbahnen der Objekte des Sonnensystems im Maßstab” aus [Wikipedia: Sonnensystem] (2-dimensionale Projektion)

Aber es gibt Probleme mit dem Term $\varrho_\alpha \nabla \phi_\alpha$, da hier beide Faktoren entarten, ϱ_α geht gegen einen Punkt und dort geht $\nabla \phi_\alpha$ gegen unendlich, es gibt also keinen einfachen Limes. Jedoch gilt in der hier gegebenen Situation, dass

$$\mathfrak{g}[\varrho_\alpha \nabla \phi_\alpha] - \operatorname{div}[\varrho_\alpha u_\alpha u_\alpha^T + \Pi_\alpha] \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \quad (\text{I3.15})$$

punktweise, d.h. für jede Testfunktion in $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Siehe dazu im stationären Fall 4.5 für Kugeln, IV.16.5 für rotierende inkompressible Planeten, und IV.16.3 für allgemeine Planeten. Es sei auch auf [21, Apropos Newton] hingewiesen. Setzen wir nun diese Resultate in (I3.14) ein, so lauten die Gleichungen im Limes

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-\nabla[\phi_\alpha]) &= m_\alpha \mu_{\xi_\alpha}, \\ \partial_t(m_\alpha \mu_{\xi_\alpha}) + \operatorname{div}(m_\alpha v_\alpha \mu_{\xi_\alpha}) &= 0, \\ \partial_t(m_\alpha v_\alpha \mu_{\xi_\alpha}) + \operatorname{div}(m_\alpha v_\alpha v_\alpha^T \mu_{\xi_\alpha}) &= \mathfrak{g} m_\alpha \left(\sum_{\beta: \beta \neq \alpha} \nabla \phi_\beta \right) \mu_{\xi_\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{I3.16})$$

Nach 3.1 sind diese Gleichungen äquivalent dazu, dass für alle α die Masse m_α konstant ist, dass $v_\alpha(t, \xi(t)) = \dot{\xi}(t)$ ist, und dass gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-\nabla[\phi_\alpha]) &= m_\alpha \mu_{\xi_\alpha}, \\ \ddot{\xi}_\alpha(t) &= \mathfrak{g} \sum_{\beta: \beta \neq \alpha} \nabla \phi_\beta(t, \xi_\alpha(t)). \end{aligned} \quad (\text{I3.17})$$

wobei wir die letzte Gleichung noch durch m_α dividiert haben. In diesem Zusammenhang sei auf [21, N -Körper Problem] verwiesen, wo der Einfluss von Planeten auf die Perihelbewegung mit der allgemeinen Formel (I3.17) numerisch gezeigt wird.

Bewegung eines einzelnen Planeten

Wir betrachten nun die Bewegung der Planeten um die Sonne, d.h. wir befinden uns im gemeinsamen Schwerpunkt 0 des Sonnensystems, also gilt

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \xi_{\alpha}(t) = 0,$$

und wir richten uns nach fernen Fixsternen aus. Das ist der Grund dafür, dass (I3.11) keine weiteren Kräfte aufwies. Die Sonne hat 99.86% der Ge-



Abb. 11: “Fotomontage zum Größenvergleich zwischen Erde (links) und Sonne. Das Kerngebiet (Umbra) des großen Sonnenflecks hat etwa 5-fachen Erddurchmesser” aus [Wikipedia: Sonne]

samtmasse des Sonnensystems (siehe auch Abb. 11), also ist $m_\alpha \ll m_0$, wenn m_0 die Masse der Sonne bezeichnet und m_α , $\alpha \neq 0$, die der Planeten. Also werden die Terme mit Planetenmassen in der Gravitationsgleichung nicht berücksichtigt, d.h. wir setzen formal $m_\alpha = 0$ für $\alpha \neq 0$. Dann folgt aus obiger Schwerpunktgleichung $\xi_0(t) = 0$, und in der ersten Gleichung in (I3.17) wird $\nabla \phi_\beta = 0$ für $\beta \neq 0$ gesetzt, somit sind die Bewegungen der Planeten in der Näherung, die hier gemacht wird, voneinander unabhängig, was der täglichen Beobachtung der Bewegung schon sehr nahe kommt. Dass dies nicht besonders realistisch ist, wird in [21, N -Körper Problem]

gezeigt. Also sind die Differentialgleichungen in (I3.17) approximiert durch

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-\nabla[\phi_0]) &= m_0 \boldsymbol{\mu}_0, \\ \ddot{\xi}_\alpha(t) &= \mathbf{g} \nabla \phi_0(t, \xi_\alpha(t)) \quad \text{für jedes } \alpha. \end{aligned} \quad (\text{I3.18})$$

Der Planet bewegt sich also mit $t \mapsto \xi_\alpha(t)$ in einem zentralen Gravitationsfeld. In der hier folgenden Aussage ist das Potential der Sonne ϕ_0 und die Bewegung des Planeten ξ_α ohne Index bezeichnet.

3.3 Kepler'sche Bewegung. Die Masse der Sonne m_0 werde in einem Punkt konzentriert, und zwar in $\{0\}$. Der Planet ist als Punkt $\{\xi(t)\}$ zur Zeit t und Masse m modelliert und erfüllt

$$m\ddot{\xi} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f}(t) = m\mathbf{g}\nabla\phi(t, \xi(t)), \quad (\text{I3.19})$$

wobei ϕ das Gravitationspotential der Sonne ist, gegeben durch

$$\operatorname{div}(-\nabla[\phi]) = m_0 \boldsymbol{\mu}_0. \quad (\text{I3.20})$$

Es sei vorausgesetzt, dass $\xi(t) \neq 0$. Dann gelten (bis auf Ausnahmen von eindimensionalen Bewegungen in positiver oder negativer Richtung zur Sonne) die Gleichungen der Kepler'schen Bewegung, d.h. die Bewegung liegt in einer von einem orthonormalen System $\{e_1, e_2\}$ aufgespannten Ebene mit der Darstellung

$$\xi(t) = r(\varphi(t))(\cos \varphi(t) e_1 + \sin \varphi(t) e_2)$$

und

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{d}{r(\varphi)^2}, \quad d^2 = p G m_0 > 0. \end{aligned}$$

Die unabhängigen Größen sind also $p > 0$ und e . Ist $|e| < 1$ macht der Planet eine periodische Bewegung. Siehe dazu Aufgabe 7.17.

Beweis. Wir haben das Differentialgleichungssystem (I3.18) zu lösen. Die erste Gleichung davon ist (I3.20) und die Lösung ist mit der Randbedingung $\phi(t, x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ gegeben durch

$$\phi(t, x) = \frac{m_0}{4\pi|x|} \quad \text{also} \quad \nabla\phi(t, x) = -\frac{m_0}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}.$$

Die zweite Gleichung ist (I3.19)

$$\ddot{\xi}(t) = \mathbf{g}\nabla\phi(t, \xi(t)),$$

d.h. es gilt mit $\mathbf{g} = 4\pi G$

$$\ddot{\xi}(t) = -Gm_0 \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|^3}. \quad (\text{I3.21})$$

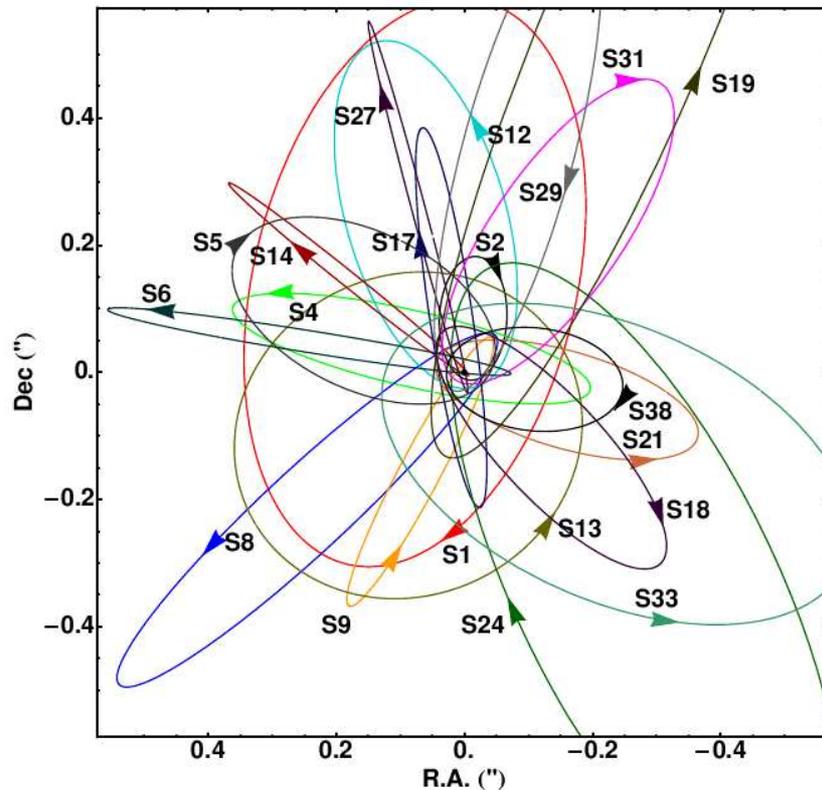


Abb. 12: “Elliptical orbits of stars at the galactic center. The massive black hole is at coordinate (0,0). Star S2 has an orbital period of about 15 years” from Department of Physics and Astronomy (California State L.A.). See also Abb. 14.

Es ist $\xi(t)$ Nichtnull nach Voraussetzung. Aus der Differentialgleichung folgt, dass $\dot{\xi}(t)$ höchstens Null zu endlich vielen Zeiten sein kann. Also können wir annehmen, dass $\xi(0) \neq 0$ und $\dot{\xi}(0) \neq 0$.

1. Schritt. Wir zeigen, dass wir nur den zweidimensionalen Fall behandeln müssen. Wie bezeichnen dazu mit H den Unterraum, der 0 , $\xi(0)$ und $\dot{\xi}(0)$ enthält. Wir zerlegen

$$\xi(t) = \underbrace{x(t)}_{\in H} + \underbrace{y(t)}_{\in H^\perp} .$$

Dann erfüllt y die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = -Gm_0 \frac{y(t)}{|\xi(t)|^3}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

(im Nenner steht $|\xi(t)|^3$). Wegen der homogenen Anfangsbedingung an y folgt aus der linearen Differentialgleichung $y = 0$. Also ist $\xi(t) \in H$. Nun

also

$$\frac{d}{dt}(\log |\dot{\varphi}| + 2\log r(\varphi)) = 0,$$

weshalb mit einer Konstanten $d \neq 0$

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{r(\varphi)^2}. \quad (\text{I3.23})$$

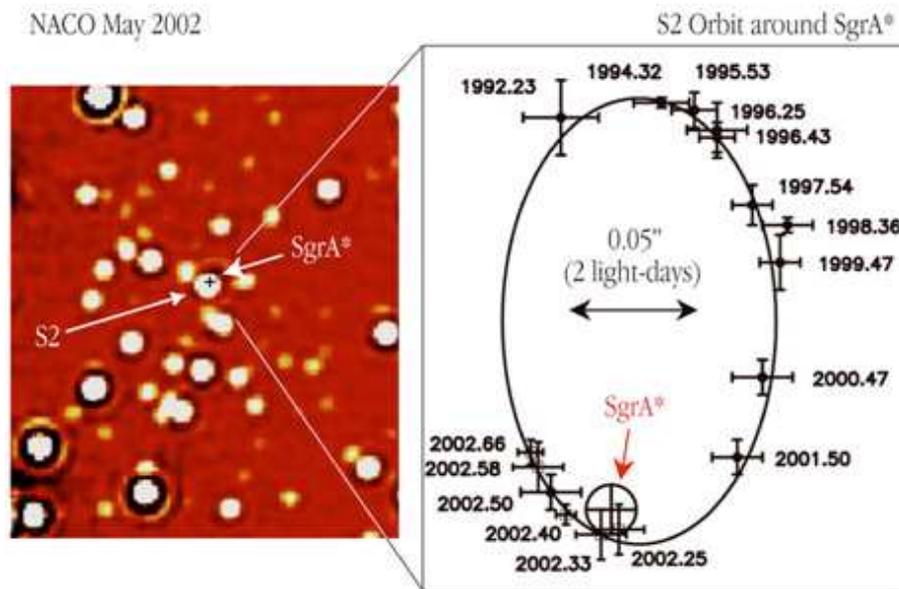


Abb. 14: “Left: An image of Sgr A* and S2 from the 8.2m VLT YEPUN telescope at the ESO Paranal Observatory. Right: The orbit of S2 around Sgr A*, highlighting the last close encounter, in 2002” from ESO. “The next encounter of S2 with Sgr A* will occur in 2018” from www.chandra.si.edu Chandra X-Ray Observatory. Siehe auch Abb. 12.

4. Schritt. Lösung der zweiten Gleichung in (I3.22).

Wir bekommen aus (I3.23)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2d}{r(\varphi)^3} r'_{\varphi}(\varphi) \dot{\varphi} = -\frac{2r'_{\varphi}}{r} \dot{\varphi}^2$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir

$$-\frac{c^2}{r^2} = \ddot{\varphi} r'_{\varphi} + \dot{\varphi}^2 (r'_{\varphi\varphi} - r) = \dot{\varphi}^2 \left(-\frac{2r'_{\varphi}}{r} + r'_{\varphi\varphi} - r \right),$$

das heißt mit (I3.23)

$$-\frac{c^2}{d^2} r^2 = r'_{\varphi\varphi} - \frac{2r'_{\varphi}}{r} - r. \quad (\text{I3.24})$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$. Setzen wir nun mit $p \neq 0$ und $e \in \mathbb{R}$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi}, \quad (\text{I3.25})$$

so ist

$$\begin{aligned} r'_{\varphi} &= \frac{p e \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{e \sin \varphi}{p} r^2 \\ r'_{\varphi\varphi} &= \frac{e \cos \varphi}{p} r^2 + \frac{2e \sin \varphi}{p} r r'_{\varphi} \\ &= \left(\frac{p}{r} - 1\right) \frac{r^2}{p} + \frac{2e^2 \sin^2 \varphi}{p^2} r^3 \\ &= r - \frac{r^2}{p} + \frac{2e^2 \sin^2 \varphi}{p^2} r^3 = r - \frac{r^2}{p} + \frac{2r^2_{\varphi}}{r} \end{aligned}$$

und damit wird (I3.24) zu

$$-\frac{c^2}{d^2} r^2 = r'_{\varphi\varphi} - \frac{2r^2_{\varphi}}{r} - r = -\frac{r^2}{p}.$$

Das ist äquivalent zu der Bedingung

$$p = \frac{d^2}{c^2}. \quad (\text{I3.26})$$

Die Gleichungen (I3.23), (I3.25) und (I3.26) sind die Kepler Bewegung (siehe [21, Die Kepler'schen Gesetze]). \square

Sogar im Zentrum der Milchstrasse ist die Bewegung der Sterne um das Zentrum ("Schwarzes Loch", SgrA*) nahe einer Kepler Bewegung, wie Abb. 12 und Abb. 14 zeigt. Eine Abweichung davon ist wie bei den Planeten des Sonnensystems (insbesondere die Bewegung des Merkur) eine Perihelbewegung, verursacht durch die Gravitation der übrigen Planeten (siehe [21, N -Körper Problem]). Die Bestimmung der Position der Sterne von Aufnahmen derselben ist nichttrivial, die Schritte, die dabei gebraucht werden, sind in Gillissen et. al. [43] dargestellt, see also [44], wo auch eine Abschätzung der Masse von SgrA* gegeben wird.

Kollektion von Massenpunkten

Wir betrachten nun eine Kollektion von Massenpunkten, auf die gegenseitige Kräfte wirken. Wir erhalten so in der distributionellen Impulsbilanz eine Matrix Π , das heißt, die Kräfte haben zum Teil eine Gestalt, welche es erlaubt, sie unter der Divergenz auszudrücken (siehe [16, 2.2 und 2.4] und [19, section 7]).

3.4 Mehrere Massenpunkte. Wir betrachten N Massenpunkte mit Masse $m_\alpha > 0$ und Ort $t \mapsto \xi^\alpha(t)$ für $\alpha = 1, \dots, N$. Sie mögen die gewöhnliche Differentialgleichungen

$$m_\alpha \ddot{\xi}^\alpha(t) = - \sum_{\beta: \beta \neq \alpha} F_{\alpha\beta}(\xi^\alpha(t) - \xi^\beta(t)) + f_\alpha(t) \quad (\text{I3.27})$$

in t erfüllen, wobei $F_{\alpha\beta}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $\alpha \neq \beta$ Abbildungen sind mit

$$F_{\alpha\beta}(-z) = -F_{\beta\alpha}(z). \quad (\text{I3.28})$$

Wir betrachten einen t -Bereich, in dem sich die Massenpunkte nicht treffen (siehe dazu **EX:Kollektion von Massenpunkten**). Mit den Geschwindigkeiten $v_\alpha(t, \xi^\alpha(t)) = \dot{\xi}^\alpha(t)$ gelten dann die Massen- und Impulsbilanz

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) + \operatorname{div}_x \left(\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) &= 0, \\ \partial_t \left(\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) + \operatorname{div}_x \left(\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha v_\alpha^\top \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) & \\ - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta: \alpha \neq \beta} F_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi^\beta) (\xi^\alpha - \xi^\beta)^\top \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha, \xi^\beta} &= \sum_\alpha f_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{I3.29})$$

Here the distributions $\boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}$ and $\boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha, \xi^\beta}$ are given for test functions ζ by

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi^\alpha(t)) dt \quad (\text{as in 2.8}), \\ \langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha, \xi^\beta} \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \zeta(t, (1-s)\xi^\alpha(t) + s\xi^\beta(t)) ds dt. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass der Kraftterm

$$\mathbf{f}^\alpha := - \sum_{\beta: \beta \neq \alpha} F_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi^\beta) + f_\alpha$$

in der gewöhnlichen Differentialgleichung $m_\alpha \ddot{\xi}^\alpha = \mathbf{f}^\alpha$ einen Term besitzt, der als “interner” Term

$$- \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta: \alpha \neq \beta} F_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi^\beta) (\xi^\alpha - \xi^\beta)^\top \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha, \xi^\beta}$$

unter den Flussterm in der Impulserhaltung geschrieben werden kann. Deshalb bezeichnen wir den Anteil

$$\sum_{\beta: \beta \neq \alpha} F_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi^\beta)$$

der Kraftdichte auch als “interne Kraftdichte”.

Beweis. Für jeden einzelnen Massenpunkt ist die Masse m_α konstant und

$$m_\alpha \ddot{\xi}^\alpha = \mathbf{f}^\alpha := - \sum_{\beta: \beta \neq \alpha} F_{\alpha\beta} (\xi^\alpha - \xi^\beta) + f_\alpha.$$

Daher folgt wie in 3.1, dass dies äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \partial_t(m_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}) + \operatorname{div}_x(m_\alpha v_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}) &= 0, \\ \partial_t(m_\alpha v_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}) + \operatorname{div}_x(m_\alpha v_\alpha v_\alpha^\top \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}) &= \mathbf{f}^\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}. \end{aligned}$$

Indem wir die Summe bilden, folgt daraus natürlich

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) + \operatorname{div}_x \left(\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) &= 0, \\ \partial_t \left(\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) + \operatorname{div}_x \left(\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha v_\alpha^\top \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \right) &= \sum_\alpha \mathbf{f}^\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}. \end{aligned}$$

Es bleibt also der Kraftterm umzuschreiben. (Diese Manipulation ist in der Literatur nicht so offensichtlich.) Nun gilt

$$\sum_\alpha \mathbf{f}^\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} = - \sum_\alpha F_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} + \sum_\alpha f_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha}$$

wobei

$$F_\alpha := \sum_{\beta: \beta \neq \alpha} F_{\alpha\beta} (\xi^\alpha - \xi^\beta).$$

We show that the F_α -expressions can be written as term under the divergence, hence we call it an “internal force” term. Thus we have to show that for $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \langle \zeta, F_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha} \rangle &= \langle D\zeta, M \rangle = - \langle \zeta, \operatorname{div}_x M \rangle, \\ M &:= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta: \alpha \neq \beta} F_{\alpha\beta} (\xi^\alpha - \xi^\beta) (\xi^\alpha - \xi^\beta)^\top \boldsymbol{\mu}_{\xi^\alpha, \xi^\beta}. \end{aligned} \tag{I3.30}$$

To prove this, we let $\tilde{F}_{\alpha\alpha} := 0$ and $\tilde{F}_{\alpha\beta} := F_{\alpha\beta} (\xi^\alpha - \xi^\beta)$ for $\alpha \neq \beta$, so that by assumption (I3.28)

$$F_{\alpha\beta} (\xi^\alpha - \xi^\beta) = -F_{\beta\alpha} (\xi^\beta - \xi^\alpha) \text{ for } \alpha \neq \beta,$$

or $\tilde{F}_{\alpha\beta} = -\tilde{F}_{\beta\alpha}$ for all α and β . Thus we obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} \langle \zeta, F_{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \rangle &= \sum_{\alpha, \beta} \langle \zeta, \tilde{F}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}} \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) \bullet \tilde{F}_{\alpha\beta}(t) dt \\
&= \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(\zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) \bullet \tilde{F}_{\alpha\beta}(t) + \zeta(t, \xi^{\beta}(t)) \bullet \tilde{F}_{\beta\alpha}(t) \right) dt \\
&= \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(\zeta(t, \xi^{\alpha}(t)) - \zeta(t, \xi^{\beta}(t)) \right) \bullet \tilde{F}_{\alpha\beta}(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \left(D\zeta(t, (1-s)\xi^{\beta}(t) + s\xi^{\alpha}(t)) (\xi^{\alpha}(t) - \xi^{\beta}(t)) \right) \bullet \tilde{F}_{\alpha\beta}(t) ds dt \\
&\quad \text{(da } (Dz_1) \bullet z_2 = D \bullet (z_2 z_1^T), D \text{ Matrix, } z_1, z_2 \text{ Vektoren)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 D\zeta(t, (1-s)\xi^{\beta}(t) + s\xi^{\alpha}(t)) \bullet (\tilde{F}_{\alpha\beta}(t) (\xi^{\alpha}(t) - \xi^{\beta}(t))^T) ds dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left\langle D\zeta, \tilde{F}_{\alpha\beta} (\xi^{\alpha} - \xi^{\beta})^T \boldsymbol{\mu}_{\xi^{\alpha}, \xi^{\beta}} \right\rangle = \langle D\zeta, M \rangle \\
&= \sum_{j,k} \langle \partial_j \zeta_k, M_{kj} \rangle = - \sum_{j,k} \langle \zeta_k, \partial_j M_{kj} \rangle = - \langle \zeta, \operatorname{div}_x M \rangle .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Hence we have seen, that the mass and momentum conservation plays an essential role even for models with particles. We have also seen how Newton's mechanics, if it is interpreted using distributions, is part of continuum mechanics.

Impuls von Flüssigkeiten

Wir kommen nun zurück auf das allgemeine System von Erhaltungsgleichungen, die Massen- und Impulserhaltung in (I3.1). Ist wieder ϱ die Gesamtmasse, wird gewöhnlich $\mathbf{J} = 0$ und $\mathbf{r} = 0$ gesetzt, die "allgemeine Kraftdichte" $\tilde{\mathbf{f}}$ wird dann zur "Kraftdichte" \mathbf{f} (siehe (I3.2) und zur Definition der Masse-Impuls Gleichung den Abschnitt II.3). Die Differentialgleichungen sind dann

(Spezielle) Masse-Impuls-Erhaltung:

$$\begin{aligned}
\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\
\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}
\end{aligned}$$

(I3.31)

ϱ Massendichte, v Geschwindigkeit,
 $\Pi = (\Pi_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ Drucktensor,
 $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_i)_{i=1,\dots,n}$ Kraftdichte.

Es ist entscheidend für diese Masse-Impuls Bilanz, wie der Drucktensor Π definiert wird, vergleiche zum Beispiel die distributionelle Darstellung in (I3.29), in der sich der Drucktensor auch aus zwischen den Molekülen wirkenden Kräften bestimmt. Wir wollen nun hier die Bewegung von Flüssigkeiten modellieren (bei einer einzigen Flüssigkeit ist in der Regel keine distributionelle Formulierung des Masse-Impuls-Gesetzes erforderlich), wobei jetzt $\Pi = p\text{Id} - S$ gesetzt wird mit einem Druck p und einem Spannungstensor S , der linear in $(Dv)^S$ angenommen wird. (Diese Eigenschaften werden wir in Kapitel II noch herleiten, auch die in (I3.32) gemachten Vorzeichenregeln folgen aus dem in Kapitel III geforderten Entropieprinzip.) Der Kraftterm \mathbf{f} ist jetzt meistens eine äußere Kraft. Wir erhalten

(Kompressible) Navier-Stokes Gleichungen:

$$\partial_t \varrho + \text{div}(\varrho v) = 0 ,$$

$$\partial_t(\varrho v) + \text{div}(\varrho v v^T + \Pi) = \mathbf{f} ,$$

$$\Pi = p\text{Id} - S \text{ der Drucktensor, } p \text{ Druck,}$$

$$S = a(Dv + (Dv)^T) + b(\text{div}v)\text{Id}$$

$$= 2a(Dv)^S + b(\text{div}v)\text{Id} \quad \text{Spannungstensor,}$$

$$a > 0 \text{ und } b + \frac{2a}{n} \geq 0 \quad \text{Zähigkeitskoeffizienten,}$$

$$\mathbf{f} \text{ Kraftdichte, } (\text{sometimes } a = \mu, b = \lambda \text{ }^{18})$$

(I3.32)

Es sei gesagt, dass in wir II.4.12 die Notwendigkeit der Darstellungen von Π und S , so wie sie hier beschrieben sind, zeigen werden. Es sei bemerkt, dass

$$\begin{aligned} S &= 2a(Dv)^S + b(\text{div}v)\text{Id} \\ &= 2a \left(\underbrace{(Dv)^S - \frac{1}{n} \text{div}(v)\text{Id}}_{\text{spurfrei}} \right) + \left(b + \frac{2a}{n} \right) \text{div}(v)\text{Id}, \end{aligned}$$

was die Positivität der Koeffizienten erläutert. Die Positivität wird erst später bei der Darstellung der Entropie bewiesen (siehe z.B. III.2.5). Der Druck p hängt unter anderem von ϱ ab, falls es sich um eine kompressible

¹⁸ Lamé hat seine Koeffizienten in der Elastizitätstheorie eingeführt. Mathematiker benutzen dies auch in den Flüssigkeitsgleichungen aufgrund der Analogie der Terme, siehe [Wikipedia: Lamé-Konstanten]: “In den Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungslehre wird für die dynamische Scherviskosität häufig das Symbol μ der zweiten Lamé-Konstanten verwendet und für die Volumenviskosität unter Umständen das Symbol λ der ersten Lamé-Konstanten. Diese Viskositäten sind jedoch nicht mit den obigen Lamé-Konstanten zu verwechseln, welche Elastizitätsmaße eines Festkörpers repräsentieren.”

Flüssigkeit handelt (siehe auch Abschnitt IV.2). Oft wird die Navier-Stokes Gleichung auch in anderer Form geschrieben. Es gilt allgemein

$$\begin{aligned} & \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T) \\ &= \underbrace{(\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v))}_{=0} v + \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v), \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{div} \Pi = \operatorname{div}(p \operatorname{Id} - S) = \nabla p - \operatorname{div} S.$$

Also sind die (kompressiblen) Navier-Stokes-Gleichungen äquivalent zu

(Kompressible) Navier-Stokes Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \nabla p - \operatorname{div} S &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

(I3.33)

p Druck (ggf. eine Funktion von ϱ),

$S = a(Dv + (Dv)^T) + b(\operatorname{div} v) \operatorname{Id}$,

\mathbf{f} Kraftdichte, für andere Größen siehe (I3.32).

Wir testen die Gleichungen an einer Zentrifuge.

3.5 Zentrifuge. Wir modellieren eine *Zentrifuge* durch ein unendlich langes Rohr in \mathbb{R}^n , $n = 3$, etwa $Z := \{x \in \mathbb{R}^3; |(x_1, x_2)| < R\}$ und wir bezeichnen mit r den Abstand von der Achse $r = |(x_1, x_2)| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Wir interessieren uns für *stationäre Lösungen*, d.h. solche, die nicht von der Zeitvariablen abhängen.¹⁹ Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \varrho = \varrho(r), \quad p = p(r), \quad \mathbf{f} = 0, \\ v(x) = \omega \cdot (-x_2, x_1, 0). \end{aligned} \tag{I3.34}$$

Dann ist die kompressible Navier-Stokes-Gleichung (siehe (I3.33)) im stationären Fall äquivalent zu der Differentialgleichung

$$\partial_r p = \omega^2 r \varrho. \tag{I3.35}$$

Das heißt, dass der Druck mit dem Radius r ansteigt. Hier schaut der Beobachter von außen der rotierenden Zentrifuge zu. Dreht sich der Beobachter mit der rotierenden Flüssigkeit und schreibt er die Situation in seinen Koordinaten auf, muss er die gleiche Physik beschreiben, d.h. für ihn muss ebenfalls der Druck mit dem Radius ansteigen. Dass dem wirklich so ist, wird in Beispiel II.3.10 nachgerechnet.

¹⁹Diese Definition gilt für die gesamte Vorlesung.

Beweis. Die Gleichungen (I3.33) sind im stationären Fall

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \varrho v \bullet \nabla v + \nabla p - \operatorname{div} S &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I3.36})$$

Nun ist

$$v = \omega \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{also} \quad Dv = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

und damit $(Dv)^S = 0$ also auch $\operatorname{div} v = 0$, daher $S = 0$. Außerdem gilt

$$\nabla(p(r)) = \partial_r p \nabla r = \frac{\partial_r p}{r} (x_1, x_2, 0).$$

Es folgt, mit derselben Rechnung für $\nabla(\varrho(r))$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varrho v) &= \varrho \operatorname{div} v + (\nabla \varrho) \bullet v \\ &= \omega \frac{\partial_r \varrho}{r} (x_1, x_2, 0) \bullet (-x_2, x_1, 0) = 0 \end{aligned}$$

und die Impulserhaltung wird

$$\varrho v \bullet \nabla v + \nabla p = 0.$$

Es ist ²⁰

$$\begin{aligned} \varrho v \bullet \nabla v &= \sum_{i=1}^3 \varrho v_i \partial_{x_i} v \\ &= \varrho \omega^2 (-x_2 \mathbf{e}_2 - x_1 \mathbf{e}_1) = -\varrho \omega^2 (x_1, x_2, 0), \end{aligned}$$

also insgesamt

$$0 = \varrho v \bullet \nabla v + \nabla p = \left(-\varrho \omega^2 + \frac{\partial_r p}{r}\right) (x_1, x_2, 0),$$

somit

$$\frac{1}{r} \partial_r p = \omega^2 \varrho.$$

□

3.6 Verschiedene Materialien. Wir diskutieren verschiedene konstitutive Beziehungen für p und deren Auswirkung in (I3.35).

(1) Es sei $\varrho = \text{const} > 0$ und p eine freie Variable. Dann folgt aus (I3.35)

$$p = \frac{\omega^2 \varrho}{2} r^2 + \text{const.}$$

²⁰Es ist $\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j=1, \dots, n}$ der i -te Basisvektor des \mathbb{R}^n .

(2) Es sei $p = c\varrho^\gamma$ mit $\gamma > 1$. Dann lautet (I3.35)

$$\varrho = \left(\frac{(\gamma - 1)\omega^2}{2c\gamma} r^2 + \text{const} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

(3) Es sei $p = c\varrho$. Dann lautet (I3.35)

$$\varrho = \exp \left(\frac{\omega^2}{2c} r^2 + \text{const} \right).$$

(4) Es sei $p = \varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho)$ mit einer gegebenen Funktion f . Dann lautet (I3.35)

$$f'_{\varrho}(\varrho) = \frac{\omega^2}{2} r^2 + \text{const}.$$

(5) Es sei $p = c_0 + c_1\varrho + c_2\varrho^\gamma$ mit $\gamma > 1$, also ist p wie in (4) wenn

$$f(\varrho) = c_1\varrho(\log \varrho - 1) + \frac{c_2}{\gamma - 1}\varrho^\gamma + \text{const} \cdot \varrho - c_0.$$

Also ist (I3.35) äquivalent zur Formel in (4).

Remark: Die Funktion f ist die "innere freie Energie", siehe Abschnitt III.5. Bemerke, dass f eine konvexe Funktion von $\varrho > 0$ ist, also f'_{ϱ} monoton wachsend. Zu konstitutiven Funktionen siehe auch [39, 1.3.2 and 1.4].

Beweis (1). Dies folgt durch Integration von (I3.35). □

Beweis (2). Es ist

$$\omega^2 r = \frac{c}{\varrho} \partial_r (\varrho^\gamma) = c\gamma \varrho^{\gamma-2} \partial_r \varrho = \partial_r (h(\varrho)),$$

wenn

$$h'_{\varrho}(\varrho) = c\gamma \varrho^{\gamma-2} \quad \text{also} \quad h(\varrho) = c \frac{\gamma}{\gamma-1} \varrho^{\gamma-1} + \text{const},$$

somit

$$\partial_r \left(h(\varrho) - \frac{\omega^2}{2} r^2 \right) = 0,$$

das heißt

$$\frac{c\gamma}{\gamma-1} \varrho^{\gamma-1} + \text{const} = h(\varrho) = \frac{\omega^2}{2} r^2 + \text{const}.$$

Daraus folgt das Resultat. □

Beweis (3). Es ist

$$\omega^2 r = \frac{c}{\varrho} \partial_r \varrho = c \partial_r (\log \varrho)$$

und daher

$$\partial_r \left(c \log \varrho - \frac{\omega^2}{2} r^2 \right) = 0,$$

das heißt

$$\log \varrho = \frac{\omega^2}{2c} r^2 + \text{const.}$$

□

Beweis (4). Es ist $p'_{\varrho} = \varrho f'_{\varrho\varrho}$, daher

$$\partial_r p = p'_{\varrho} \partial_r \varrho = \varrho f'_{\varrho\varrho}(\varrho) \partial_r \varrho$$

und da $\partial_r p = \omega^2 r \varrho$

$$f'_{\varrho\varrho}(\varrho) \partial_r \varrho = \omega^2 r,$$

das heißt

$$\partial_r \left(f'_{\varrho\varrho}(\varrho) - \frac{\omega^2}{2} r^2 \right) = 0,$$

und daraus folgt die Behauptung.

□

Beweis (5). Es ist

$$f'_{\varrho}(\varrho) = c_1 \log \varrho + \frac{c_2 \gamma}{\gamma - 1} \varrho^{\gamma-1} + \text{const}$$

und daher

$$\varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho) = c_0 + c_1 \varrho + c_2 \varrho^{\gamma} = p.$$

Also ist p wie in (4).

□

Inkompressible Flüssigkeiten

In vielen Beispielen wird angenommen, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist, d.h. $\varrho = \varrho_0 = \text{const} > 0$ gilt. In diesem Fall wird die Massenerhaltung zu

$$0 = \partial_t \varrho + \text{div}(\varrho v) = \varrho_0 \text{div} v,$$

also ist $\text{div} v = 0$ und es gilt, mit $(Dv)^S = \frac{1}{2}(Dv + (Dv)^T)$,

$$S = 2a(Dv)^S + b \underbrace{\text{div} v \text{ Id}}_{=0} = 2a(Dv)^S.$$

Damit erhalten wir für die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen aus (I3.33)

Inkompressible Navier-Stokes Gleichung:

$$\operatorname{div} v = 0 ,$$

$$\varrho_0(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \nabla p - \operatorname{div} S = \mathbf{f}$$

(I3.37)

$\varrho_0 > 0$ konstant, v Geschwindigkeit, p Druck,

$S = a(Dv + (Dv)^T) = 2a(Dv)^S$ Spannungstensor,

$a > 0$ Zähigkeitskoeffizient, \mathbf{f} Kraftdichte.

Wenn zusätzlich $a = \text{const}$, dann ist

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{div}((Dv)^S) &= \left(\sum_{j=1}^n \partial_j (\partial_j v_k + \partial_k v_j) \right)_{k=1, \dots, n} \\ &= \Delta v + \left(\sum_{j=1}^n \partial_k \partial_j v_j \right)_{k=1, \dots, n} = \Delta v + \nabla(\operatorname{div} v) , \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{div} S = \operatorname{div}(2a(Dv)^S) = 2a \operatorname{div}((Dv)^S) = a \Delta v .$$

Somit ist, wenn $a = \text{const}$ ist, (I3.37) äquivalent zu

Spezielle Navier-Stokes Gleichung:

$$\operatorname{div} v = 0 ,$$

$$\varrho_0(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \nabla p - a \Delta v = \mathbf{f}$$

(I3.38)

quantities as in (I3.37),

$a = \text{const} > 0$ Zähigkeitskoeffizient.

In dieser Version wird die Navier-Stokes Gleichung oft angegeben.

Wir geben nun die Poiseuille Strömung als Beispiel für eine inkompressible zähe Strömung an (siehe auch [8, 5.1 Laminare Rohrströmung], wo beliebige Rohrquerschnitte behandelt werden).

3.7 Poiseuille-Strömung durch ein Rohr. Das Rohr ist gegeben durch

$$D := \{x \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R\} .$$

Wir betrachten die stationäre inkompressible Navier-Stokes Gleichung ohne äußere Kraft, d.h. $\mathbf{f} = 0$. Die Gleichungen lauten dann

$$\operatorname{div} v = 0 ,$$

$$\varrho v \bullet \nabla v + \operatorname{div} \Pi = 0 , \quad (\text{I3.39})$$

$$\Pi = p \operatorname{Id} - S$$

in D , mit Druck und Spannungstensor wie in (I3.38). Wir betrachten Strömungen mit konstanter Viskosität, also $a = \text{const}$, und der Randbedingung

$$v = 0 \text{ auf } \partial D. \quad (\text{I3.40})$$

Eine stationäre Lösung der Massen- und Impulserhaltung mit dieser Randbedingung ist gegeben durch

$$v(x) = \frac{c}{4} \cdot (R^2 - (x_1^2 + x_2^2)) \mathbf{e}_3,$$

$$p(x) = -cax_3 + \text{const},$$

wobei c eine Konstante ist und a der konstante Viskositätskoeffizient.

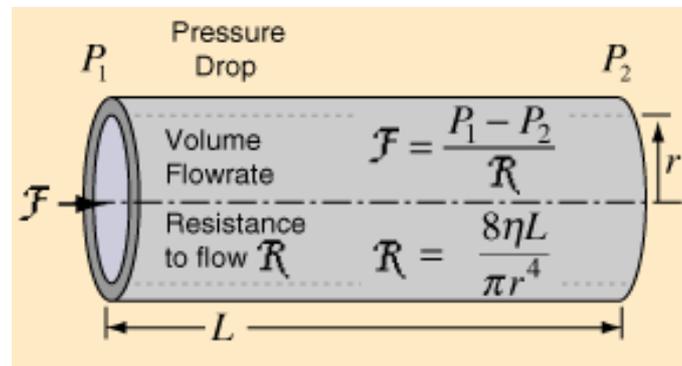


Abb. 15: Aus [hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/ppois.html]

Ist also $a > 0$ und strömt die Flüssigkeit in Richtung \mathbf{e}_3 , d.h. $c > 0$, so fällt der Druck p in Strömungsrichtung. Also muss bei einem langen Rohr die Flüssigkeit mit hohem Druck eingeführt werden, um eine stationäre Strömung zu erreichen.

Beweis. Sei (v, p) eine Lösung von (I3.39) in D mit der Randbedingung (I3.40), und für die wir die Darstellung

$$v(x) = v_3(x_1, x_2) \mathbf{e}_3$$

annehmen. Dann gilt

$$\text{div } v = \partial_{x_3} v_3 = 0,$$

also ist für die Massenerhaltung wegen $\varrho = \text{const}$

$$\text{div}(\varrho v) = \varrho \text{div } v = 0.$$

Es folgt weiter $S = 2a(Dv)^S$, d.h. der Divergenzterm von S verschwindet, und daher gilt für die Impulserhaltung, da $a = \text{const}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho v \bullet \nabla v + \nabla p - \text{div } S \\ &= \underbrace{\varrho v_3 \partial_{x_3} v}_= 0 + \nabla p - \text{div } S = \nabla p - 2a \text{div} (Dv)^S. \end{aligned}$$

Nun ist

$$Dv = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (Dv)^S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1 v_3 \\ 0 & 0 & \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & 0 \end{bmatrix},$$

also gilt

$$\operatorname{div}(Dv)^S = \frac{1}{2}(\Delta_{(x_1, x_2)} v_3) \mathbf{e}_3,$$

somit

$$\nabla p = 2a \operatorname{div}(Dv)^S = a(\Delta_{(x_1, x_2)} v_3) \mathbf{e}_3.$$

Daraus schließen wir zunächst, dass $\partial_1 p = 0$ und $\partial_2 p = 0$, also ist $p = \hat{p}(x_3)$. Dann wird die Impulserhaltung

$$\underbrace{\partial_3 p}_{\text{Funktion von } x_3} = \underbrace{a \Delta_{(x_1, x_2)} v_3}_{\text{Funktion von } (x_1, x_2)},$$

also gilt mit einer Konstanten c

$$\partial_3 p = -ca \quad \text{und} \quad \Delta_{(x_1, x_2)} v_3 = -c.$$

Daraus ergibt sich $p = -cax_3 + \text{const}$. Und wegen der Randbedingung an v folgt aus der Differentialgleichung die quadratische Darstellung von v_3 , d.h. $v_3 = \frac{c}{4} \cdot (R^2 - (x_1^2 + x_2^2))$. \square

Beweis der Formel in Abb. 15. The flow rate \mathcal{F} is the total flow through a cross section to the pipe, that is,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \int_{B_R(0)} v(x') \bullet \mathbf{e}_3 \, dL^2(x') = \frac{c}{4} \int_{B_R(0)} (R^2 - |x'|^2) \, dL^2(x') \\ &= \frac{c}{4} \cdot 2\pi \int_0^R r(R^2 - r^2) \, dr = \frac{c\pi}{8} R^4. \end{aligned}$$

The pressure difference for a pipe of length L is

$$P_1 - P_2 = \left[-cax_3 + \text{const} \right]_{x_3=L}^{x_3=0} = caL,$$

hence

$$\mathcal{F} = \frac{c\pi}{8} R^4 = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8aL} R^4 = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8aL} = \frac{P_1 - P_2}{\mathcal{R}},$$

so that for the resistance

$$\mathcal{R} := \frac{P_1 - P_2}{\mathcal{F}} = \frac{8aL}{\pi R^4},$$

where a is the viscosity coefficient. In Abb. 15 we have $\eta = a$. \square

In der Regel hat die stationäre Navier-Stokes Gleichung (bei gegebenen Randbedingungen) mehrere Lösungen. Die hier gezeigte stationäre Lösung der Navier-Stokes Gleichung ist stabil für kleine Geschwindigkeiten bzw. große Viskositäten. Für große Geschwindigkeiten bzw. kleine Viskositäten bildet sich physikalisch eine Randschicht aus, die in der Regel nicht stationär ist. Also existiert dann noch eine weitere instationäre “stabile Lösung”. Will man das Problem numerisch behandeln, so ist also auf eine genügend feine Diskretisierung nahe des Randes zu achten, und ggf. muss eine mathematisch formulierte Randschicht benutzt werden (siehe zum Beispiel die Prandtl’sche Randschicht in Abschnitt [IV.15](#)), damit man eine genauere Darstellung der Strömung erhält.

4 Oberflächen

Es begegnet uns täglich (siehe Abb. 16), dass wir verschiedene Medien haben, die sich berühren, etwa ein Schiff im Wasser, ein Wassertropfen oder ein Blatt in der Luft und Steine auf dem Boden. Diese Situation wird mathematisch beschrieben durch eine Oberfläche, die das Medium 1 und das Medium 2 trennt. Wir machen die Beobachtung, dass auch in diesem Fall die Massenerhaltung und die Impulserhaltung weiter richtig sind. Wir haben es hier also mit dem zweiten wichtigen Fall zu tun, dass wir den Begriff der Distributionen verwenden können. Nur mit Hilfe von Distributionen sind die Erhaltungsgleichungen auch in diesem Fall effektiv schreibbar, und sind gleichzeitig übersichtlich und leicht verständlich.

Wir geben in diesem Abschnitt nur Beispiele an, die keine eigene Differentialgleichung auf der Oberfläche aufweisen (dazu siehe [22], wo auch Oberflächenspannung und Surfactants behandelt werden). Dies ist etwa bei den hyperbolischen Gleichungen der Fall, die im Abschnitt über die Eulergleichungen IV.4 behandelt werden. Wir nehmen einmal an, dass die beiden



Abb. 16: Interface von Wasser und Luft

Medien Flüssigkeiten oder Gase sind. Es gilt also

$$\mathcal{U} := \Omega^1 \cup \Gamma \cup \Omega^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Testmenge ist und die offenen Raumzeitmengen Ω^m die Flüssigkeit m enthalten und der Rest Γ die gemeinsame Trennfläche, d.h. das **Interface** ist, wobei wir hier annehmen, dass dies eine C^2 -Fläche ist. Es ist also

$$t \mapsto \Omega_t^m := \{x \in \mathbb{R}^n; (t, x) \in \Omega^m\} \subset \mathbb{R}^n$$

die Menge, die von der Flüssigkeit m zu einem gegebenen Zeitpunkt t eingenommen wird, und die Trennfläche zum Zeitpunkt t , die auch für jedes t eine C^2 -Fläche sei, ist

$$t \mapsto \Gamma_t := \{x \in \mathbb{R}^n; (t, x) \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}^n.$$

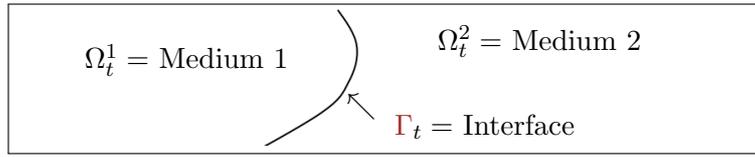


Abb. 17: Zwei aneinanderstoßende Medien

Im Allgemeinen wird $t \mapsto \Gamma_t$ von der Zeit abhängen, und es gibt dann zu $x \in \Gamma_t$ immer einen Normalenvektor $v_{\Gamma}(t, x) \in \mathbb{R}^n$, der anzeigt, wie schnell die Bewegung des Interfaces in der Zeit ist:

4.1 Normalgeschwindigkeit. Zu jedem Punkt $x \in \Gamma_t$ gibt es genau einen Vektor

$$v_{\Gamma}(t, x) \in T_x(\Gamma_t)^{\perp},$$

der im Normalenraum von Γ_t liegt und der die folgende Eigenschaft hat: Ist $\tilde{t} \mapsto \xi(\tilde{t}) \in \Gamma_{\tilde{t}}$ die Bewegung eines Massenpunktes auf Γ , so gilt für $x = \xi(t)$

$$v_{\Gamma}(t, x) = P_{(t,x)}v(t, x), \quad v(t, \xi(t)) := \dot{\xi}(t).$$

Dabei ist $P_{(t,x)} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x(\Gamma_t)^{\perp}$ die orthogonale Projektion. *Bemerkung:* Im stationären Fall ist auch Γ_t von der Zeit t unabhängig, also ist dann $v_{\Gamma}(t, x) = 0$.

Hierbei ist also $v(t, \xi(t)) \in \Gamma_t$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes und die Aussage besagt, dass $v(t, x) - v_{\Gamma}(t, x) \in T_x(\Gamma_t)$. Der Massenpunkt $t \mapsto \xi(t) \in \Gamma_t$ kann sich also beliebig auf Γ bewegen.

Beweis. Let $x \in \Gamma_t$ and define the normal space by $N_x := T_x(\Gamma_t)^{\perp}$. For small $\delta > 0$ the set $\Gamma_{t+\delta}$ intersects $\{x + \nu; \nu \in N_x\}$ in exactly one point $\{x_{\delta}\}$. Since the set Γ is C^1 there is exactly one vector $v_{\Gamma}(t, x)$ such that

$$x_{\delta} = x + \delta v_{\Gamma}(t, x) + \mathcal{O}(\delta).$$

Now if $\tilde{t} \mapsto \xi(\tilde{t}) \in \Gamma_{\tilde{t}}$ is the movement of a mass point and $x = \xi(t)$ it follows again from the C^1 -property, that $P_{(t,x)}(\xi(t + \delta) - x_{\delta}) = \mathcal{O}(\delta)$. Hence

$$\begin{aligned} P_{(t,x)}(\dot{\xi}(t)) &= \frac{1}{\delta} P_{(t,x)}(\xi(t + \delta) - \xi(t)) + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{1}{\delta} P_{(t,x)}(x_{\delta} - x) + \mathcal{O}(1) = P_{(t,x)}(v_{\Gamma}(t, x)) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

wich gives $P_{(t,x)}(\dot{\xi}(t)) = v_{\Gamma}(t, x)$. □

Wir nehmen nun an, dass die beiden Medien Ω^m , $m = 1, 2$, mit der Massen- und Impulserhaltung beschrieben werden, wobei die Größen (ϱ^m, v^m, Π^m) gegeben sind. Nicht nur das, sondern auch die Bilanz zwischen den Medien

ist mit diesen Erhaltungssätzen beschrieben, also gilt

$$\begin{aligned} \partial_t [\sum_m \varrho^m \mathcal{X}_{\Omega^m}] + \operatorname{div} [\sum_m \varrho^m v^m \mathcal{X}_{\Omega^m}] &= 0 \\ \partial_t [\sum_m \varrho^m v^m \mathcal{X}_{\Omega^m}] & \\ + \operatorname{div} [\sum_m (\varrho^m v^m v^{m\top} + \Pi^m) \mathcal{X}_{\Omega^m}] &= [\sum_m \mathbf{f}^m \mathcal{X}_{\Omega^m}]. \end{aligned} \quad (\text{I4.1})$$

Weitere Terme auf Γ bleiben hier unberücksichtigt.

Wir werden in den folgenden Beispielen diese distributionellen Differentialgleichungen betrachten. Hierbei machen wir nun die Annahme einer stationären Strömung,²¹ also sind alle Funktionen von der Zeit unabhängig und für die Mengen gilt

$$\Omega^m = \mathbb{R} \times D^m \text{ also auch } \Gamma = \mathbb{R} \times \mathbf{S}, \quad (\text{I4.2})$$

mit $D^m, \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$. Weiter nehmen wir an, dass kein Massenaustausch auf der Fläche \mathbf{S} stattfindet, also v^m auf \mathbf{S} in tangentialer Richtung zeigt. Es ist also unter diesen Voraussetzungen (I4.1) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\varrho^m v^m \mathcal{X}_{D^m}] &= 0 \text{ für jedes } m, \\ \operatorname{div} [\sum_m (\varrho^m v^m v^{m\top} + \Pi^m) \mathcal{X}_{D^m}] &= [\sum_m \mathbf{f}^m \mathcal{X}_{D^m}]. \end{aligned} \quad (\text{I4.3})$$

Es folgen jetzt drei klassische Beispiele.

Prinzip des Archimedes

Als erstes Beispiel behandeln wir einen Körper im Wasser. Es ist jetzt $D^1 = D^b$ der Körper und $D^2 = D^w$ das Wasser. Ein Spezialfall ist, dass der Körper ganz in die Flüssigkeit eingetaucht ist.

4.2 Auftriebsgesetz von Archimedes. “Der statische Auftrieb eines Körpers in einem Medium ist genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums.” Aus [Wikipedia: Archimedisches Prinzip].

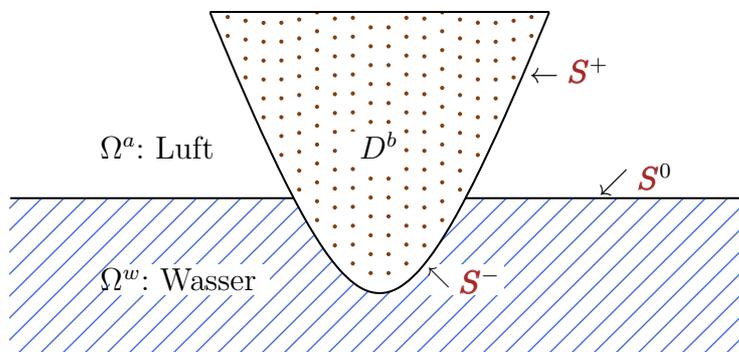
Wie das zu verstehen ist, ergibt sich aus den folgenden Beweisen, die zeigen, welche Voraussetzungen für den Satz von Archimedes notwendig sind, insbesondere, wie die Impulserhaltung in dieser Situation aussieht.

Beweis falls der Körper ganz untergetaucht ist. Wir betrachten den **statischen Zustand**, d.h. den stationären Zustand mit Geschwindigkeit 0²² und es sei $n = 3$. Der Körper, repräsentiert durch $D^1 = D^b$, sei ganz eingetaucht in Wasser $D^2 = D^w$, und der Rand dazwischen sei \mathbf{S} . Die Massenerhaltungen in (I4.3) sind dann trivial und die Impulserhaltung in (I4.3) lautet

$$\operatorname{div} \left[\sum_{m=1,2} \Pi^m \mathcal{X}_{D^m} \right] = \left[\sum_{m=1,2} \mathbf{f}^m \mathcal{X}_{D^m} \right].$$

²¹Das heißt nicht, dass $v = 0$ sein muss ($v = 0$ ist der statische Fall).

²²das heißt, wir betrachten ein Equilibrium

Abb. 18: Ein teilweise untergetauchter Körper D^b mit Rand $\mathbf{S} := \partial D^b$

Wir schreiben dies mit Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
 0 &= \left\langle \zeta, -\operatorname{div} \left[\sum_{m=1,2} \Pi^m \chi_{D^m} \right] + \left[\sum_{m=1,2} \mathbf{f}^m \chi_{D^m} \right] \right\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \\
 &= \sum_m \int_{D^m} (\operatorname{D}\zeta : \Pi^m + \zeta \bullet \mathbf{f}^m) \, dL^3 \\
 &= \sum_m \int_{D^m} \zeta \bullet (-\operatorname{div} \Pi^m + \mathbf{f}^m) \, dL^3 + \int_{\mathbf{S}} \zeta \bullet \left(\sum_m \Pi^m \nu_{D^m} \right) \, dH^2.
 \end{aligned} \tag{I4.4}$$

Dies ist äquivalent zu, wobei ν eine Normale an \mathbf{S} sei,

$$\operatorname{div} \Pi^m = \mathbf{f}^m \text{ in } D^m, \quad (\Pi^2 - \Pi^1) \nu = 0 \text{ auf } \mathbf{S},$$

also, wenn wir die andere Bezeichnung verwenden,

$$\operatorname{div} \Pi^w = \mathbf{f}^w \text{ in } D^w, \quad \operatorname{div} \Pi^b = \mathbf{f}^b \text{ in } D^b, \quad (\Pi^w - \Pi^b) \nu = 0 \text{ auf } \mathbf{S}.$$

Im statischen Zustand ist für das Wasser $\Pi^w = p^w \operatorname{Id}$ mit dem Druck p^w und für die Kräfte nehmen wir nur die Schwerkraft und diese approximieren wir linear, d.h. $\mathbf{f}^w = \varrho^w \mathbf{g}$ sowie $\mathbf{f}^b = \varrho^b \mathbf{g}$ mit $\mathbf{g} = -g_{\text{Erde}} \mathbf{e}_3$, wobei g_{Erde} die Gravitationskonstante auf der Erdoberfläche sei. Hier sind ϱ^w und ϱ^b die Dichten, wobei wir annehmen, dass

$$\varrho^w = \varrho^o = \text{const.}$$

Nun ist in D^w

$$\nabla p^w = \operatorname{div} \Pi^w = \mathbf{f}^w = \varrho^w \mathbf{g} = -\varrho^w g_{\text{Erde}} \mathbf{e}_3$$

und daher (bis auf eine Additionskonstante, die dann auch beim Körper addiert werden müsste)

$$p^w = -\varrho^w g_{\text{Erde}} x_3.$$

Da $\varrho^w = \varrho^o$ in D^w und $\varrho^o = \text{const}$ eine Zahl ist, können wir mit ihr eine globale Funktion

$$p^o(x) := -\varrho^o g_{\text{Erde}} x_3$$

definieren. Es ist also $p^o = p^w$ auf Ω^w . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{D^w} (\text{D}\zeta \bullet \Pi^w + \zeta \bullet \mathbf{f}^w) \, dL^3 &= \int_{D^w} (\text{D}\zeta \bullet (p^w \text{Id}) + \zeta \bullet \nabla p^w) \, dL^3 \\ &= \int_{D^w} (\text{div} \zeta \cdot p^w + \zeta \bullet \nabla p^w) \, dL^3 = \int_{D^w} \text{div}(p^w \zeta) \, dL^3 \\ &= \int_{\mathbf{S}} p^w \zeta \bullet \nu_{D^w} \, dH^2 = \int_{\mathbf{S}} p^o \zeta \bullet \nu_{D^w} \, dH^2 = - \int_{\mathbf{S}} p^o \zeta \bullet \nu_{D^b} \, dH^2 \\ &= - \int_{D^b} \text{div}(p^o \zeta) \, dL^3 = - \int_{D^b} \text{D}\zeta \bullet (p^o \text{Id}) \, dL^3 + \int_{D^b} \zeta \bullet (-\nabla p^o) \, dL^3, \end{aligned}$$

wobei $-\nabla p^o = \varrho^o g_{\text{Erde}} \mathbf{e}_3$. Somit ist, wenn wir dies in (I4.4) einsetzen,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D^b} (\text{D}\zeta \bullet \Pi^b + \zeta \bullet \mathbf{f}^b) \, dL^3 + \int_{D^w} (\text{D}\zeta \bullet \Pi^w + \zeta \bullet \mathbf{f}^w) \, dL^3 \\ &= \int_{D^b} (\text{D}\zeta \bullet (\Pi^b - p^o \text{Id}) + \zeta \bullet (\mathbf{f}^b - \nabla p^o)) \, dL^3. \end{aligned}$$

Wähle nun die Testfunktion gleich 1 auf D^b und erhalte

$$0 = \underbrace{\int_{D^b} \mathbf{f}^b \, dL^3}_{\text{Gesamte Kraft auf Körper}} - \underbrace{\int_{D^b} \nabla p^o \, dL^3}_{\text{Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit}}.$$

□

Beweis falls der Körper auf dem Wasser schwimmt. Der Körper, repräsentiert durch $D^1 = D^b$, befinde sich nur teilweise im Wasser (siehe Abb. 18). Dann ist

$$\mathbf{S}^0 := \{x; x_3 = 0\} \setminus D^b \in \mathbb{R}^3$$

das Interface zwischen Wasser D^w und Luft D^a und

$$D^2 = D^w \cup \mathbf{S}^0 \cup D^a.$$

Also besteht $\mathbf{S} := \partial D^b$ aus zwei Teilen, dem Rand zur Luft $\mathbf{S}^+ := \mathbf{S} \cap \overline{D^a}$ und dem Rand zum Wasser $\mathbf{S}^- := \mathbf{S} \cap \overline{D^w}$. Die beiden Mengen werden getrennt durch $\mathbf{S} \cap \mathbf{S}^0$. Es ist dann (wir nehmen dasselbe wie im vorigen Beweis an,

aber jetzt für die drei Gebiete D^b , D^w , D^a)

$$\begin{aligned} & \int_{D^w} (\mathbf{D}\zeta : \Pi^w + \zeta \bullet \mathbf{f}^w) \, dL^3 + \int_{D^a} (\mathbf{D}\zeta : \Pi^a + \zeta \bullet \mathbf{f}^a) \, dL^3 \\ &= \int_{D^w} \operatorname{div}(p^w \zeta) \, dL^3 + \int_{D^a} \operatorname{div}(p^a \zeta) \, dL^3 \\ &= \int_{\mathbf{S}^-} p^w \zeta \bullet \nu_{D^w} \, dH^2 + \int_{\mathbf{S}^+} p^a \zeta \bullet \nu_{D^a} \, dH^2 \end{aligned}$$

(es sind $p^w = 0$, $p^a = 0$, $p^o = 0$ auf $\{x_3 = 0\}$), und das erste Integral ist gleich

$$\begin{aligned} &= - \int_{\mathbf{S}^-} p^o \zeta \bullet \nu_{D^b} \, dH^2 = - \int_{D^b \cap \{x_3 < 0\}} \operatorname{div}(p^o \zeta) \, dL^3 \\ &= \int_{D^b \cap \{x_3 < 0\}} (\mathbf{D}\zeta : (-p^o \operatorname{Id}) + \zeta \bullet (-\nabla p^o)) \, dL^3. \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D^b} (\mathbf{D}\zeta : \Pi^b + \zeta \bullet \mathbf{f}^b) \, dL^3 + \int_{D^w} (\mathbf{D}\zeta : \Pi^w + \zeta \bullet \mathbf{f}^w) \, dL^3 \\ &\quad + \int_{D^a} (\mathbf{D}\zeta : \Pi^a + \zeta \bullet \mathbf{f}^a) \, dL^3 \\ &= \int_{D^b} (\mathbf{D}\zeta : (\Pi^b - \chi_{\{x_3 < 0\}} p^o \operatorname{Id}) + \zeta \bullet (\mathbf{f}^b - \chi_{\{x_3 < 0\}} \nabla p^o)) \, dL^3 \\ &\quad - \int_{\mathbf{S}^+} p^a \zeta \bullet \nu_{D^b} \, dH^2. \end{aligned}$$

Man lässt jetzt $\varrho^a \rightarrow 0$ (und damit auch $p^a \rightarrow 0$) gehen oder man formt auch das zweite Randintegral um. Man wählt dann wieder eine Testfunktion, die gleich 1 auf D^b ist, und erhält dann

$$0 = \underbrace{\int_{D^b} \mathbf{f}^b \, dL^3}_{\text{Gesamte Kraft auf Körper}} - \underbrace{\int_{D^b} \chi_{\{x_3 < 0\}} \nabla p^o \, dL^3}_{\text{Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit}}.$$

□

Flüssigkeit mit freier Oberfläche

Als zweites Beispiel wollen wir den Spezialfall einer rotierenden, stationären Flüssigkeit mit freier Oberfläche behandeln. Das heißt, es ist $D_f := D^1$ und $D_g := D^2$, wobei das Wasser D_f und das Gas D_g ausfüllt.

4.3 Stationäre Flüssigkeit mit Oberfläche. Wir betrachten eine stationäre Lösung einer (in)kompressiblen Flüssigkeit mit freiem Rand zu einem Gas wie gerade beschrieben. Es finde kein Massenaustausch zwischen den beiden Phasen statt (keine Evaporation oder Kondensation).

Behauptung: Die Differentialgleichungen lauten

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \operatorname{div}(\varrho v v^T + p \operatorname{Id} - S) &= \mathbf{f} \end{aligned} \right\} \text{ in } D_f,$$

$$p_g = \text{const lokal in } D_g,$$

$$\left. \begin{aligned} v \bullet \nu &= 0, \\ (p - p_g)\nu &= S\nu \end{aligned} \right\} \text{ auf } \partial D_f = \mathbf{S},$$

where ν is a normal unit vector of \mathbf{S} .

Beweis. Die Massenerhaltung lautet für die Flüssigkeit (kein Massenaustausch mit dem Gas)

$$\operatorname{div}[\varrho v \mathcal{X}_{D_f}] = 0,$$

also ist für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \zeta, -\operatorname{div}[\varrho v \mathcal{X}_{D_f}] \rangle = \int_{D_f} \nabla \zeta(x) \bullet (\varrho v)(x) \, dx \\ &= \int_{\partial D_f} \zeta(x) \nu_{D_f}(x) \bullet (\varrho v)(x) \, d\mathbb{H}^{n-1}(x) - \int_{D_f} \zeta(x) \operatorname{div}(\varrho v)(x) \, dx. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\operatorname{div}(\varrho v) = 0$ in D_f und $\nu_{D_f} \bullet v = 0$ auf ∂D_f . Für die Impulserhaltung gilt für vektorwertige Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \zeta, -\operatorname{div}[(\varrho v v^T + p \operatorname{Id} - S)\mathcal{X}_{D_f} + p_g \operatorname{Id} \mathcal{X}_{D_g}] + [\mathbf{f} \mathcal{X}_{D_f}] \rangle \\ &= \langle D\zeta, [(\varrho v v^T + p \operatorname{Id} - S)\mathcal{X}_{D_f}] + [p_g \operatorname{Id} \mathcal{X}_{D_g}] \rangle + \langle \zeta, [\mathbf{f} \mathcal{X}_{D_f}] \rangle \\ &= \int_{D_f} \left(D\zeta \bullet (\varrho v v^T + p \operatorname{Id} - S) + \zeta \bullet \mathbf{f} \right) \, dL^n + \int_{D_g} D\zeta \bullet (p_g \operatorname{Id}) \, dL^n. \end{aligned}$$

Da $\nu_{D_g} = -\nu_{D_f}$, ist dies

$$\begin{aligned} &= \int_{D_f} \zeta \bullet \left(-\operatorname{div}(\varrho v v^T + p \operatorname{Id} - S) + \mathbf{f} \right) \, dL^n - \int_{D_g} \zeta \bullet \nabla p_g \, dL^n \\ &\quad + \int_{\partial D_f} \zeta \bullet (\varrho v v^T + (p - p_g) \operatorname{Id} - S) \nu_{D_f} \, d\mathbb{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

woraus die restlichen Differentialgleichungen in D_f und D_g und die Interfacegleichung folgen, d.h.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varrho v v^T + p \operatorname{Id} - S) &= \mathbf{f} \text{ auf } D_f, \\ \nabla p_g &= 0 \text{ auf } D_g, \\ (\varrho v v^T + (p - p_g) \operatorname{Id} - S) \nu_{D_f} &= 0 \text{ auf } \partial D_f. \end{aligned}$$

Da wir schon $v \bullet \nu_{D_f} = 0$ gezeigt ²³ haben, ist die Gleichung auf ∂D_f zu

$$(p - p_g)\nu_{D_f} - S\nu_{D_f} = 0$$

äquivalent. □

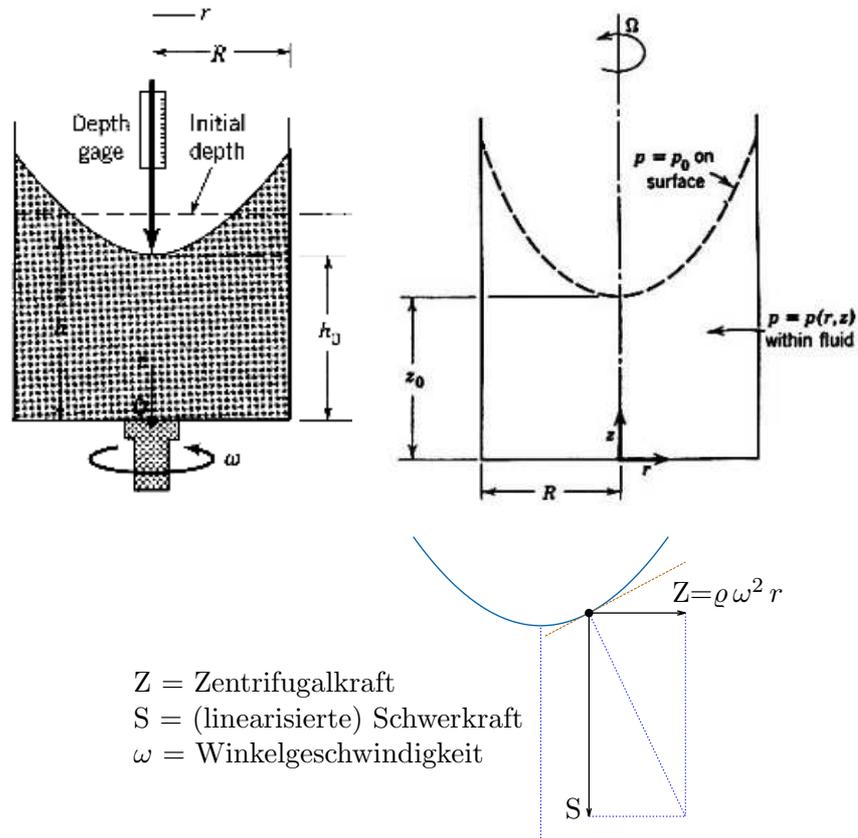


Abb. 19: Die Parabelform der Oberfläche

4.4 Die Parabelform der Oberfläche. Betrachte das Problem in 4.3 mit einer inkompressiblen Flüssigkeit, die Spannungstensor S wie in (I3.33) hat, und

$$v(x) = \omega \cdot (-x_2, x_1, 0) \quad (\text{rotierende Flüssigkeit}),$$

$$\mathbf{f}(x) = \rho g_{\text{Erde}}(0, 0, -1) \quad (\text{Schwerkraft der Erde (linearisiert)}),$$

$$\text{es ist } \rho = \rho_0 = \text{const}, \quad g_{\text{Erde}} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad (= 9.80665 \frac{m}{s^2}).$$

²³Es ist $a^T b = a \bullet b$ und für eine Matrix M gilt $(a^T M_k)_k = M a$ if $M_k := (M_{kj})_j$.

Dies ist genau dann eine Lösung von 4.3, wenn

$$v \bullet \nu = 0, \quad p = p_g = \text{const auf } \mathcal{S},$$

\mathcal{S} wird durch einen Paraboloid gegeben in Vertikalrichtung:

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g}(x_1^2 + x_2^2) + \text{const}$$

Hinweis: Es ist $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ zeitunabhängig und ν ist eine Normale an \mathcal{S} .

Also: Die Form des Randes wird durch die Rotation der Flüssigkeit in Zusammenhang mit der Schwerkraft gegeben, und zwar durch die distributionelle Massen- und Impulsbilanz. (Zum Vergleich siehe die Veröffentlichung [134].)

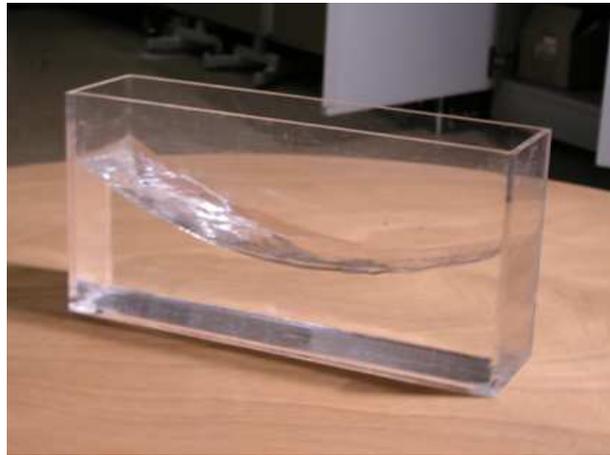


Abb. 20: Rotation von Wasser mit Oberfläche

Beweis. Wir betrachten zunächst allgemein eine kompressible Strömung. Es gelten die Gleichungen in 4.3. Für das speziell gegebene v ist $(Dv)^S = 0$ (siehe den Beweis von 3.5), und damit $\text{div} v = \text{trace}(Dv)^S = 0$ und daher auch $S = 0$. Der Rand \mathcal{S} ist orthogonal zu der Strömungsrichtung ($v \bullet \nu_S = 0$ auf \mathcal{S}), er muss wegen der Massenerhaltung an die Flüssigkeit rotationssymmetrisch sein. Wegen $\text{div}(\rho v v^T) = \rho v \bullet \nabla v + v \bullet \text{div}(\rho v)$ sind die zu lösenden Gleichungen also

$$\rho v \bullet \nabla v + \nabla p = \mathbf{f} \text{ in } D_f,$$

$$p - p_g = 0 \text{ auf } \mathcal{S},$$

wobei p_g eine Konstante ist, der Druck des Gases. Wir berechnen also p aus der Differentialgleichung und setzen dann $p = p_g$ auf \mathcal{S} . Nun ist die Schwerkraft $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{e}_3$ mit $g = g_{\text{Erde}}$ (als Approximation), also

$$\rho v \bullet \nabla v + \nabla p = -\rho g \mathbf{e}_3.$$

Wegen $v \bullet \nabla v = -\omega^2(x_1, x_2, 0)$ (siehe den Beweis von 3.5) erhalten wir

$$\nabla p = \varrho \begin{bmatrix} \omega^2 x_1 \\ \omega^2 x_2 \\ -g \end{bmatrix}. \quad (\text{I4.5})$$

Im inkompressiblen Fall $\varrho = \text{const}$ ist daher

$$p(x) = \varrho \left(\frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - gx_3 \right) + \text{const},$$

also für $x \in \mathcal{S}$

$$gx_3 = \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{p_g - \text{const}}{\varrho}.$$

Die Konstante dient zur Festlegung der Höhe von \mathcal{S} im Zentrum. \square

Bei einer kompressiblen Flüssigkeit werden die letzten Gleichungen andere sein, also ist die beschriebene Analysis nochmal zu machen (siehe Übungsaufgabe 7.21).

Schwerkraft eines Planeten

Als weiteres Beispiel für eine stationäre Lösung betrachten wir das Schwerkraftfeld eines inkompressiblen Planeten auf sich selbst, wobei wir hier annehmen, dass der Planet nicht rotiert. Wir machen neben der Gravitationsgleichung wieder von der stationären distributionellen Schreibweise der Navier-Stokes Gleichungen Gebrauch, und zwar ist $D^1 = B_R(0)$, und $D^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ ist ein Vakuum.

4.5 Schwerkraftfeld eines inkompressiblen Planeten. Wir betrachten die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen im \mathbb{R}^3 und eine stationäre Lösung mit $v = 0$. Ein nicht rotierender inkompressibler Planet werde modelliert durch eine Kugel mit homogener Massenverteilung

$$\varrho = \varrho_0 \mathcal{X}_{B_R(0)},$$

wobei $\varrho_0 > 0$ eine Konstante sei. Außerhalb des Planeten sei Vakuum vorhanden. Dann erfüllen das Schwerepotential ϕ in 2.16 und der Druck p die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{div}(-[\nabla \phi]) &= [\varrho], \\ \nabla[p \mathcal{X}_{B_R(0)}] &= \mathbf{f} := \mathfrak{g}[\varrho \nabla \phi]. \end{aligned}$$

Hierbei ist \mathbf{f} die Kraftdichte auf den Planeten selbst.

Behauptung: Es ist dabei

$$p = \mathfrak{g} \varrho_0 (\phi - \phi_0)$$

und ϕ_0 der konstante Wert von ϕ auf $\partial B_R(0)$, siehe auch Abb. 7.

Bemerkung: Newton hat den Fall $v \neq 0$ betrachtet, siehe IV.16.5.

Es handelt sich hier also um die Gravitationsgleichung (I2.10) zusammen mit der Massen- und Impulserhaltung (I4.3) im \mathbb{R}^3 mit $v = 0$ im Planeten $D^1 = B_R(0)$ und dem Vakuum D^2 mit verschwindendem Druck, d.h.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\Pi^1 \mathcal{X}_{D^1}] &= [\mathbf{f}^1 \mathcal{X}_{D^1}], \\ \Pi^1 &= p \operatorname{Id}, \quad \mathbf{f}^1 = \mathfrak{g} \varrho \nabla \phi,\end{aligned}$$

Beweis. Da die Dichte des Planeten konstant ist, schreibt sich die Impulserhaltung als

$$-\nabla[p \mathcal{X}_{B_R(0)}] + [\mathcal{X}_{B_R(0)} \nabla(\mathfrak{g} \varrho_0 \phi)] = 0,$$

oder mit Testfunktionen $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}0 &= \langle \zeta, -\nabla[p \mathcal{X}_{B_R(0)}] + [\mathcal{X}_{B_R(0)} \nabla(\mathfrak{g} \varrho_0 \phi)] \rangle \\ &= \langle \operatorname{div} \zeta, [p \mathcal{X}_{B_R(0)}] \rangle + \langle \zeta, [\mathcal{X}_{B_R(0)} \nabla(\mathfrak{g} \varrho_0 \phi)] \rangle \\ &= \int_{B_R(0)} (\operatorname{div} \zeta \cdot p + \zeta \bullet \nabla(\mathfrak{g} \varrho_0 \phi)) \, dL^n \\ &= \int_{\partial B_R(0)} \zeta \bullet \nu_{B_R(0)} p \, dH^{n-1} + \int_{B_R(0)} \zeta \bullet (-\nabla p + \nabla(\mathfrak{g} \varrho_0 \phi)) \, dL^n.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass $p = 0$ auf $\partial B_R(0)$ und

$$\nabla(p - \mathfrak{g} \varrho_0 \phi) = 0 \text{ in } B_R(0),$$

also $p - \mathfrak{g} \varrho_0 \phi = \text{const}$ in $B_R(0)$. Da $\phi = \phi_0 = \text{const}$ auf $\partial B_R(0)$ (dies folgt, weil hier ϕ radialsymmetrisch ist), folgt die Behauptung. \square

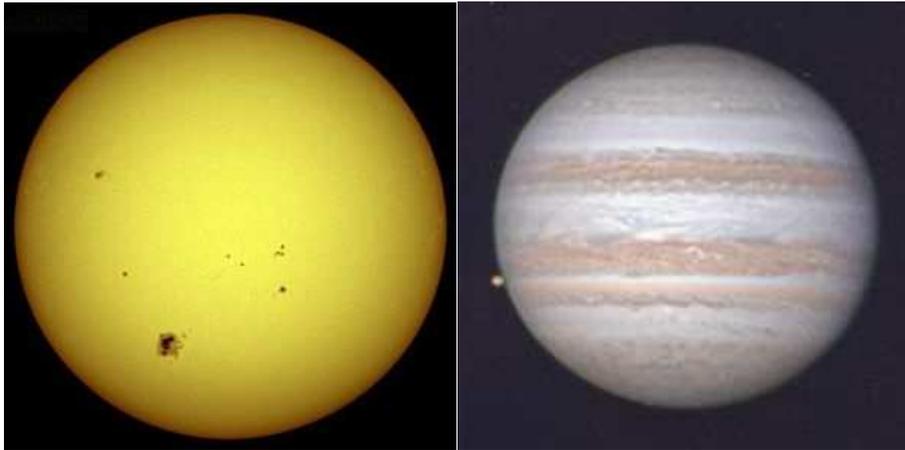


Abb. 21: *Left:* Sun at 7 Jun 1992 from [Wikipedia: Sonne]. *Right:* Jupiter and Io at 2 Jan 2013 from SuW 3|2013 (Photo by Thorsten Edelmann).

Referenzen: Dieses Ergebnis wird in [21, Gravitation] weiter behandelt, siehe die dort gemachten Literaturangaben. Falls der Planet rotiert, wird er durch die Rotation zu einem Spheroid. Dies wurde von Newton gezeigt und dessen Beweis wird in IV.16.5 präsentiert. Zum kompressiblen Fall siehe auch den Abschnitt IV.16.

Die Schwerkraft der Erde auf irgendeinen Körper wurde in (I3.11) definiert, es ist unter Vernachlässigung des Schwerepotential von Körpern ungleich der Erde die Massendichte mal der Beschleunigung a , wobei

$$a = \mathbf{g} \nabla \phi_{\text{Erde}}.$$

Also ist nach 2.16 für Punkte x außerhalb des Erdinneren (wenn der Erdmittelpunkt zu 0 normiert wird)

$$\nabla \phi_{\text{Erde}}(x) = -\frac{M_{\text{Erde}}}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}. \quad (\text{I4.6})$$

Damit erhält man für x auf dem Rande der Erde

$$\nabla \phi_{\text{Erde}}(x) = -\frac{M_{\text{Erde}}}{4\pi R_{\text{Erde}}^2} e(x) \quad \text{mit } e(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Hierbei ist die Erde mit einer Kugelapproximation mit Radius R_{Erde} beschrieben, was natürlich eine grobe Vereinfachung darstellt, zumal wir auch von einer Gleichverteilung der Masse ausgehen (siehe [Wikipedia: Erdmasse], [Wikipedia: Erdradius], [Wikipedia: Gewichtskraft], und IV.16.5, dort wird die Schwerkraft innerhalb eines rotierenden inkompressiblen Planeten betrachtet, was zu einer Abplattung führt). Also ist in Näherung

$$\begin{aligned} M_{\text{Erde}} &= 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \\ R_{\text{Erde}} &= 6371.0 \text{ km (approximativ)}, \\ G &= 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, \end{aligned}$$

wobei G ein genauer Wert ist. Nun folgt für x auf der Erdoberfläche

$$\mathbf{g} \nabla \phi_{\text{Erde}}(x) = -\frac{\mathbf{g} M_{\text{Erde}}}{4\pi R_{\text{Erde}}^2} e(x) = -\frac{G \cdot M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^2} e(x) = -g_0 e(x)$$

mit $g_0 = 9.825 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, was dem Wert

$$g_{\text{Erde}} = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (= 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

bis auf 0.153% genau nahe kommt. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass alleine die Abplattung der Erde 0.335% betrifft (siehe die Abplattung in IV.16.5, da die Erde rotiert). Es sei bemerkt, dass die hier gemachten Vereinfachungen nicht bezüglich der physikalischen Gesetze Massen- und Impulsbilanz getroffen wurden, sondern in Hinsicht auf eine geometrische Vereinfachung zur einfacheren Berechnung der Lösung.

5 Koordinatentransformation

We describe a coordinate transform which can be used for the transformation of

- physical coordinates into e.g. polar coordinates (see 5.4)
- reference coordinates into physical coordinates (see section 6)
- observer coordinates in section II.1 and chapter VI

where the last two are motivated by physical reasons, and the first one only by mathematical reasons. We consider a spacetime domain $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ with coordinates $y \in \mathcal{U}$ and we consider L_{loc}^∞ -fluxes q_i^k , $i = 0, \dots, n$, and L_{loc}^∞ -functions \mathbf{r}^k of a so-called **divergence system** in the domain \mathcal{U}

$$\sum_{i=0}^n \partial_{y_i} [q_i^k] = [\mathbf{r}^k] \quad \text{for } k = 1, \dots, N \quad (\text{I5.1})$$

in $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$. We suppose a C^1 -transformation Y of the coordinates $y^* \in \mathcal{U}^*$ into the given coordinates $y \in \mathcal{U}$ is given by

$$y = Y(y^*) \text{ with positive Jacobian.} \quad (\text{I5.2})$$

Further, we suppose that a matrix

$$Z = (Z_{kl})_{k,l=1,\dots,N} \text{ is invertible and in } C^1(\mathcal{U}^*; \mathbb{R}^{N \times N}) \quad (\text{I5.3})$$

is given, and that quantities q_j^{*l} and \mathbf{r}^{*l} are defined by q_j^l and \mathbf{r}^l in the following way

$$\begin{aligned} q_i^k \circ Y &= \frac{1}{J} \sum_{j,l} Y_{i'j} Z_{kl} q_j^{*l}, \quad J := \det D_{y^*} Y > 0, \\ \mathbf{r}^k \circ Y &= \frac{1}{J} \left(\sum_{j,l} Z_{kl'j} q_j^{*l} + \sum_l Z_{kl} \mathbf{r}^{*l} \right), \\ &\text{for all } i = 0, \dots, n \text{ and } k = 1, \dots, N, \\ &\text{where } j \text{ runs from } 0 \text{ to } n, \text{ and } l \text{ from } 1 \text{ to } N. \end{aligned} \quad (\text{I5.4})$$

Note, that the transformation rule (I5.4) gives a bijective correspondence between

$$\left(q_i^k \right)_{ik} \text{ and } \left(q_j^{*l} \right)_{jl}.$$

Note also, that the last transformation rule in (I5.4) involves derivatives of the matrix Z . The following is true.

5.1 Hauptsatz über die Invarianz. The system (I5.1) is invariant under the transformation of quantities described in (I5.4). Hence, if (I5.1) in $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ is satisfied and the quantities q_j^{*l} and \mathbf{r}^{*l} for $j = 0, \dots, n$ and $l = 1, \dots, N$ fulfill (I5.4), then

$$\sum_{j=0}^n \partial_{y_j^*} [q_j^{*k}] = [\mathbf{r}^{*k}] \text{ for } k = 1, \dots, N \quad (\text{I5.5})$$

in $\mathcal{D}'(\mathcal{U}^*)$.

This follows from the following statement, which also shows, that the transformation of the differential equation is due to a transformation rule for test functions. This transformation rule involves a matrix Z , which is so far an arbitrary varying invertible matrix.

5.2 Property. If $\zeta \in C_0^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^N)$ and $\zeta^* \in C_0^1(\mathcal{U}^*; \mathbb{R}^N)$ are test functions which correspond by

$$\zeta^* = Z^T \zeta \circ Y \quad (\text{that is } \zeta \circ Y = Z^{-T} \zeta^*) \quad (\text{I5.6})$$

then the transformation rule (I5.4) implies

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N \left\langle \zeta_l^*, - \sum_{j=0}^n \partial_{y_j^*} [q_j^{*l}] + [\mathbf{r}^{*l}] \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U}^*)} \\ &= \sum_{k=1}^N \left\langle \zeta_k, - \sum_{i=0}^n \partial_{y_i} [q_i^k] + [\mathbf{r}^k] \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} \end{aligned} \quad (\text{I5.7})$$

The expressions concerning distributions are defined for C_0^1 -functions, since q_j^{*l} , \mathbf{r}^{*l} and q_i^k , \mathbf{r}^k are locally bounded functions.

Beweis. The test functions satisfy (I5.6), that is for $l = 1, \dots, N$

$$\zeta_l^* = \sum_{k=1}^N Z_{kl} \zeta_k \circ Y.$$

Taking the derivative with respect to y_j^* , $j = 0, \dots, n$, we obtain

$$\begin{aligned} \partial_{y_j^*} \zeta_l^* &= \sum_{k=1}^N \partial_{y_j^*} (Z_{kl} \zeta_k \circ Y) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n Z_{kl} Y_{i' y_j^*} (\partial_{y_i} \zeta_k) \circ Y + \sum_{k=1}^N Z_{kl' y_j^*} \zeta_k \circ Y. \end{aligned}$$

With this we obtain

$$\begin{aligned} & \sum_l \left\langle \zeta_l^*, - \sum_j \partial_{y_j^*} [q_j^{*l}] + [\mathbf{r}^{*l}] \right\rangle \\ &= \sum_{l,j} \left\langle \partial_{y_j^*} \zeta_l^*, [q_j^{*l}] \right\rangle + \sum_l \left\langle \zeta_l^*, [\mathbf{r}^{*l}] \right\rangle \\ &= \sum_{k,l,j} \left\langle \sum_i Z_{kl} Y_{i' y_j^*} (\partial_{y_i} \zeta_k) \circ Y + Z_{kl' y_j^*} \zeta_k \circ Y, [q_j^{*l}] \right\rangle \\ & \quad + \sum_{k,l} \left\langle Z_{kl} \zeta_k \circ Y, [\mathbf{r}^{*l}] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,i} \left\langle (\partial_{y_i} \zeta_k) \circ Y, \underbrace{\sum_{lj} Z_{kl} Y_{i'j} [q_j^{*l}]}_{= [J q_i^k \circ Y]} \right\rangle \\
&\quad + \sum_k \left\langle \zeta_k \circ Y, \underbrace{\sum_{lj} Z_{kl} Y_{i'j} [q_j^{*l}] + \sum_l Z_{kl} [\mathbf{r}^{*l}]}_{= [J \mathbf{r}^k \circ Y]} \right\rangle
\end{aligned}$$

using (I5.4), and this is

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,i} \left\langle (\partial_{y_i} \zeta_k) \circ Y, [J q_i^k \circ Y] \right\rangle + \sum_k \left\langle \zeta_k \circ Y, [J \mathbf{r}^k \circ Y] \right\rangle \\
&= \sum_{k,i} \int_{\mathcal{U}^*} (\partial_{y_i} \zeta_k) \circ Y q_i^k \circ Y J \, dL^{n+1} + \sum_k \int_{\mathcal{U}^*} \zeta_k \circ Y \mathbf{r}^k \circ Y J \, dL^{n+1} \\
&= \sum_{k,i} \int_{\mathcal{U}} (\partial_{y_i} \zeta_k) q_i^k \, dL^{n+1} + \sum_k \int_{\mathcal{U}} \zeta_k \mathbf{r}^k \, dL^{n+1} \\
&= \sum_{k,i} \left\langle \partial_{y_i} \zeta_k, [q_i^k] \right\rangle + \sum_k \left\langle \zeta_k, [\mathbf{r}^k] \right\rangle \\
&= \sum_k \left\langle \zeta_k, - \sum_i \partial_{y_i} [q_i^k] + [\mathbf{r}^k] \right\rangle.
\end{aligned}$$

We have seen, that the factor J enters because of the transformation of an L^{n+1} -integral. \square

References: This theorem one finds in [19, §5 Objectivity of Differential Equations].

Wir schreiben das Resultat nochmal im allgemeinen Fall als Merkregel

Invarianz des Divergenzgleichungssystems bzgl. Z :

$$\sum_{i=0}^n \partial_{y_i} [q_i^k] = [\mathbf{r}^k] \text{ for } k = 1, \dots, N$$

unter der Transformation $\zeta^* = Z^T \zeta \circ Y$

falls die folgenden **Transformationsregeln** gelten:

$$q_i^k \circ Y = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Y_{i'j} Z_{kl} q_j^{*l}, \quad J := \det D_{y^*} Y > 0$$

$$\mathbf{r}^k \circ Y = \frac{1}{J} \left(\sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} Y_{i'j} q_j^{*l} + \sum_{l=1}^N Z_{kl} \mathbf{r}^{*l} \right)$$

(I5.8)

5.3 Hinweis. Zur Transformationsformel sei Folgendes gesagt. Da nun im regulären Fall die Differentialgleichung in (I5.1)

$$\sum_{i=0}^n \partial_{y_i} q_i^k = \mathbf{r}^k \text{ für } k = 1, \dots, N$$

lautet, ergibt sich die natürliche Frage, ob die Transformationsformel (I5.4) für \mathbf{r}^k nicht durch diese Differentialgleichung und die Transformationsformel (I5.4) für die q_i^k direkt hergeleitet werden kann. Die Antwort ist: Natürlich ist dies so, siehe den Beweis 1. Es wird dabei auch klar, warum der Beweis mit Testfunktionen, siehe auch den Beweis 2, dem anderen Beweis vorgezogen wurde.

Beweis 1. Die Transformationsformel für die q_i^k in (I5.4) war

$$q_i^k \circ Y = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Y_{i'j} Z_{kl} q_j^{*l}.$$

Aus jeder Transformationsformel kann eine Formel für die Ableitung hergeleitet werden, man braucht die Formel nur zu differenzieren. Also ist für $j = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n q_i^k \circ Y Y_{i'j} &= (q_i^k \circ Y)'_{,j} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl}'_{,j} q_j^{*l} Y_{i'j} \\ &+ \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} q_j^{*l} \left(\frac{1}{J} Y_{i'j} \right)'_{,j} + \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} Y_{i'j} q_j^{*l}'_{,j}. \end{aligned}$$

Wir schreiben dies in Matrixform

$$\begin{aligned} Dq^k \circ Y DY &= \frac{1}{J} \sum_{j,j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl}'_{,j} q_j^{*l} (DY \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_j \\ &+ \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} q_j^{*l} D \left(\frac{Y_{i'j}}{J} \right) + \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} DY Dq^{*l}, \end{aligned}$$

so dass also

$$\begin{aligned} Dq^k \circ Y &= \frac{1}{J} \sum_{j,j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl}'_{,j} q_j^{*l} DY \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j DY^{-1} \\ &+ \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} q_j^{*l} D \left(\frac{Y_{i'j}}{J} \right) DY^{-1} + \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} DY Dq^{*l} DY^{-1}. \end{aligned}$$

Dies ist also die Transformationsformel für die Ableitung Dq . Uns interessiert die Spur dieser Identität

$$\text{trace}_y Dq^k = \sum_{i=0}^n q_i^k \circ Y_{i'j}.$$

Hier meint “trace_y” die Spur in allen y_i -Koordinaten, also für $i = 0, \dots, n$ (in der klassischen Physik ist $y = (t, x)$). Dies ergibt

$$\begin{aligned} \text{trace}_y Dq^k \circ Y &= \frac{1}{J} \sum_{j,j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl}'_{,j} q_j^{*l} \text{trace}_y (DY \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j DY^{-1}) \\ &+ \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} q_j^{*l} \text{trace}_y \left(D \left(\frac{Y_{i'j}}{J} \right) DY^{-1} \right) + \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} \text{trace}_y (DY Dq^{*l} DY^{-1}). \end{aligned}$$

Nun gilt:

- (1) Für jede Matrix M ist $\text{trace}_y (DYM DY^{-1}) = \text{trace}_y M$.
- (2) Für $j = 0, \dots, n$ ist $\text{trace}_y \left(D \left(\frac{Y_{i'j}}{J} \right) DY^{-1} \right) = 0$.

Somit reduziert sich die Formel zu

$$\text{trace}_y Dq^k \circ Y = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl'j} q_j^{*l} + \frac{1}{J} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^N Z_{kl} \text{trace}_y Dq^{*l},$$

was die Formel in (15.4) für $\mathbf{r}^k = \text{trace}_y Dq^k$ ist. \square

Beweis der Identität (1). Es ist

$$\begin{aligned} \text{trace}_y (DY M DY^{-1}) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{e}_i \bullet (DY M DY^{-1} \mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{k,l,i=0}^n M_{kl} \mathbf{e}_i \bullet (DY \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l DY^{-1}) \mathbf{e}_i = \sum_{k,l,i=0}^n M_{kl} \mathbf{e}_i \bullet (DY \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_l \bullet (DY^{-1} \mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{k,l,i=0}^n M_{kl} \mathbf{e}_i \bullet (DY \mathbf{e}_k) \cdot (DY^{-T} \mathbf{e}_l) \bullet \mathbf{e}_i = \sum_{k,l=0}^n M_{kl} (DY \mathbf{e}_k) \bullet (DY^{-T} \mathbf{e}_l) \\ &= \sum_{k,l=0}^n M_{kl} (DY^{-1} DY \mathbf{e}_k) \bullet \mathbf{e}_l = \sum_{k,l=0}^n M_{kl} \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{e}_l = \sum_{k=0}^n M_{kk} = \sum_{k=0}^n \mathbf{e}_k \bullet (M \mathbf{e}_k), \end{aligned}$$

was $\text{trace}_y M$ ist. \square

Beweis der Identität (2). Wir setzen $A = DY$ also $J = \det A$. Die Adjunkte von A erfüllt

$$A \text{adj}(A) = (\det A) \text{Id}$$

und die Jacobi'sche Formel ist

$$\partial_i \det A = \text{trace}(\text{adj}(A) \partial_i A).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \text{trace} \left(D \left(\frac{Y_{i'}}{J} \right) \text{adj}(DY) \right) &= \sum_{kl} \left(\frac{Y_{k'l'}}{J} \right)_{,i'} (\text{adj}(DY))_{lk} \\ &= \frac{1}{J^2} \sum_{kl} (J A_{kl' i'} \text{adj}(DY)_{lk} - J_{,l'} A_{k' i'} \text{adj}(DY)_{lk}) = \frac{1}{J^2} (J J_{,i'} - \sum_l J_{,l'} J \delta_{li}) = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. \square

Beweis 2. Dies ist eine andere Version des Beweises mit Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N)$. Es ist

$$\sum_{i=0}^n J(\zeta_k q_i^k) \circ Y = \sum_{i=0}^n J(\partial_i(\zeta_k q_i^k)) \circ Y - \sum_{i=0}^n J(\partial_i \zeta_k q_i^k) \circ Y.$$

Unter Benutzung der Formel (15.4) für q_i^k ist der zweite Summand gleich

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n J(\partial_i \zeta_k q_i^k) \circ Y &= \sum_{\bar{k}=1}^N \sum_{i,j=0}^n \partial_i \zeta_k \circ Y Y_{i' j} Z_{k \bar{k}} q_j^{* \bar{k}} = \sum_{\bar{k}=1}^N \sum_{j=0}^n \partial_j (\zeta_k \circ Y) Z_{k \bar{k}} q_j^{* \bar{k}} \\ &= \sum_{\bar{k}=1}^N \sum_{j=0}^n \partial_j (\zeta_k \circ Y Z_{k \bar{k}} q_j^{* \bar{k}}) - \sum_{\bar{k}=1}^N \sum_{j=0}^n \zeta_k \circ Y \partial_j (Z_{k \bar{k}} q_j^{* \bar{k}}). \end{aligned}$$

Indem wir die Testfunktionen

$$\zeta_{\bar{k}}^* := \sum_{k=1}^N Z_{k \bar{k}} \zeta_k \circ Y$$

definieren, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n J(\zeta_k q_i^k) \circ Y &= \sum_{k,\bar{k}=1}^N \sum_{j=0}^n \zeta_k \circ Y \partial_j (Z_{k \bar{k}} q_j^{* \bar{k}}) \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n J(\partial_i(\zeta_k q_i^k)) \circ Y + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^n \partial_j (\zeta_k^* q_j^{* \bar{k}}). \end{aligned}$$

Wir integrieren nun und sehen dass die letzten beiden Terme verschwinden. Also bleiben die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^n J q_i^k \circ Y = \sum_{\bar{k}=1}^N \sum_{\bar{j}=0}^n \partial_{\bar{j}} (Z_{k\bar{k}} q_{\bar{j}}^{*\bar{k}}) = \sum_{\bar{k}=1}^N \sum_{\bar{j}=0}^n (Z_{k\bar{k}} \prime_{\bar{j}} q_{\bar{j}}^{*\bar{k}} + Z_{k\bar{k}} q_{\bar{j}}^{*\bar{k}} \prime_{\bar{j}}),$$

was die zu zeigende Identität in (I5.4) für $\mathbf{r}^k = \sum_{i=0}^n q_i^k \prime_i$ ist. □

In diesem Abschnitt haben wir es zu tun mit klassischer Physik, d.h. mit Koordinaten $y = (t, x) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Speziell ist damit, dass die Zeitkomponente der Transformation nur eine Translation in der Zeit ist,

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = y = Y(y^*) = Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t^* + \mathbf{a} \\ X(t^*, x^*) \end{bmatrix} \quad (\text{I5.9})$$

mit einer Konstanten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, wobei die Koordinaten $y^* = (t^*, x^*) \in \mathcal{U}^*$ in die Koordinaten $y = (t, x) \in \mathcal{U}$ transformiert werden mit einer positiven Jacobi'schen Determinante, also

$$J = \det D_{y^*} Y = \det D_{x^*} X > 0.$$

Die Funktion q_0^k nennen wir nun auch $u^k := q_0^k$ und das System ist gegeben durch L_{loc}^1 -Lösungen $u^k, q_i^k, i = 1, \dots, n$, und L_{loc}^1 -Funktionen \mathbf{r}^k der folgenden Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t [u^k] + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} [q_i^k] = [\mathbf{r}^k] \text{ for } k = 1, \dots, N \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{U}). \quad (\text{I5.10})$$

Wir werden dies in diesem Kapitel anwenden für

- $N = 1, Z = 1$ auf Zylinderkoordinaten in 5.4,
- $N = n + 1, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & DX \end{bmatrix}$ auf die rotierende Erde in 5.5,
- $N = n + 1, Z = \text{Id}$ auf deformierbare Körper in Abschnitt 6,

und in Abschnitt II.3 für

- $N = 1$ auf die Massenbilanz mit $Z = 1$,
- $N = n + 1$ auf die Masse-Impuls-Bilanz mit

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & DX \end{bmatrix},$$

- $N = n + 2$ auf die Masse-Impuls-Energie-Bilanz mit

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dot{X} & DX & 0 \\ \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 & \dot{X}^T Q & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix Z in (I5.3) ist eine beliebige invertierbare Matrix. Im konkreten Fall ist entweder Z gegeben oder Z muss so gewählt werden, dass die Gleichung (I5.7) für (u^*, q^*, \mathbf{r}^*) die gewünschte Gleichung in (t^*, x^*) ist. Dann liest sich die Transformation (I5.4) (beachte, dass jetzt i und j von 1 bis n laufen)

Invarianz des Divergenzgleichungssystems bzgl. Z :

$$\partial_t[u^k] + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}[q_i^k] = [\mathbf{r}^k] \text{ for } k = 1, \dots, N$$

unter der Transformation $\zeta^* = Z^T \zeta \circ Y$

wobei Y wie in (I5.9)

falls die folgenden **Transformationsregeln** gelten:

$$u^k \circ Y = \frac{1}{J} \sum_l Z_{kl} u^{*l}, \quad J := \det D_{x^*} X > 0 \quad (\text{I5.11})$$

$$q_i^k \circ Y = \frac{1}{J} \left(\sum_l \dot{X}_i Z_{kl} u^{*l} + \sum_{j,l} X_{i'j} Z_{kl} q_j^{*l} \right)$$

$$\mathbf{r}^k \circ Y = \frac{1}{J} \left(\sum_l \dot{Z}_{kl} u^{*l} + \sum_{j,l} Z_{kl'j} q_j^{*l} + \sum_l Z_{kl} \mathbf{r}^{*l} \right)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, N$,

wobei j von $1, \dots, n$ und l von $1, \dots, N$ läuft

This follows from (I5.8), since in this classical sense for $i, j = 1, \dots, n$

$$Y_{0'0} = 1, \quad Y_{0'j} = 0, \quad Y_{i'0} = \dot{X}_i, \quad Y_{i'j} = X_{i'j}.$$

We mention that if we write the terms with u^k , $k = 1, \dots, N$, in vectorial form $u = (u^1, \dots, u^N)$, the transformation rule for u is

$$u \circ Y = \frac{1}{J} Z u^*,$$

that is, in classical physics the matrix Z can be considered as the transformation rule for u . Als erstes Beispiel nehmen wir zunächst die Zylinderkoordinaten von 1.10.

5.4 Beispiel (Zylinderkoordinaten). Wir betrachten eine Transformation der Koordinaten (r, θ, z) in die physikalischen Koordinaten $x = (x_1, x_2, x_3)$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \tau(t, r, \theta, z) := \begin{bmatrix} t \\ r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix},$$

wobei die Zeit invariant bleibt. Ist dann $\partial_t u + \operatorname{div}_x q = \mathbf{r}$ ein Erhaltungssatz, den wir schreiben als

$$\partial_t u + \partial_{x_1} q_1 + \partial_{x_2} q_2 + \partial_{x_3} q_3 = \mathbf{r},$$

und sind die transformierten Größen von u und q wie in 1.10 definiert, so gilt

$$\partial_t(r \cdot \underline{u}) + \partial_r(r \cdot \underline{q}_r) + \partial_\theta q_\theta + \partial_z(r \cdot \underline{q}_z) = r \cdot \underline{\mathbf{r}},$$

d.h. es folgt die Differentialgleichung (II.18).

Beweis. Es ist $Y = \tau$ wie in 1.10, $X = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, und es gilt in Zylinderkoordinaten

$$\partial_t u^* + \operatorname{div}_{(r,\theta,z)} q^* = \mathbf{r}^*,$$

wenn (u^*, q^*, \mathbf{r}^*) nach (I5.11) mit $N = 1$ und $Z = 1$ (es ist $u^* = q_0^*$) die Gleichungen

$$\begin{aligned} u \circ Y &= \frac{1}{J} u^*, & J &= \det DX = r, \\ q \circ Y &= \frac{1}{J} DX q^* \\ \mathbf{r} \circ Y &= \frac{1}{J} \mathbf{r}^* \end{aligned}$$

erfüllt, wobei wir ausgenutzt haben, dass X von t unabhängig ist. Wir benutzen für die Transformation der Flusswerte

$$\begin{aligned} DX &= [X'_{\tau_1} \quad X'_{\tau_2} \quad X'_{\tau_3}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_r &= \tilde{\mathbf{e}}_r(r, \theta, z), & \mathbf{e}_\theta &= \tilde{\mathbf{e}}_\theta(r, \theta, z), & \mathbf{e}_z &= \tilde{\mathbf{e}}_z(r, \theta, z), \\ \tilde{\mathbf{e}}_r(r, \theta, z) &= \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbf{e}}_\theta(r, \theta, z) &= \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbf{e}}_z(r, \theta, z) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für das Weitere geben wir zwei Versionen an.

1. *Version:* Die obige Gleichung nach q^* aufgelöst ergibt

$$q^* = J(DX)^{-1} q \circ Y.$$

Von 1.10 haben wir die Darstellung (II.16) $q = q_r \mathbf{e}_r + q_\theta \mathbf{e}_\theta + q_z \mathbf{e}_z$, aus der $q \circ Y = q_r \circ Y \tilde{\mathbf{e}}_r + q_\theta \circ Y \tilde{\mathbf{e}}_\theta + q_z \circ Y \tilde{\mathbf{e}}_z$ folgt, und damit

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix} = q^* = J(DX)^{-1} q \circ Y = J(DX)^{-1} [\tilde{\mathbf{e}}_r \quad \tilde{\mathbf{e}}_\theta \quad \tilde{\mathbf{e}}_z] \begin{bmatrix} q_r \circ Y \\ q_\theta \circ Y \\ q_z \circ Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{e}}_r \ \tilde{\mathbf{e}}_\theta \ \tilde{\mathbf{e}}_z] \begin{bmatrix} q_r \circ Y \\ q_\theta \circ Y \\ q_z \circ Y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \circ Y \\ q_\theta \circ Y \\ q_z \circ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r q_r \circ Y \\ q_\theta \circ Y \\ r q_z \circ Y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

oder

$$q_1^* = r \cdot q_r \circ Y, \quad q_2^* = q_\theta \circ Y, \quad q_3^* = r \cdot q_z \circ Y.$$

2. Version: Mit der Darstellung von $q = q_r \hat{\mathbf{e}}_r + q_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + q_z \hat{\mathbf{e}}_z$ in (I1.16), wobei $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z) = (\tilde{\mathbf{e}}_r, \tilde{\mathbf{e}}_\theta, \tilde{\mathbf{e}}_z) \circ Y^{-1}$, folgt

$$\begin{aligned}
&q_r \circ Y \tilde{\mathbf{e}}_r + q_\theta \circ Y \tilde{\mathbf{e}}_\theta + q_z \circ Y \tilde{\mathbf{e}}_z = q \circ Y \\
&= \frac{1}{r} \text{DX} q^* = \frac{1}{r} \text{DX} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix} = \frac{1}{r} (q_1^* \tilde{\mathbf{e}}_r + r q_2^* \tilde{\mathbf{e}}_\theta + q_3^* \tilde{\mathbf{e}}_z),
\end{aligned}$$

und damit in Zylinderkoordinaten

$$q_1^* = r \cdot q_r \circ Y, \quad q_2^* = q_\theta \circ Y, \quad q_3^* = r \cdot q_z \circ Y.$$

In beiden Versionen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{div}_{(r,\theta,z)} q^* &= \partial_r q_1^* + \partial_\theta q_2^* + \partial_z q_3^* \\
&= \partial_r (r \cdot q_r \circ Y) + \partial_\theta (q_\theta \circ Y) + \partial_z (r \cdot q_z \circ Y).
\end{aligned}$$

Da weiter $u^* = r \cdot u \circ Y$ sowie $\mathbf{r}^* = r \cdot \mathbf{r} \circ Y$ folgt die Behauptung, wenn man die unterstrichenen Größen aus 1.10 verwendet. \square

Analog kann man auch Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n betrachten, siehe dazu IV.8.3. Wir geben nun ein weiteres Beispiel. Wir betrachten eine Koordinatentransformation, welche eine ‘‘Beobachtertransformation’’ (zu diesem Begriff siehe den Abschnitt II.1) ist.

5.5 Strömung auf der Erde. Wir betrachten das äußere der festen Erde, modelliert als eine Kugel,

$$D := \{x^* \in \mathbb{R}^3; |x^*| > R\}$$

und dort, d.h. in $\mathbb{R} \times D$, eine Massen-Impuls-Bilanz

$$\begin{aligned}
\partial_{t^*} \varrho^* + \text{div}_{x^*} (\varrho^* v^*) &= 0, \\
\partial_{t^*} (\varrho^* v^*) + \text{div}_{x^*} (\varrho^* v^* v^{*\Gamma} + \Pi^*) &= \mathbf{f}^*.
\end{aligned}$$

Hier ist zum Beispiel der Drucktensor $\Pi^* = p^* \text{Id} - S^*$ mit p^* und S^* wie in (I3.32) gesetzt, und die Kraft $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_0^*$ ist gleich der Gravitationskraft

der Erde. Andere Kräfte, wie die Gravitationskraft der Sonne, werden hier vernachlässigt. Da wir davon ausgehen, dass wir die Erde von außen sehen, haben wir nichttriviale Randbedingungen

$$v^*(t^*, x^*) = v_0^*(x^*) \text{ für } x^* \in \partial D,$$

$$v_0^*(x^*) = \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \omega \cdot \begin{bmatrix} -x_2^* \\ x_1^* \\ 0 \end{bmatrix},$$

vorzuschreiben, wobei $\omega > 0$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist, wenn die x_3 -Achse nach Norden zeigt (bzw. ω ist negativ, wenn die x_3 -Achse nach Süden zeigt). *Bemerkung: Wir betrachten keine Randbedingung an v^* nach außen. Dies ist ein anderes Problem.*

Wir führen nun x als die Raumkoordinaten der Erde ein in einem System, das sich mit der Erde mitdreht,

$$t = t^*, \quad x = Q(t^*)x^*,$$

$$Q(t^*) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t^*) & \sin(\omega t^*) & 0 \\ -\sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Behauptung: Definiere ϱ , v , Π durch

$$\varrho(t, x) = \varrho^*(t^*, x^*),$$

$$v(t, x) = \dot{Q}(t^*)x^* + Q(t^*)v^*(t^*, x^*),$$

$$\Pi(t, x) = Q(t^*)\Pi^*(t^*, x^*)Q(t^*)^T,$$

so gelten nun die Randbedingungen

$$v(t, x) = 0 \text{ für } x \in \partial D$$

und es gilt derselbe Satz von Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}_x(\varrho v v^T + \Pi) = \mathbf{f},$$

in $\mathbb{R} \times D$ allerdings mit dem Unterschied, dass nun

$$\mathbf{f}(t, x) = \varrho(t, x) \cdot \left(\underbrace{\omega^2 I x}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{2\omega A v(t, x)}_{\text{Coriolis-Kraft}} \right) + \mathbf{f}_0(t, x),$$

$$\text{wobei } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_0 := (Q\mathbf{f}_0^*) \circ Y^{-1},$$

d.h. \mathbf{f} enthält zusätzlich eine Zentrifugalkraft und eine Coriolis-Kraft.

Die in \mathbf{f} enthaltenen ‘‘Scheinkräfte’’, also die hier genannte Coriolis-Kraft und die Zenrifugalkraft, spielen eine entscheidende Rolle auf der Erdoberfläche und der Erdatmosphäre. Sie sind für einen auf der Erde lebenden Beobachter immer wirksam, obwohl sie Scheinkräfte genannt und oft vernachlässigt werden. Es sei verwiesen auf das Foucault’sche Pendelexperiment [131], siehe auch [21, Foucault’sches Pendel], mit dem 1851 in Paris bewiesen wurde, dass die Corioliskraft auf der Erde existiert. Mathematisch ist der Zusammenhang zwischen den (t, x) und den (t^*, x^*) Koordinaten gegeben durch

$$(t, x) = Y(t, x^*) = (t, Q(t)x^*),$$

oder

$$\begin{aligned} t &= t^*, \\ x &= X(t^*, x^*) = Q(t^*)x^*, \end{aligned} \tag{I5.12}$$

d.h. eine Transformation wie in (I5.9). Zum Beispiel ist $\mathbf{f}_0 := Q\mathbf{f}_0^* \circ Y^{-1}$ die Schwerkraft der Erde, eine Funktion, die nur vom Abstand $|x| = |x^*|$ vom Erdmittelpunkt 0 abhängt (falls die Erde als radialsymmetrisch modelliert wird).

Beweis der Differentialgleichung. Die $n + 1$ Differentialgleichungen sind

$$\begin{aligned} \partial_{t^*} \varrho^* + \operatorname{div}_{x^*}(\varrho^* v^*) &= 0, \\ \partial_{t^*}(\varrho^* v^*) + \operatorname{div}_{x^*}(\varrho^* v^* v^{*\Gamma} + \Pi^*) &= \mathbf{f}^*, \end{aligned}$$

die wir auch in Vektorform schreiben können

$$\partial_{t^*} \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix} + \operatorname{div}_{x^*} \begin{bmatrix} \varrho^* v^* \\ \varrho^* v^* v^{*\Gamma} + \Pi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^* \end{bmatrix},$$

oder

$$\partial_{t^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix}}_{=: u^*} + \sum_{j \geq 1} \partial_{x_j^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \varrho^* v_j^* \\ \varrho^* v_j^* v^* + (\Pi_{lj}^*)_l \end{bmatrix}}_{=: q_j^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^* \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{r}^*},$$

d.h. in einer Version, die (I5.1) entspricht. Wir wissen von Theorem 5.1, dass die Gleichung

$$\partial_t u + \sum_{i \geq 1} \partial_{x_i} q_i = \mathbf{r} \tag{I5.13}$$

gilt, wenn die Größen $(u, q_1, \dots, q_n, \mathbf{r})$ die Transformationsformel (I5.11) erfüllen, wobei wir hier setzen

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \quad \text{für Masse-Impuls Gleichung.}$$

Wir erhalten, da $J = \det DX = 1$,

$$\begin{aligned} u \circ Y &= Zu^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \left(\varrho^* (\dot{X}_k + \sum_j Q_{kj} v_j^*) \right)_{k \geq 1} \end{bmatrix}, \\ q_i \circ Y &= \dot{X}_i Z u^* + \sum_{j \geq 1} X_{i'j} Z q_j^* \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \left(\dot{X}_i \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix} + \sum_{j \geq 1} Q_{ij} \begin{bmatrix} \varrho^* v_j^* \\ \varrho^* v_j^* v^* + (\Pi_{lj}^*)_l \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \varrho^* (\dot{X}_i + \sum_j Q_{ij} v_j^*) \\ \varrho^* (\dot{X}_i + \sum_j Q_{ij} v_j^*) (\dot{X} + Q v^*) + \sum_{j \geq 1} Q_{ij} Q (\Pi_{lj}^*)_l \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definieren wir nun ϱ, v etc. dadurch, dass diese Größen u, q etc. ergeben, so wie u^*, q^* etc. durch ϱ^*, v^* etc. definiert waren, so erhalten wir

$$\partial_t \underbrace{\begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \end{bmatrix}}_{:= u} + \sum_{i \geq 1} \partial_{x_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \varrho v_i \\ \varrho v_i v + (\Pi_{li})_l \end{bmatrix}}_{:= q_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{r}}, \quad (\text{I5.14})$$

was möglich ist, denn es ist $q_i^0 = u_i$ für $i \geq 1$ und die erste Komponente von \mathbf{r} ist Null, denn (I5.11) sagt

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \circ Y &= \dot{Z} u^* + \sum_{j \geq 1} Z_{i'j} q_j^* + Z \mathbf{r}^* \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{X} & \dot{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix} + \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{X}'_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho^* v_j^* \\ \varrho^* v_j^* v^* + (\Pi_{lj}^*)_l \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \varrho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q} v^*) + Q \mathbf{f}^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

since $\dot{X}'_j = \left(\dot{Q}_{kj} \right)_k$ is a consequence of (I5.12). Hence the force \mathbf{f} is defined by (see also (II3.18))

$$\mathbf{f} \circ Y = \varrho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q} v^*) + Q \mathbf{f}^*. \quad (\text{I5.15})$$

We see that \mathbf{f} is nonzero, even if \mathbf{f}^* is zero. Then the equation (I5.14) is

$$\partial_t \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \end{bmatrix} + \operatorname{div}_x \begin{bmatrix} \varrho v \\ \varrho v v^T + \Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{bmatrix},$$

where \mathbf{f} is given by (I5.15). In order to compute \mathbf{f} we define \mathbf{f}_0 by

$$\mathbf{f}_0 := (Q \mathbf{f}^*) \circ Y^{-1}, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{f}_0^*$$

and then

$$\mathbf{f} = (\varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*)) \circ Y^{-1} + \mathbf{f}_0.$$

We want to write the first term on the right-hand side in terms of ϱ and v . If we use the formulas in (I5.14), we get

$$\varrho^* = \varrho \circ Y, \quad v^* = Q^T v \circ Y - Q^T \dot{X},$$

and therefore

$$\varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) = \varrho \circ Y((\ddot{X} - 2\dot{Q}Q^T \dot{X}) + 2\dot{Q}Q^T v \circ Y),$$

thus

$$\mathbf{f} = \varrho \underbrace{(\ddot{X} - 2\dot{Q}Q^T \dot{X}) \circ Y^{-1}}_{=\omega^2 I x} + 2\varrho \underbrace{(\dot{Q}Q^T) \circ Y^{-1}}_{=\omega A} v + \mathbf{f}_0,$$

where we have to compute the matrices I and A . Now for our special transformation $x = X(t, x^*) = Q(t)x^*$:

$$\dot{X} = \dot{Q}x^* = \dot{Q}Q^T x, \quad \ddot{X} = \ddot{Q}x^* = \ddot{Q}Q^T x$$

$$\ddot{X} - 2\dot{Q}Q^T \dot{X} = (\ddot{Q}Q^T - 2(\dot{Q}Q^T)^2)x,$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{Q}(t) = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ -\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q(t)^T = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{Q}Q^T = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \omega A,$$

$$\ddot{Q} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{Q}Q^T = -\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: -\omega^2 I, \quad A^2 = -I,$$

$$\ddot{Q}Q^T - 2(\dot{Q}Q^T)^2 = -\omega^2 I - 2(\omega A)^2 = \omega^2 I.$$

The result follows. \square

Beweis der Randbedingung. Für $x \in \partial D$, also auch $x^* \in \partial D$, falls x und x^* zusammenhängen wie in (15.12), gilt

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \dot{Q}(t^*)x^* + Q(t^*)v^*(t^*, x^*) \\ &= \dot{Q}(t^*)x^* + Q(t^*)v_0^*(x^*) \\ &= \omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) & 0 \\ -\cos(\omega t^*) & -\sin(\omega t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \\ &\quad + \omega \begin{bmatrix} \cos(\omega t^*) & \sin(\omega t^*) & 0 \\ -\sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2^* \\ x_1^* \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Dass x die Koordinaten der Erde sind, lässt sich auch wie folgt einsehen: Im (x_1^*, x_2^*) -System definiere

$$e_1^*(t^*) := e^{i\omega t^*} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t^*) \\ \sin(\omega t^*) \end{bmatrix}, \quad e_2^*(t^*) := ie_1^*(t^*) = \begin{bmatrix} -\sin(\omega t^*) \\ \cos(\omega t^*) \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\{e_1^*, e_2^*\}$ ein Orthonormalsystem, das sich mit der Erde mitdreht, und es ist $(x_1^*, x_2^*) = x_1 e_1^* + x_2 e_2^*$ mit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} x^* \bullet e_1^* \\ x^* \bullet e_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \bullet e_1^* & e_2 \bullet e_1^* \\ e_1 \bullet e_2^* & e_2 \bullet e_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} e_1 \bullet e_1^* & e_2 \bullet e_1^* \\ e_1 \bullet e_2^* & e_2 \bullet e_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\omega t^*) & \sin(\omega t^*) \\ -\sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Die Physik ist für unterschiedliche Geschwindigkeiten dieselbe, wenn diese verschiedenen Geschwindigkeiten durch eine Beobachtertransformation auseinander hervorgehen, oder anders ausgedrückt, die Physik hängt nicht vom Beobachter ab. Wenn wir v^* durch v ersetzen, muss \mathbf{f}^* durch \mathbf{f} ersetzt werden, und die Transformation zwischen \mathbf{f}^* und \mathbf{f} enthält sowohl ϱ als auch v bzw. ϱ^* und v^* . Bei einem Beobachterwechsel müssen alle physikalischen Größen angepasst werden. Also ist insbesondere die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft da oder nicht, je nachdem, welchen Beobachter man darstellt. Was bei einem mit der Erde rotierenden Koordinatensystem die Corioliskraft tut, ist bei einem von außen gegebenen Koordinatensystem durch die Randbedingung für v auf einer gekrümmten Fläche, hier die Oberfläche der Kugel, gegeben.

Wir werden ‘‘Beobachtertransformationen’’ noch systematisch in Abschnitt II.1 untersuchen. Nicht alle in diesem Abschnitt behandelten Transformationen kommen von verschiedenen Beobachtern her, wie wir schon bei dem Beispiel 5.4 gesehen hatten. Das gilt auch für die Transformationen auf Referenzkoordinaten, die wir im nächsten Abschnitt 6 behandeln werden.

6 Referenzkoordinaten

Die Massen- und Impulserhaltung für deformierbare Körper gilt (zunächst) im physikalischen Raum, und in diesen Koordinaten lauten die Erhaltungssätze

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) &= \mathbf{r} , \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}_x(\varrho v v^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}} := \mathbf{f} + \mathbf{r}v .\end{aligned}\tag{I6.1}$$

Dies ist die Bilanz von Masse und Impuls, wobei, wie immer ϱ die Dichte, v die Geschwindigkeit und Π der Drucktensor ist. Ferner ist \mathbf{r} die Reaktionsrate und \mathbf{f} die klassische Kraftdichte, welche man als $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{r}v$ in (II3.17) definiert findet. Siehe die Diskussion zu (I3.2). Wir haben also dieselben Grundgleichungen wie bei Flüssigkeiten in Abschnitt 3, jedoch ist hier v keine unabhängige Variable, sondern durch die Bewegung eines Körpers gegeben. Die Geschwindigkeit wird durch die Referenzabbildung φ gegeben, und Π wird als konstitutive Funktion von den Verformungen des Körpers abhängig gemacht. Der Körper ist also durch Referenzkoordinaten beschrieben, die gegeben sind durch

Referenzkoordinaten:

$$\begin{aligned}\varphi :]t_1, t_2[\times \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{x} \mapsto x = \varphi(t, \underline{x}) \\ &\text{ein Isomorphismus mit } \det D_{\underline{x}}\varphi > 0, \\ (t, \underline{x}) &\mapsto (t, x) = \tau(t, \underline{x}) := (t, \varphi(t, \underline{x}))\end{aligned}\tag{I6.2}$$

$\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ der ungestörte Körper,
 $v(t, x) := \partial_t \varphi(t, \underline{x})$ für $x = \varphi(t, \underline{x})$,
 v die Geschwindigkeit.

Es ist \mathcal{B} der “ungestörte Körper” und das Bild von \mathcal{B} im physikalischen Raum ist $\Omega_t = \{\varphi(t, \underline{x}) ; \underline{x} \in \mathcal{B}\}$, wobei $\Omega_t := \{x \in \mathbb{R}^n ; (t, x) \in \Omega\}$. Die Geschwindigkeit ist $v = \partial_t \varphi$, die behandelt werden kann wie die Geschwindigkeit eines “einzelnen Partikels”, obwohl die physikalischen Atome und Moleküle eine thermische Bewegung vollführen. Es wird hier vorausgesetzt, dass diese thermische Bewegung die Anordnung der Moleküle (im wesentlichen) unverändert lässt.

Wir starten mit folgendem Theorem, welches zeigt that a system of differential equations in physical coordinates is equivalent to a corresponding system in reference coordinates. This is a consequence of the general “Main invariance theorem” 5.1 and shows that the theory of elasticity is a special form of the theory of mass and momentum in physical coordinates.

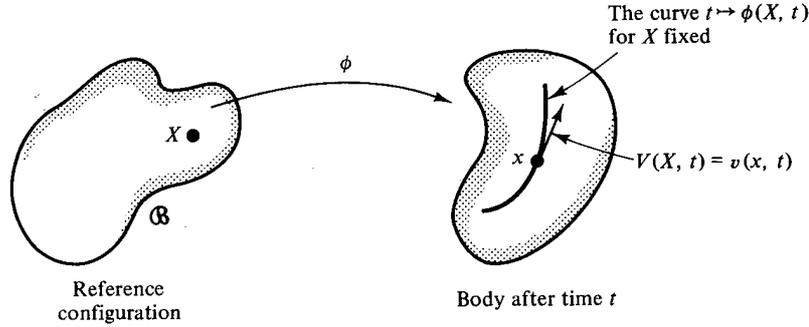


Abb. 22: Dies ist ein Bild aus dem Buch [55] von Marsden & Hughes. Die Abbildung $\underline{x} \mapsto \varphi(t, \underline{x})$ wird “push-forward” Operation und die Umkehrabbildung “pull-back” Operation genannt.

6.1 Theorem. Let $K \in \mathbb{N}$. Under the transformation τ a system of equations

$$\partial_t u^k + \operatorname{div}_x q^k = r^k \text{ for } k = 1, \dots, K \quad \text{in } \Omega$$

is transformed into the “same” system

$$\partial_t \underline{u}^k + \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{q}^k = \underline{r}^k \text{ for } k = 1, \dots, K \quad \text{in } \mathcal{B},$$

if the transformed quantities are given by

$$\begin{aligned} \underline{u}^k &= J u^k \circ \tau, & \underline{r}^k &= J r^k \circ \tau, \\ \underline{q}^k &= J F^{-1} (q^k \circ \tau - u^k \circ \tau V) \end{aligned}$$

for $k = 1, \dots, K$, where $V := \partial_t \varphi$ is the velocity, $F := D_{\underline{x}} \varphi$ the deformation gradient, and $J := \det F > 0$.

Beweis. We use the system for (u, q, r) in (I5.11) with transformation $Y = \tau$, hence $X = \varphi$, and matrix $Z = \operatorname{Id}$. Then it transforms to $\partial_t \underline{u}^k + \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{q}^k = \underline{r}^k$ for $k = 1, \dots, K$, where the functions in the transformed system are called $(\underline{u}, \underline{q}, \underline{r})$ and by (I5.11) they are defined by

$$\begin{aligned} u^k \circ \tau &= \frac{1}{J} \underline{u}^k, & J &:= \det D_{x^*} \varphi > 0, \\ q_i^k \circ \tau &= \frac{1}{J} (\partial_t \varphi_i \cdot \underline{u}^k + \sum_j \partial_{\underline{x}_j} \varphi_i \cdot \underline{q}_j^k), \\ r^k \circ \tau &= \frac{1}{J} \underline{r}^k \end{aligned}$$

for $k = 1, \dots, K$. With $V := (\partial_t \varphi_i)_i$ and $F := \left(\partial_{\underline{x}_j} \varphi_i \right)_{ij}$ one obtains that $J u^k \circ \tau = \underline{u}^k$, $J r^k \circ \tau = \underline{r}^k$, and $J q^k \circ \tau = \underline{u}^k V + F \underline{q}^k$, hence

$$J (q^k \circ \tau - u^k \circ \tau V) = F \underline{q}^k,$$

the assertion. \square

Referenzen: Wir verweisen auf Ciarlet [31] und Marsden & Hughes [55] für einen Vergleich mit der Literatur. Auch sei auf Truesdell & Noll [67] hingewiesen.

Als Anwendung erhalten wir folgenden Satz.

6.2 Theorem. Die Differentialgleichungen (I6.1) lauten in Referenzkoordinaten (I6.2)

$$\begin{aligned}\partial_t \underline{\varrho} &= \underline{\mathbf{r}}, \\ \partial_t(\underline{\varrho}V) - \operatorname{div}_{\underline{x}} P &= \underline{\tilde{\mathbf{f}}} := \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}}V,\end{aligned}\tag{I6.3}$$

wobei die transformierten Größen in (I6.4) definiert sind.

Masse-Impuls in Referenzkoordinaten:

$$\begin{aligned}\partial_t \underline{\varrho} &= \underline{\mathbf{r}}, \\ \partial_t(\underline{\varrho}V) - \operatorname{div}_{\underline{x}} P &= \underline{\tilde{\mathbf{f}}} := \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}}V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &:= \partial_t \varphi = (\partial_t \varphi_i)_i = v \circ \tau \quad \text{Geschwindigkeit,} \\ F &:= D_{\underline{x}} \varphi = \left(\partial_{x_j} \varphi_i \right)_{ij} \quad \text{Deformationsgradient,} \\ J &:= \det F > 0 \quad \text{Determinante,} \\ P &:= J \cdot (-\Pi \circ \tau) F^{-T} \\ &\quad \text{(erster) Piola-Kirchhoff Spannungstensor,} \\ \underline{\varrho} &:= J \cdot (\varrho \circ \tau) \quad \text{Massendichte in Referenzkoordinaten,} \\ \underline{\mathbf{r}} &:= J \cdot (\mathbf{r} \circ \tau) \quad \text{Rate in Referenzkoordinaten,} \\ \underline{\mathbf{f}} &:= J \cdot (\mathbf{f} \circ \tau) \quad \text{Kraftdichte in Referenzkoordinaten.}\end{aligned}\tag{I6.4}$$

Zum Beweis benutzen wir die allgemeine Transformation aus Abschnitt 5.

Beweis (Erste Version). We write the system (I6.1) in the form

$$\partial_t \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \end{bmatrix} + \operatorname{div}_x \begin{bmatrix} \varrho v \\ \varrho v v^T + \Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix},$$

or to have the form of section 5

$$\underbrace{\partial_t \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \end{bmatrix}}_{=: u} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \varrho v_i \\ \varrho v_i v + (\Pi_{ki})_k \end{bmatrix}}_{=: q_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix},$$

which is (I5.11) with $N = n + 1$,

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} q_i = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix},$$

where $Y = \tau$, $X = \varphi$, and we choose for the matrix $Z = \text{Id}$. Then the transformed equations read

$$\partial_t \underline{u} + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \underline{q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (\text{I6.5})$$

if the quantities in this transformed equation satisfy the transformation rules in (I5.11), which are

$$\begin{aligned} u \circ \tau &= \frac{1}{J} \underline{u}, \quad J := \det D_{\underline{x}} X > 0, \\ q_i \circ Y &= \frac{1}{J} \left(\dot{X}_i \underline{u} + \sum_j X_{i'j} \underline{q}_j \right), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \circ \tau &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I6.6})$$

Since $Y = \tau$, $X = \varphi$, we compute

$$\begin{aligned} J &= \det D_{\underline{x}} \varphi = \det F > 0, \\ \dot{X}_i &= \partial_t \varphi = V, \quad X_{i'j} = \varphi_{i'x_j} = F_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{I6.7})$$

Then we get for the first line of (I6.6), since $V = v \circ \tau$,

$$\underline{u} = J u \circ \tau = J \begin{bmatrix} \varrho \circ \tau \\ \varrho \circ \tau v \circ \tau \end{bmatrix} = J \varrho \circ \tau \begin{bmatrix} 1 \\ v \circ \tau \end{bmatrix} = \underline{\varrho} \begin{bmatrix} 1 \\ V \end{bmatrix}$$

and for the second line of (I6.6)

$$q_i \circ \tau = \frac{1}{J} \left(V_i \underline{u} + \sum_j F_{ij} \underline{q}_j \right),$$

hence

$$\begin{aligned} \sum_j F_{ij} \underline{q}_j &= J q_i \circ \tau - V_i \underline{u} \\ &= J \begin{bmatrix} \varrho v_i \\ \varrho v_i v + (\Pi_{ki})_k \end{bmatrix} \circ \tau - V_i \begin{bmatrix} \underline{\varrho} \\ \underline{\varrho} V \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} 0 \\ (\Pi_{ki} \circ \tau)_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

and therefore

$$\underline{q}_j = J \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_i (F^{-1})_{ji} (\Pi_{ki} \circ \tau)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (J (\Pi \circ \tau F^{-T})_{kj})_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(P_{kj})_k \end{bmatrix}.$$

Thus (I6.5) becomes

$$\partial_{\underline{t}} \begin{bmatrix} \underline{\varrho} \\ \underline{\varrho} \underline{V} \end{bmatrix} + \sum_j \partial_{\underline{x}_j} \begin{bmatrix} 0 \\ -(P_{kj})_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{r}} \\ \underline{\tilde{\mathbf{f}}} \end{bmatrix},$$

which is the assertion. The identity $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{r}v$ on the right side of the momentum equation becomes

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = J \underline{\tilde{\mathbf{f}}} \circ \tau = J(\mathbf{f} \circ \tau + \mathbf{r} \circ \tau v \circ \tau) = \underline{\mathbf{f}} + (J \mathbf{r} \circ \tau) v \circ \tau = \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}} V$$

using the definitions. \square

The second version is an explicit computation, where the general statements in section 5 are not used.

Beweis (Zweite Version). The first equation in (I6.1) in its weak form reads

$$\int_{\Omega} (\partial_t \eta \cdot \varrho + \nabla \eta \bullet (\varrho v) + \eta \cdot \mathbf{r}) \, dL^{n+1} = 0$$

for $\eta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. We transform this into an integral over $]t_1, t_2[\times \mathcal{B} = \tau^{-1}(\Omega)$. Defining

$$\tilde{\eta}(t, \underline{x}) = \eta(t, \varphi(t, \underline{x})), \quad \tau(t, \underline{x}) = (t, \varphi(t, \underline{x})),$$

we obtain

$$\partial_t \tilde{\eta} = (\partial_t \eta) \circ \tau + (\nabla \eta) \circ \tau \bullet \partial_t \varphi = (\partial_t \eta + v \bullet \nabla \eta) \circ \tau,$$

and the weak equation becomes, since $J = \det D_{\underline{x}} \varphi = |\det D_{(t, \underline{x})} \tau|$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} (\partial_t \tilde{\eta} \cdot J \varrho \circ \tau + \tilde{\eta} \cdot J \mathbf{r} \circ \tau) \, dL^n \, dL^1 = 0.$$

In its strong version this is

$$\partial_t (J \varrho \circ \tau) = J \mathbf{r} \circ \tau.$$

The second equation in (I6.1) is for $\zeta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\Omega} \left(\partial_t \zeta \bullet (\varrho v) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j \zeta_i \cdot (\varrho v_i v_j + \Pi_{ij}) + \zeta \bullet \tilde{\mathbf{f}} \right) \, dL^{n+1} = 0.$$

Transforming this via $\tilde{\zeta}(t, \underline{x}) = \zeta(t, \varphi(t, \underline{x}))$, so that

$$\partial_t \tilde{\zeta} = (\partial_t \zeta + v \bullet \nabla \zeta) \circ \tau, \quad D_{\underline{x}} \tilde{\zeta} = (D_x \zeta) \circ \tau D_{\underline{x}} \varphi,$$

we see that the above integral equals

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \left((\partial_t \zeta + \sum_{j=1}^n v_j \partial_j \zeta) \bullet (\varrho v) + (D_x \zeta) \bullet \Pi + \zeta \bullet \tilde{\mathbf{f}} \right) dL^{n+1} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \left(\partial_t \tilde{\zeta} \bullet (J(\varrho v) \circ \tau) + J \cdot (D_x \tilde{\zeta} (D_x \varphi)^{-1}) \bullet (\Pi \circ \tau) + \tilde{\zeta} \bullet (J \tilde{\mathbf{f}} \circ \tau) \right) dL^n dL^1 \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \left(\partial_t \tilde{\zeta} \bullet (J(\varrho \circ \tau) V) + (D_x \tilde{\zeta}) \bullet (J(\Pi \circ \tau) (D_x \varphi)^{-T}) + \tilde{\zeta} \bullet (J \tilde{\mathbf{f}} \circ \tau) \right) dL^n dL^1.
\end{aligned}$$

In its strong version this is

$$\partial_t (J(\varrho \circ \tau) V) + \operatorname{div}_x (J(\Pi \circ \tau) (D_x \varphi)^{-T}) = J \tilde{\mathbf{f}} \circ \tau,$$

which is the momentum equation in reference coordinates. \square

As we see, the pressure tensor in the reference coordinates is

$$\Pi \circ \tau = -\frac{1}{J} \cdot P F^T. \quad (\text{I6.8})$$

Thus if the Piola-Kirchhoff tensor P depends only on the first derivatives F of the deformation so also does $\Pi \circ \tau$. So far we have derived the general system of deformable bodies.

(Allgemeine) Nichlineare Deformation:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \underline{\varrho} &= \underline{\mathbf{r}} \\ \partial_t(\underline{\varrho} V) - \operatorname{div}_x P &= \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}} V \end{aligned} \right\} \text{in }]t_1, t_2[\times \mathcal{B}$$

$\underline{\varrho}$ Referenzdichte,

$V = \partial_t \varphi$ Geschwindigkeit, φ wie in (I6.2),

P erster Piola-Kirchhoff Spannungstensor.

$\underline{\mathbf{f}}$ Kraftdichte (es ist $\tilde{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}} V$).

(I6.9)

Es gelten folgende einfache allgemeine Aussagen.

6.3 Lemma. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t F &= D_x V, \\
\partial_t(\underline{\varrho} V) &= \underline{\mathbf{r}} V + \underline{\varrho} \partial_t V.
\end{aligned}$$

Beweis. The second one is the product rule and the mass equation and the first one holds because $\partial_t F = \partial_t D_x \varphi = D_x \partial_t \varphi = D_x V$. \square

Wenn $\mathbf{r} = 0$ dann sagt die erste Gleichung dass $\underline{\rho}$ unabhängig von der Zeit ist. Also bleibt nur die Impulserhaltung übrig. Dies ist die Standardversion für deformierbare Körper, bei der die Massendichte $\underline{x} \mapsto \underline{\rho}(\underline{x})$ gegeben ist und nur die Impulserhaltung für die Funktion φ zu lösen ist:

Klassische Nichtlineare Deformation:

$$\underline{\rho} \partial_t V - \operatorname{div}_{\underline{x}} P = \underline{\mathbf{f}} \text{ in }]t_1, t_2[\times \mathcal{B},$$

$$\underline{\rho} = \underline{\rho}(\underline{x}) \text{ Referenzdichte (da } \underline{\mathbf{r}} = 0), \quad (I6.10)$$

$$V = \partial_t \varphi \text{ Geschwindigkeit, } \varphi \text{ wie in (I6.2),}$$

$$P \text{ erster Piola-Kirchhoff Spannungstensor.}$$

Wir studieren deformierbare Körper weiter in Abschnitt IV.5 über Elastizität, hier betrachten wir jetzt starre Körper.

Starre Körper

Das einfachste Beispiel für einen Körper ist, dass $F^T F$ konstant ist, oder allgemeiner nicht von der Zeit abhängt. Dazu zeigen wir:

6.4 Lemma. Sei \mathcal{B} zusammenhängend. Dann ist das Folgende äquivalent:

(1) Für den Deformationsgradienten gilt $F(t, \underline{x})^T F(t, \underline{x}) = C(\underline{x})$ mit einer von t unabhängigen Funktion $\underline{x} \mapsto C(\underline{x})$.

(2) Für den Geschwindigkeitsgradienten gilt $Dv + (Dv)^T = 0$, d.h. er ist antisymmetrisch.

(3) Für den Geschwindigkeitsvektor gilt $v(t, x) = A(t)x + b(t)$ mit einer antisymmetrischen Matrixfunktion A und einer Vektorfunktion b .

Beweis (1) \Rightarrow (2). Die Eigenschaft, dass C nicht von t abhängt, ist äquivalent zu

$$0 = \partial_t (F^T F) = (\partial_t F)^T F + F^T \partial_t F = F^T (M^T + M) F$$

mit $M := (\partial_t F) F^{-1}$, so dass also $M^T + M = 0$, d.h. M ist antisymmetrisch. Nun ist

$$\partial_t F = \left(\partial_t \partial_{x_j} \varphi_i \right)_{ij} = \left(\partial_{x_j} (\partial_t \varphi_i) \right)_{ij} = \left(\partial_{x_j} V_i \right)_{ij} = DV \quad (I6.11)$$

und wegen $V(t, \underline{x}) = v(t, \varphi(t, \underline{x})) = (v \circ \tau)(t, \underline{x})$ ist

$$\partial_{x_j} V_i = \sum_k (\partial_{x_k} v_i) \circ \tau \cdot \partial_{x_j} \varphi_k = \sum_k (\partial_{x_k} v_i) \circ \tau \cdot F_{kj} = ((Dv \circ \tau) F)_{ij},$$

also

$$\partial_t F = DV = ((Dv) \circ \tau) F .$$

Deswegen ist $M = (\partial_t F) F^{-1} = (Dv) \circ \tau$, das heißt

$$Dv + (Dv)^T = (M + M^T) \circ \tau^{-1} = 0 ,$$

was zu zeigen war. \square

Beweis (3) \Rightarrow (1). The identity

$$V(t, \underline{x}) := \partial_t \varphi(t, \underline{x}) = v(t, \varphi(t, \underline{x})) = A(t) \varphi(t, \underline{x}) + b(t)$$

yields by (I6.11)

$$\partial_t F = D_{\underline{x}} V = A(t) D_{\underline{x}} \varphi = A(t) F .$$

This implies

$$\partial_t (F^T F) = (\partial_t F)^T F + F^T \partial_t F = (AF)^T F + F^T AF = F^T (A^T + A) F = 0 ,$$

hence $F^T F$ is independent of time. \square

Beweis (2) \Rightarrow (3). Unter mehrmaliger Benutzung der Antisymmetrie von Dv erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_{ij} v_k &= \partial_i (\partial_j v_k) \\ &= -\partial_i (\partial_k v_j) + \partial_i \underbrace{(\partial_j v_k + \partial_k v_j)}_{= 0} \\ &= -\partial_i (\partial_k v_j) = -\partial_k (\partial_i v_j) \\ &= \partial_k (\partial_j v_i) - \partial_k \underbrace{(\partial_i v_j + \partial_j v_i)}_{= 0} \\ &= \partial_k (\partial_j v_i) = \partial_j (\partial_k v_i) \\ &= -\partial_j (\partial_i v_k) + \partial_j \underbrace{(\partial_k v_i + \partial_i v_k)}_{= 0} \\ &= -\partial_j (\partial_i v_k) = -\partial_i (\partial_j v_k) = -\partial_{ij} v_k , \end{aligned}$$

also haben wir gezeigt, dass $\partial_{ij} v_k = 0$ für alle (i, j, k) . Da das Gebiet, das wir betrachten, einfach zusammenhängend ist, folgt aus $D^2 v = 0$, dass v affin linear in x ist, also

$$v(t, x) = M(t)x + b(t) \text{ mit einer Matrix } M \text{ und einem Vektor } b .$$

Dann ist aber $M = Dv$ antisymmetrisch. Ebenso folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass v affin linear in x mit einer antisymmetrischen Matrix ist, die Aussage (2). \square

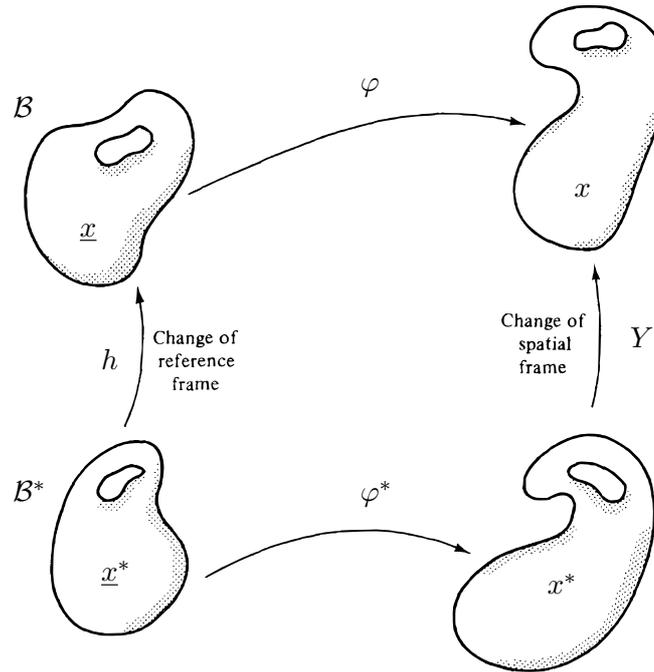


Abb. 23: Verschiedene Referenzkoordinaten, Bild aus [55]

Ein Körper, für den C nur von \underline{x} abhängt, kann auf einen transformiert werden, bei dem diese Matrix die Identität Id ist.

6.5 Transformation von \mathcal{B} . Sei C eine nur von \underline{x} abhängige Matrix. Es gebe eine Transformation $h: \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}$, siehe Abb. 23, mit

$$H(\underline{x}^*) := D_{\underline{x}^*} h(\underline{x}^*), \quad H(\underline{x}^*)^T C(\underline{x}) H(\underline{x}^*) = \text{Id}, \quad \underline{x} = h(\underline{x}^*).$$

Ist dann φ eine Deformation, so definiere φ^* durch

$$\varphi^*(t, \underline{x}^*) := \varphi(t, h(\underline{x}^*)).$$

Es folgt, dass der Deformationsgradient von φ^*

$$F^*(t, \underline{x}^*) = F(t, h(\underline{x}^*)) H(\underline{x}^*) \quad (\text{I6.12})$$

ist. Ist dann φ eine Deformation wie in 6.4, also $F(t, \underline{x})^T F(t, \underline{x}) = C(\underline{x})$ für alle t , so gilt

$$C^* := F^{*\text{T}} F^* = \text{Id}.$$

Beweis. Using (I6.12) one has

$$C^* = F^{*\text{T}} F^* = (FH)^T FH = H^T F^T FH = H^T CH = \text{Id}.$$

□

Also (siehe Marsden & Hughes [55, CH.2: 3.6]) definieren wir

6.6 Starrer Körper. Ein *starrer Körper* ist dadurch gegeben, dass für den Deformationsgradienten gilt

$$F^T F = \text{Id}, \quad (I6.13)$$

$$\underline{x} \mapsto F(t_0, \underline{x}) \text{ ist konstant für ein } t_0.$$

Ein starrer Körper bewegt sich im physikalischen Raum fort mittels einer Translation und Drehung, d.h es gibt einen Ort $\xi(t)$ und ein Orthonormalsystem $\{e_i(t); i = 1, \dots, n\}$ mit

$$\varphi(t, \underline{x}) = \xi(t) + \sum_{i=1}^n x_i e_i(t). \quad (I6.14)$$

Zusatz: The orthonormal system $t \mapsto \{e_i(t); i = 1, \dots, n\}$ is also called a *moving frame*, since it depends on time.

Beweis. Wir zeigen, dass die beiden Charakterisierungen äquivalent sind. Das Orthonormalsystem definiert eine Matrix $Q(t)$ durch

$$Q(t)z = \sum_{i=1}^n z_i e_i(t) \text{ für } z \in \mathbb{R}^n,$$

so dass also

$$(Q(t)^T Q(t))_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet (Q(t)^T Q(t) \mathbf{e}_j) = (Q(t) \mathbf{e}_i) \bullet (Q(t) \mathbf{e}_j) = e_i \bullet e_j = \delta_{ij},$$

das heißt $Q(t)^T Q(t) = \text{Id}$. Also ist $Q(t)$ eine orthonormale Transformation und die Gleichung (I6.14) wird zu

$$\varphi(t, \underline{x}) = Q(t)\underline{x} + \xi(t). \quad (I6.15)$$

Wir zeigen, dass dies für jedes gegebene t_0 äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(t, \underline{x}) &= A(t)\varphi(t, \underline{x}) + b(t) \text{ wobei } A(t) \text{ antisymmetrisch,} \\ \varphi(t_0, \underline{x}) &= Q_0 \underline{x} + \xi_0 \text{ für ein } \xi_0 \text{ und ein orthonormales } Q_0. \end{aligned} \quad (I6.16)$$

In der Tat, es folgt aus (I6.15), dass

$$\partial_t \varphi(t, \underline{x}) = \dot{Q}(t)\underline{x} + \dot{\xi}(t) = \dot{Q}(t)Q(t)^T \varphi(t, \underline{x}) + \dot{\xi}(t) - \dot{Q}(t)Q(t)^T \xi(t),$$

also (I6.16) mit $b = \dot{\xi} - \dot{Q}Q^T \xi$ und $A = \dot{Q}Q^T$, was antisymmetrisch ist, da Q orthonormal ist. Umgekehrt, wenn (I6.16) gilt, folgt für jede Matrix $M(t)$ und jeden Vektor $\xi(t)$

$$\begin{aligned} \partial_t (\varphi - M\underline{x} - \xi) &= \partial_t \varphi - \dot{M}\underline{x} - \dot{\xi} = A\varphi + b - \dot{M}\underline{x} - \dot{\xi} \\ &= A(\varphi - M\underline{x} - \xi) - (\dot{M} - AM)\underline{x} - (\dot{\xi} - A\xi - b). \end{aligned}$$

Nun bestimme M und ξ aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{M} &= AM \text{ mit } M(t_0) = Q_0, \\ \dot{\xi} &= A\xi + b \text{ mit } \xi(t_0) = \xi_0,\end{aligned}$$

so dass dann also

$$\begin{aligned}\partial_t(\varphi - M\underline{x} - \xi) &= A(\varphi - M\underline{x} - \xi), \\ \varphi(t_0, \underline{x}) - M(t_0)\underline{x} - \xi(t_0) &= 0,\end{aligned}$$

und daher $\varphi(t, \underline{x}) = M(t)\underline{x} + \xi(t)$ für alle t , das ist (I6.15), wenn $M(t)$ eine orthonormale Transformation ist. Um dies zu zeigen, realisiere dass $M(t_0) = Q_0$ orthonormal ist, daher $M(t_0)^T M(t_0) - \text{Id} = 0$ und

$$\begin{aligned}(M^T M - \text{Id}) \cdot &= \dot{M}^T M + M^T \dot{M} \\ &= (AM)^T M + M^T AM = M^T A^T M + M^T AM \\ &= M^T \underbrace{(A + A^T)}_{= 0} M.\end{aligned}$$

Daraus folgt $M(t)^T M(t) - \text{Id} = 0$ und damit, dass $M(t)$ orthonormal ist.

Damit ist also gezeigt, dass die Formulierung für φ im Satz äquivalent zu (I6.16) ist. Wir zeigen, dass (I6.16) äquivalent zur ersten Darstellung starrer Körper im Satz ist. Die erste Zeile in (I6.16) ist äquivalent zu

$$v(t, \varphi(t, \underline{x})) = A(t)\varphi(t, \underline{x}) + b(t)$$

oder zu

$$v(t, x) = A(t)x + b(t).$$

Nun folgt aus 6.4, dass dies äquivalent ist zu $F(t, \underline{x})^T F(t, \underline{x}) = C(\underline{x})$, und die zweite Zeile in (I6.16) ist äquivalent zu $F(t_0, \underline{x}) = D\varphi(t_0, \underline{x}) = Q_0$, was unabhängig von \underline{x} ist. Diese Matrix muss eine orthonormale Transformation sein, da $F(t_0, \underline{x})^T F(t_0, \underline{x}) = \text{Id}$ nach der Aussage in 6.4. \square

Desweiteren siehe den Abschnitt II.5 über die Objektivität und darauf aufbauend den Abschnitt IV.5 über Elastizitätstheorie.

7 Aufgaben

Erhaltungsgleichungen

7.1 Definition der Ableitung. Die Ableitung einer Funktion f auf \mathbb{R}^N mit Werten in \mathbb{R}^M wird in der Regel als lineare Abbildung $Df(x): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ mit

$$f(y) = f(x) + Df(x)(y - x) + \mathcal{O}(y - x)$$

definiert. Es ist dann für $z \in \mathbb{R}^N$

$$Df(x)z = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_N f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_M & \cdots & \partial_N f_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}.$$

Das ist in Übereinstimmung mit der Definition $Df(x)$ als Matrix in Abschnitt 1. Vergleiche dies mit der Definition des Gradienten $\nabla f(x)$.

7.2 Identitäten für Ableitungen. Für ein Vektorfeld q im \mathbb{R}^n gilt

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} q &= (Dq)e_i \text{ für } i = 1, \dots, n, \\ \partial_e q &= (Dq)e \text{ für } e \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_{x_i} q_k &= e_k \bullet (Dq)e_i \text{ für } k, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

7.3 Übung. Sei $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , die von x abhängt. Zeige, dass für stetig differenzierbares

(1) $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla p = \sum_{i=1}^n (\partial_{e_i} p) e_i,$$

(2) $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$Dv = \sum_{i=1}^n (\partial_{e_i} v) e_i^T = \sum_{i,j=1}^n (e_i \bullet \partial_{e_j} v) e_i e_j^T.$$

Hinweis: Benutze die entsprechende Aussage für die Divergenz.

7.4 Übung. Sei $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , die von x abhängt. Zeige, dass für ein Vektorfeld $q \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ für jede Funktion $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{e_i} \zeta \cdot q \bullet e_i \, dL^n = - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \zeta e_i \bullet \partial_{e_i} q \, dL^n.$$

Bemerkung: Es gilt im Allgemeinen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{e_i} (\zeta \cdot q \bullet e_i) \, dL^n \neq 0.$$

7.5 Übung. Sei $\sigma, \omega \in C^1(\mathbb{R})$ und mit $n = 2$ ($\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$)

$$\varrho(t, x) = \sigma(|x|), \quad v(t, x) = i\omega(|x|x).$$

Zeige $\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0$ in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

7.6 Übung. Beweise die Gleichungen in 1.4

7.7 Beispiel. Es sei $v(t, x) = s(t, x)x$, d.h. die Geschwindigkeit zeigt

- vom Ursprung weg, falls $s \geq 0$.
- in Richtung Ursprung, falls $s \leq 0$.

Ist dann

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0 \quad \text{und} \quad \varrho \geq 0, \quad (I7.1)$$

so folgt für die (bis auf eine Konstante) mittlere Gesamtmasse in $B_\varepsilon(0)$

$$m_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \varrho(t, x) \, dx$$

dass (es sei \dot{m}_ε die Ableitung von m_ε) nach dem Gauß'schen Satz

$$\begin{aligned} \dot{m}_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \partial_t \varrho(t, x) \, dx = -\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \operatorname{div}(\varrho(t, x)v(t, x)) \, dx \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varrho(t, x)v(t, x) \bullet \nu_{B_\varepsilon(0)}(t, x) \, dx \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \underbrace{\varrho(t, x)s(t, x)}_{\text{hat Vorzeichen}} \, dx, \end{aligned}$$

deshalb $\dot{m}_\varepsilon(t) \geq 0$, falls $s \leq 0$, und $\dot{m}_\varepsilon(t) \leq 0$, falls $s \geq 0$.

Distributionen

7.8 Distributionsableitung. Ist $u \in C^1(U)$, so ist

$$\partial_i [u] = [\partial_i u].$$

7.9 Distribution und Funktion. (Siehe Abb. 5.) Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine *Dirac-Folge*, d.h.

$$\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \varphi_\varepsilon \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon \, dL^N = 1$$

und $[\varphi_\varepsilon] \rightarrow \delta_0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, wobei δ_0 die Dirac-Distribution ist. Zeige: Ist g eine lokal integrierbare Funktion, so gilt für fast alle y

$$g(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varphi_\varepsilon(\bullet - y), [g] \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}.$$

Hinweis: Es ist

$$\langle \varphi_\varepsilon(\bullet - y), [g] \rangle_{\mathcal{D}} - g(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(y' - y)(g(y') - g(y)) \, dy'.$$

7.10 Übung. Sei ξ wie in 2.9 und

$$\varrho_\varepsilon(t, x) := \eta_\varepsilon(x - \xi(t)), \quad v(t, x) := \dot{\xi}(t).$$

Zeige:

(1) $\partial_t \varrho_\varepsilon + \operatorname{div}(\varrho_\varepsilon v) = 0$

(2) Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert dies im Distributionssinn zu einem Massepunkt ξ mit Masse

$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) \, dy.$$

7.11 Übung. Sei μ_ξ wie in 2.8. Weiter seien differenzierbare $t \mapsto m(t) \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ und $t \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^n$ gegeben, welche die distributionelle Massenerhaltung

$$\partial_t(m\mu_\xi) + \operatorname{div}(mv\mu_\xi) = \mathbf{r}\mu_\xi$$

erfüllen. Zeige, dass dann

$$\dot{m} = \mathbf{r}, \quad v = \dot{\xi}.$$

7.12 Übung. Sei $\alpha > 0$. Dann gilt punktweise in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\operatorname{div} \frac{x}{|x|^\alpha} = \frac{n-\alpha}{|x|^\alpha}.$$

7.13 Wärmeleitungsoperator. Es sei

$$F(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(1) Es gilt

$$[F(t, \bullet)] \rightarrow \delta_0 \text{ für } t \searrow 0 \text{ punktweise in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

(2) Es ist F die **Fundamentallösung** der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t[F] - \Delta[F] = \delta_{(0,0)} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Bemerkung: Es ist $-\Delta[F] = \delta_{(0,0)} - \partial_t[F]$ nicht von der Gestalt in 2.10. *Hinweis:* Die physikalische Bedeutung des Begriffes "Wärmeleitungsgleichung" findet sich in IV.2.6.

Impulserhaltung

7.14 Zur Divergenz.

(1) Ist M eine Matrix und $\{e_1(t, x), \dots, e_n(t, x)\}$ eine Orthonormalbasis im \mathbb{R}^n , so gilt

$$\operatorname{div} M = \sum_{i=1}^n (\partial_{e_i} M) e_i,$$

siehe die Analogie zu 1.3.

(2) Für Vektoren a and b gilt

$$\operatorname{div}(ab) = \operatorname{div}(b)a + (Da)b.$$

7.15 Kollision von Massepunkten. Seien ξ^α , $\alpha = 1, 2$, zwei Massepunkte, die wie in 3.2 kollidieren. Es sei

$$\begin{aligned} v_+^1 &= av_-^1 + bv_-^2, \\ v_+^2 &= cv_-^1 + dv_-^2. \end{aligned}$$

Gebe den Bereich der Koeffizienten an, der generisch für eine Kollision erlaubt ist, und berechne die Massen m_+^α , m_-^α aus diesen Koeffizienten bei vorgegebener Gesamtmasse m .

7.16 Nachlesen. Vergleiche die Herleitung der Kepler-Bewegung in 3.3 mit der Herleitung in [Wikipedia: Kepler Gesetze].

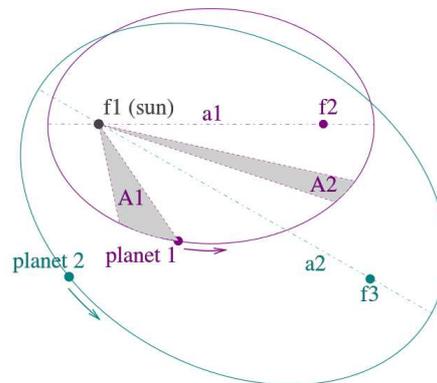


Abb. 24: “Illustration of Kepler’s three laws with two planetary orbits” from Wikipedia.

7.17 Kepler’sche Gesetze. Leite aus den Differentialgleichungen in 3.3 die drei Kepler’schen Gesetze her:

1. Kepler-Gesetz. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Kepler-Gesetz. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener “Fahrstrahl” überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

3. Kepler-Gesetz. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen (Kuben) der großen Bahnhalbachsen.

(Genommen aus [Wikipedia: Kepler Gesetze].)

7.18 Freie Energie. Für den Druck nimm an

$$p(\varrho) = \varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho).$$

Zeige, dass dann

$$\frac{p}{\varrho^2} = \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho} \right)'_{\varrho}.$$

Berechne die innere freie Energie f , wenn

(1) $p = c\varrho^{\gamma}$ mit $\gamma > 1$.

(2) $p = c\varrho$.

Definition: Es ist f die innere freie Energie und $\frac{f}{\varrho}$ die spezifische freie innere Energie.

Lösung. Es ist

$$\left(\frac{f(\varrho)}{\varrho} \right)'_{\varrho} = \frac{f(\varrho)'_{\varrho}}{\varrho} - \frac{f(\varrho)}{\varrho^2} = \frac{\varrho f(\varrho)'_{\varrho} - f(\varrho)}{\varrho^2} = \frac{p}{\varrho^2}.$$

Zum Beweis von (1) nehmen wir $c = 1$ an. Es ist

$$\left(\frac{f}{\varrho} \right)'_{\varrho} = \varrho^{\gamma-2} \implies \frac{f}{\varrho} = \frac{1}{\gamma-1} \varrho^{\gamma-1} + \text{const} \implies f = \frac{1}{\gamma-1} \varrho^{\gamma} + \text{const} \cdot \varrho.$$

Auch in (2) nehmen wir $c = 1$ an. Es ist

$$\left(\frac{f}{\varrho} \right)'_{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \implies \frac{f}{\varrho} = \log \varrho + \text{const} \implies f = \varrho \log \varrho + \text{const} \cdot \varrho.$$

□

7.19 Erdatmosphäre. Die Erdatmosphäre sei modelliert als Masse-Impulserhaltung in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$, wobei als Kraftterm die Gravitation der Erde diene, deren Masse M_{Erde} gleichmäßig in $B_R(0)$ verteilt sei.

(1) Es gelte $\Pi = p\text{Id} - S$ und

$$p = \widehat{p}(\varrho) = \varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho) \text{ mit der inneren freien Energie } f, \\ S = \widehat{S}(\varrho, (Dv)^S), \quad \widehat{S}(\varrho, 0) = 0.$$

Stelle die Gleichungen für Masse und Impuls auf.

(2) Zeige, dass für eine stationäre Lösung mit $v = 0$, die nur von $r = |x|$ abhängt, gilt, dass

$$\mu(R) = \mu(\infty) + \frac{GM_{\text{Erde}}}{R},$$

wobei $\mu(r) = f'_{\varrho}(\varrho(x))$ ist. *Definition:* Die Variable μ heißt chemisches Potential (siehe IV.11.9).

Lösung (2). Ist ϱ zeitunabhängig und $v = 0$, so ist die Massenerhaltung trivial erfüllt und die Impulserhaltung lautet

$$\nabla p = \mathbf{g}\varrho\nabla\phi_{\text{Erde}}.$$

Es ist nach (I4.6)

$$\nabla p = \mathbf{g}\varrho\nabla\phi_{\text{Erde}} = -\mathbf{g}\varrho\frac{M_{\text{Erde}}}{\sigma_n}\frac{x}{|x|^n}.$$

Wegen $p(\varrho) = \varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho)$, ist $p'_{\varrho} = \varrho f'_{\varrho\varrho}$, d.h.

$$\nabla p = \varrho f'_{\varrho\varrho} \nabla \varrho = \varrho \nabla f'_{\varrho} = \varrho \nabla \mu \text{ wenn } \mu := f'_{\varrho},$$

und damit

$$\nabla \mu = -\frac{\mathbf{g}M_{\text{Erde}}}{\sigma_n}\frac{x}{|x|^n}.$$

Da die Funktionen nur von r abhängen, ist $\nabla \mu = \mu'_{r}\frac{x}{|x|}$, also

$$\mu'_{r} = -\frac{\mathbf{g}M_{\text{Erde}}}{\sigma_n}\frac{1}{r^{n-1}}. \quad (I7.2)$$

Die Behauptung folgt durch Integration. Es ist $n = 3$, beachte dass dann

$$\frac{\mathbf{g}}{\sigma_n(n-2)} = G.$$

Aus der Darstellung (I7.2) folgt, dass $\mu(\infty)$ existiert. \square

7.20 Fluchtgeschwindigkeit. Wie groß muss die Geschwindigkeit mindestens sein, um ein Schwerfeld (eines Punktes in $\{0\}$ mit der Masse m) zu verlassen?

Interfaces

7.21 Parabelform der Oberfläche. Es sei $p = \widehat{p}(\varrho) := c\varrho^\gamma$ mit Konstanten $\gamma > 1$ und $c > 0$. Weiter seien v und \mathbf{f} wie in 4.4 gegeben. Zeige, dass dann die Konklusion von 4.4 richtig ist, d.h. die Oberfläche der kompressiblen Flüssigkeit ist ein Paraboloid.

Lösung. By (I4.5)

$$\nabla p = \varrho \begin{bmatrix} \omega^2 x_1 \\ \omega^2 x_2 \\ -g \end{bmatrix}.$$

This has been shown for general compressible fluids. Since $\widehat{p}(\varrho) = \varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho)$ and then $p'_{\varrho}(\varrho) = \varrho f'_{\varrho\varrho}(\varrho)$ we compute

$$\nabla \left(\frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - gx_3 \right) = \begin{bmatrix} \omega^2 x_1 \\ \omega^2 x_2 \\ -g \end{bmatrix} = \frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{p'_{\varrho}(\varrho)}{\varrho} \nabla \varrho = f'_{\varrho\varrho}(\varrho) \nabla \varrho = \nabla (f'_{\varrho}(\varrho)).$$

Hence

$$f'_{\varrho}(\varrho) = \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - gx_3 + \text{const}.$$

On the surface Γ we have $\widehat{p}(\varrho) = p_g = \text{const}$. Therefore we conclude $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$, if $p'_{\varrho} > 0$, and

$$gx_3 = \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - f'_{\varrho}(\varrho_0) + \text{const}.$$

This holds also in the special case $p = \widehat{p}(\varrho) = c\varrho^\gamma$, in which case

$$f(\varrho) = \frac{c}{\gamma - 1} \varrho^\gamma.$$

□

II Objektivität

Restrictions for the description of physical processes come from the *principle of objectivity* (also called *frame indifference*). It consists of the following:

- The value of physical quantities depend on the observer.
- The type of a physical quantity is given by a transformation rule.
- The description of a physical process has to be independent of the observer.

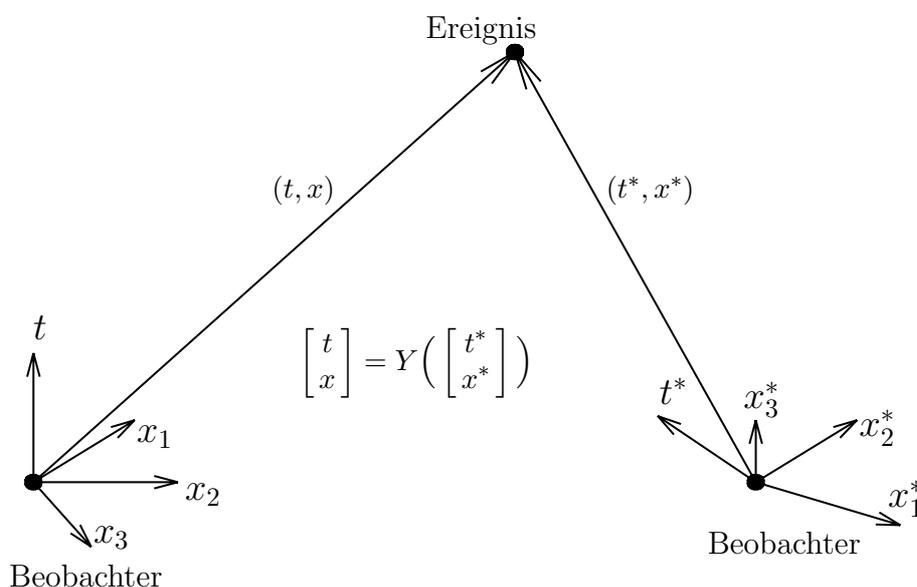


Abb. 1: Physikalische Raumzeit

The last property is “objectivity” and states, that the description of physical processes has to be the same for all observers. This applies to formulations with differential equations, see section 3, as well as to formulations with constitutive relations or constraints, see section 4. The first property is the well known “relativity”, an classical example being the Doppler effect. The

second property is “rationality” saying, that it is possible to describe analytically, how quantities change under observer transformations.

Therefore the description of any situation in classical continuum physics has to be **frame indifferent**, and this description includes everything like differential equations, constitutive relations, the domain of definition, positivity of functions, et cetera. In order to formulate the principle of objectivity, one has to specify how coordinates transform. Eine generelle Beobachtertransformation beschreiben wir als eine Abbildung

$$y = Y(y^*),$$

welche bijektiv die Raumzeit-Koordinaten $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ des einen Beobachters als Bild der Abbildung Y der Raumzeit-Koordinaten $y^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ des anderen Beobachters ausdrückt.

In dieser Vorlesung beschränken wir uns im wesentlichen, anders als in Kapitel VI, auf klassische Beobachtertransformationen oder die nichtlinearen Newton-Transformationen, siehe 1. Zur Vollständigkeit werden wir hier in Abschnitt 2 die speziellen linearen Lorentz-Transformationen angeben. Wir haben es für einen Beobachter mit Raumzeit-Koordinaten $y = (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ zu tun, die für einen anderen Beobachter $y^* = (t^*, x^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sind, also ist die Abbildung Y gegeben durch

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = Y\left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} T(t^*, x^*) \\ X(t^*, x^*) \end{bmatrix}. \quad (\text{II0.1})$$

In this situation, if the other observer is located in his coordinate system at the origin $\{(t^*, x^*); x^* = 0, t^* \in \mathbb{R}\}$, he is seen from the observer with (t, x) coordinates at

$$\xi(t) := x = X(t^*, 0) \text{ für } t = T(t^*, 0),$$

that is, $\{(t, \xi(t)); t \in \mathbb{R}\}$ is the position of the other observer. This implies, that he moves in the (t, x) coordinates with velocity

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{X}}{T} \text{ with appropriate arguments.}$$

Ausgeführt: Es ist

$$\frac{d}{dt^*} X(t^*, 0) = \frac{d}{dt^*} \xi(T(t^*, 0)) = \frac{d}{dt} \xi(t) \frac{d}{dt^*} T(t^*, 0),$$

und da $\partial_{t^*} T > 0$ folgt die Behauptung.

Es ist dabei so, dass $T(t^*, x^*)$ in der klassischen Theorie nicht von x^* abhängt im Gegensatz zu den Lorentz-Transformationen, bei denen $T(t^*, x^*)$ linear von x^* abhängt.

Die Objektivität wird in den folgenden Abschnitten in diesem Kapitel ausführlich beschrieben. Was die bisher gemachten Aussagen betrifft, sei bemerkt, dass alles bisher getroffene unter die Objektivität fällt, d.h. alle Aussagen lassen sich nachträglich als mit dem Prinzip der Beobachterunabhängigkeit verträglich nachweisen.

Die Formulierung einer Klasse von physikalischen Prozessen muss unabhängig vom Beobachter sein. Dies betrifft die ganze Bandbreite der Darstellung von physikalischen Prozessen. Insbesondere gilt die Beobachterunabhängigkeit für die folgenden Aussagen:

- Erhaltungssätze (siehe Abschnitt 3). Sie wurden in I.1 eingeführt und sie sind die Grundlage für die physikalische Theorie.
- Konstitutive Funktionen (siehe Abschnitt 4). Sie sind bei der Behandlung verschiedenster Materien von Bedeutung und treten etwa bei der Formulierung von Erhaltungssätzen auf.

Die Objektivität von Erhaltungsgleichungen hat Konsequenzen für die beteiligten physikalischen Größen, d.h. physikalische Größen sind dadurch definiert, wie sie in welchen Erhaltungssätzen auftreten. Dies bestimmt die Struktur der konstitutiven Funktionen, eine Herangehensweise, die hier also anders ist als in der bisherigen Standardliteratur.

1 Klassische Beobachtertransformationen

Die klassischen Beobachtertransformationen haben die wesentliche Eigenschaft, dass $T(t^*, x^*)$ nur von t^* abhängt, und das linear mit dem Faktor 1.

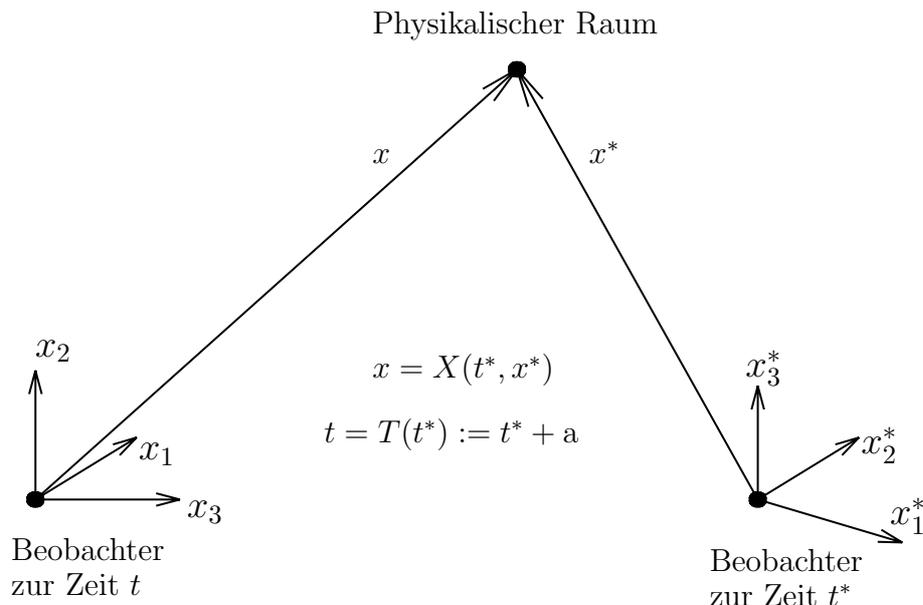


Abb. 2: Klassische Beobachter

Hier ist als einfachste Abbildung zwischen zwei Beobachtern eine sogenannte Galilei Transformation zu nennen. Diese lineare Transformation in Zeit und Raum wird gegeben durch eine **Galilei'sche Matrix**

$$\mathbf{G}(V, Q) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V & Q \end{bmatrix}, \tag{III.1}$$

wobei $V \in \mathbb{R}^n$ die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Beobachtern ist und Q eine orthonormale Transformation des \mathbb{R}^n mit positiver Determinante, d.h. eine Transformation mit $Q^T Q = \text{Id}$ und $\det Q > 0$. Dies gibt an, wie die Koordinatensysteme gegeneinander verdreht sind. Es gilt dann $\det Q = 1$. Die Menge dieser Matrizen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_{\text{Galilei}}$. Jede Matrix definiert eine lineare Transformation.

1.1 Galilei Transformation. Sei $\mathbf{G}(V, Q) \in \mathcal{G}_{\text{Galilei}}$ eine Galilei Matrix wie in (III.1). Dabei ist $V \in \mathbb{R}^n$ die Relativgeschwindigkeit und $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthonormale Matrix mit $\det Q = 1$. Eine **Galilei Transformation** in $\mathcal{T}_{\text{Galilei}}$ ist eine Abbildung Y zwischen den Vektoren $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und

$(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} &= Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} t_0 \\ x_0 \end{bmatrix} + \mathbf{G}(V, Q) \begin{bmatrix} t^* - t_0^* \\ x^* - x_0^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t^* + (t_0 - t_0^*) \\ Qx^* + (t^* - t_0^*)V + x_0 - Qx_0^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

mit zwei gegebenen Punkten (t_0, x_0) und (t_0^*, x_0^*) . Die Abbildung Y ist also bestimmt durch die Matrix $\mathbf{G}(V, Q)$ und die zwei Vektoren (t_0, x_0) und (t_0^*, x_0^*) .

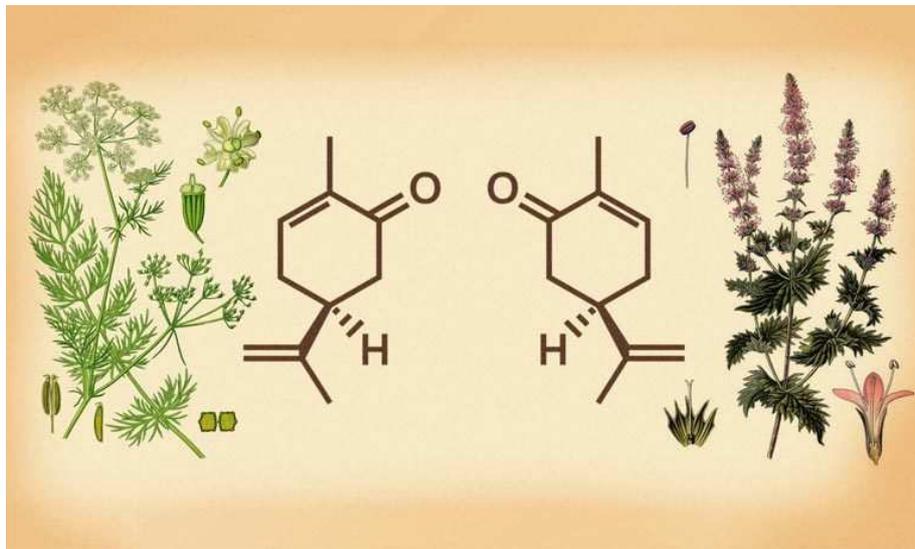


Abb. 3: “Chirotope in der Praxis: Moleküle mit der gleichen chemischen Formel sind chiral, wenn sich das Bild der einen nicht durch Drehung mit dem anderen zur Deckung bringen lässt. . . . Chirale Moleküle können ganz unterschiedliche Wirkungen haben. So duftet die linksdrehende Form der Substanz Carvon nach Kümmel, die rechtsdrehende hingegen nach Minze” aus [KlarText 2018]

Die Abbildung Y ist bestimmt durch die Galilei-Matrix $\mathbf{G}(V, Q)$ und durch die beiden Vektoren (t_0, x_0) und (t_0^*, x_0^*) . Zur Voraussetzung $\det Q = 1$ siehe Abb. 3, die beiden Moleküle, in der 3D-Version, gehen nicht durch eine Drehung sondern durch eine Spiegelung auseinander hervor.

1.2 Gruppeneigenschaft. Die Menge der Galilei Matrizen $\mathcal{G}_{\text{Galilei}}$ in (III.1) hat bezüglich der Matrixmultiplikation die Gruppeneigenschaft. Die Identität ist durch $\mathbf{G}(0, \text{Id})$ gegeben, und die Inverse ist

$$\mathbf{G}(V, Q)^{-1} = \mathbf{G}(-Q^T V, Q^T).$$

Ebenso ist die Menge $\mathcal{T}_{\text{Galilei}}$ der Galilei Transformationen in (III.2) bezüglich der Hintereinanderschaltung eine Gruppe (siehe 7.1).

Beweis. Sind $\mathbf{G}(V_1, Q_1)$ und $\mathbf{G}(V_2, Q_2)$ zwei Matrizen, so ist die Matrixmultiplikation gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(V_1, Q_1)\mathbf{G}(V_2, Q_2) &= \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V_1 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V_2 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V_1 + Q_1 V_2 & Q_1 Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V & Q \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{G}(V, Q), \end{aligned}$$

wenn

$$V = V_1 + Q_1 V_2 \quad \text{und} \quad Q = Q_1 Q_2,$$

eine Matrix Q , welche auch eine orthogonale Transformation mit Determinante 1 ist.

Setzen wir speziell $\mathbf{G}(V, Q) = \mathbf{G}(0, \text{Id}) = \text{Id}$, also $V_1 + Q_1 V_2 = V = 0$ und $Q_1 Q_2 = Q = \text{Id}$, so gilt

$$V_2 = -Q_1^T V_1 \quad \text{und} \quad Q_2 = Q_1^T .$$

Also ist $\mathbf{G}(-Q_1^T V_1, Q_1^T)$ die Rechtsinverse von $\mathbf{G}(V_1, Q_1)$. Ebenso folgt dass $\mathbf{G}(-Q_2^T V_2, Q_2^T)$ die Linksinverse von $\mathbf{G}(V_2, Q_2)$ ist. \square

Wir betrachten nun nichtlineare Transformationen, die auch beschleunigte Bewegungen und Drehungen zulassen.

1.3 Newton Transformation. Wir bezeichnen diese Menge mit $\mathcal{T}_{\text{Newton}}$. Ein Element Y dieser Menge, d.h. eine **Newton Transformation** der Koordinaten $y^* = (t^*, x^*)$ in die Koordinaten $y = (t, x)$, ist von der Gestalt

Newton Transformation:

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} T(t^*) \\ X(t^*, x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^* + a \\ Q(t^*)x^* + b(t^*) \end{bmatrix}$$

(III.3)

(t, x) Koordinaten eines Beobachters,
 (t^*, x^*) Koordinaten eines anderen Beobachters,
 $a \in \mathbb{R}$, $t^* \mapsto b(t^*) \in \mathbb{R}^n$, $t^* \mapsto Q(t^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
 $Q(t^*)$ orthonormal mit $\det Q(t^*) = 1$.

mit einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ und glatten Funktionen $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, welche $Q^T Q = \text{Id}$ und $\det Q = 1$ erfüllt. *Erläuterung:* Mit "glatt" meinen wir im allgemeinen C^2 .

Die Ableitung einer Newton-Transformation Y ist

$$D_{(t^*, x^*)} Y = (Y_{k'l})_{k,l=0,\dots,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix},$$

wobei \dot{X} die Zeitableitung

$$\dot{X}(t^*, x^*) := \frac{\partial}{\partial t^*} X(t^*, x^*) = \dot{Q}(t^*)x^* + \dot{b}(t^*)$$

ist, und \dot{Q} und \dot{b} bezeichnen ebenfalls die Zeitableitung. Offensichtlich gilt

1.4 Lemma. If Y is a Newton transformation, then for (t_0^*, x_0^*) the linear approximation of Y ,

$$\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = Y(t_0^*, x_0^*) + D_{(t^*, x^*)} Y(t_0^*, x_0^*) \begin{bmatrix} t^* - t_0^* \\ x^* - x_0^* \end{bmatrix}$$

is a Galilei'an transformation. Every Galilei transformation is a Newton transformation.

Beweis. The derivative of a Newton transformation at (t_0^*, x_0^*) is

$$D_{(t^*, x^*)} Y(t_0^*, x_0^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Q}(t_0^*)x_0^* + \dot{b}(t_0^*) & Q(t_0^*) \end{bmatrix},$$

which for fixed (t_0^*, x_0^*) is a Galilei'an matrix, since $Q(t_0^*)$ is an orthonormal transformation with determinant 1. \square

About the "relative velocity" $V := \dot{X}$ we make the following remark, see [Wikipedia: Doppler effect] and as a comparison 2.2. The equation (III.4) justifies the notion made for V .

1.5 Doppler effect. Beobachtet ein Beobachter ein Objekt mit $t \mapsto \xi(t)$ und ein anderer Beobachter dasselbe Objekt mit $t^* \mapsto \xi^*(t^*)$ so gilt nach der Gleichung (III.3)

$$\begin{bmatrix} t \\ \xi(t) \end{bmatrix} = Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ \xi^*(t^*) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t^* + a \\ X(t^*, \xi^*(t^*)) \end{bmatrix},$$

also für die Geschwindigkeiten des beobachteten Objektes

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \underbrace{\dot{X}(t^*, \xi^*(t^*))}_{=: V(t^*, \xi^*(t^*))} + \underbrace{D_{x^*} X(t^*, \xi^*(t^*))}_{= Q(t^*)} \dot{\xi}^*(t^*) \\ &=: V(t^*, \xi^*(t^*)) + Q(t^*) \dot{\xi}^*(t^*) \end{aligned}$$

somit

$$\dot{\xi}(t^* + a) = V(t^*, \xi^*(t^*)) + Q(t^*) \dot{\xi}^*(t^*). \quad (\text{III.4})$$

Speziell: Ist der *-Beobachter an der Position $\xi^*(t^*) = 0$ so ist er vom Standardbeobachter aus gesehen an der Position $\xi(t)$ mit

$$\dot{\xi}(t) = V.$$

Ist der Standardbeobachter an der Position $\xi(t) = 0$ so ist er vom *-Beobachter aus gesehen an der Position $\xi^*(t^*)$ mit

$$\dot{\xi}^*(t^*) = -Q^T V.$$

Also the class of nonlinear Newton transformations satisfies the

1.6 Group property. The set $\mathcal{T}_{\text{Newton}}$ of Newton transformations in 1.3 satisfies the group property. The inverse of the function Y in 1.3 is given by

$$\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} = Y^{-1} \left(\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t - a \\ Q(t - a)^T (x - b(t - a)) \end{bmatrix},$$

that is, $Y^* = Y^{-1}$ with

$$a^* = -a, \quad Q^*(t) = Q(t - a)^T, \quad b^*(t) = -Q(t - a)^T b(t - a).$$

Beweis. If two mappings $(t_1, x_1) = N_{12}(t_2, x_2)$ and $(t_2, x_2) = N_{23}(t_3, x_3)$ of Newton type,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_1 \\ x_1 \end{bmatrix} &= N_{12} \left(\begin{bmatrix} t_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t_2 + a_{12} \\ Q_{12}(t_2)x_2 + b_{12}(t_2) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} t_2 \\ x_2 \end{bmatrix} &= N_{23} \left(\begin{bmatrix} t_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t_3 + a_{23} \\ Q_{23}(t_3)x_3 + b_{23}(t_3) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

are given, then

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_1 \\ x_1 \end{bmatrix} &= N_{12} \circ N_{23} \left(\begin{bmatrix} t_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} t_3 + a_{23} + a_{12} \\ Q_{12}(t_2)(Q_{23}(t_3)x_3 + b_{23}(t_3)) + b_{12}(t_3 + a_{23}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t_3 + a_{13} \\ Q_{13}(t_3)x_3 + b_{13}(t_3) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} a_{13} &:= a_{23} + a_{12} \\ Q_{13}(t_3) &:= Q_{12}(t_3 + a_{23})Q_{23}(t_3) \\ b_{13}(t_3) &:= Q_{12}(t_3 + a_{23})b_{23}(t_3) + b_{12}(t_3 + a_{23}). \end{aligned}$$

Now Q_{13} again is an orthonormal transformation with determinant 1. Therefore $N_{13} := N_{12} \circ N_{23}$ is a Newton transformation. And $N_{13} = \text{Id}$, if

$$\begin{bmatrix} t_3 + a_{23} + a_{12} \\ Q_{12}(t_2)(Q_{23}(t_3)x_3 + b_{23}(t_3)) + b_{12}(t_3 + a_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_3 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

that is

$$\begin{aligned} a_{23} + a_{12} &= 0, \\ Q_{12}(t_2)b_{23}(t_3) + b_{12}(t_3 + a_{23}) &= 0, \\ Q_{12}(t_2)Q_{23}(t_3) &= \text{Id}, \end{aligned}$$

which is equivalent to the assertion. \square

We have seen that linear approximations of Newtonian transformations are Galilei transformations. And this is indeed, as we shall see, a characterization of Newtonian transformations.

1.7 Theorem. If a C^1 -transformation $Y : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ at every point (t_0^*, x_0^*) has a derivative $D_{(t^*, x^*)} Y(t_0^*, x_0^*)$, which is a Galilei'an Matrix, then Y is a Newton transformation.

Beweis. We consider transformations $Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, whose derivative is given by

$$D_{(t^*, x^*)} Y(t^*, x^*) = \mathbf{G}(V(t^*, x^*), Q(t^*, x^*)). \quad (\text{III.5})$$

If we write

$$Y(t^*, x^*) = \begin{bmatrix} T(t^*, x^*) \\ X(t^*, x^*) \end{bmatrix},$$

we see that (III.5) means

$$\begin{bmatrix} T'_{t^*} & (D_{x^*} T)^T \\ X'_{t^*} & D_{x^*} X \end{bmatrix} = D_{(t^*, x^*)} Y = \mathbf{G}(V, Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V & Q \end{bmatrix},$$

that is

$$\begin{aligned} T'_{t^*} &= 1, & D_{x^*} T &= 0, \\ X'_{t^*} &= V, & D_{x^*} X &= Q. \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Here Q is an orthonormal transformation with $Q^T Q = \text{Id}$, that is

$$\sum_{i \geq 1} Q_{ik} Q_{il} = \delta_{kl} \quad \text{for } k, l = 1, \dots, n.$$

It follows, that

$$A_{mkl} := \sum_{i \geq 1} X_i'_{km} X_i'_{l} \quad \text{for } k, l, m = 1, \dots, n$$

satisfies

$$\begin{aligned} A_{mkl} + A_{mlk} &= \sum_{i \geq 1} X_i'_{km} X_i'_{l} + \sum_{i \geq 1} X_i'_{k} X_i'_{lm} \\ &= \left(\sum_{i \geq 1} X_i'_{k} X_i'_{l} \right)'_m = \left(\sum_{i \geq 1} Q_{ik} Q_{il} \right)'_m = (\delta_{kl})'_m = 0, \end{aligned}$$

that is, A_{mkl} is antisymmetric in k and l . Since A_{mkl} is symmetric in m and k , it follows from a known lemma (see Lemma 1.8 below), that the matrix $C = (A_{kji})_{i,j,k=1,\dots,n}$ is zero. Hence, since also $Q Q^T = \text{Id}$ as shown in the proof of I.1.3, that is

$$\sum_{l \geq 1} Q_{il} Q_{jl} = \delta_{ij} \quad \text{for } i, j = 1, \dots, n,$$

we derive for m and k , since we showed that $A_{mkl} = 0$ for all l ,

$$0 = \sum_l A_{mkl} Q_{jl} = \sum_l \sum_i X_{i'km} Q_{il} Q_{jl} = \sum_i X_{i'km} \delta_{ij} = X_{j'km},$$

that is $D_{x^*}^2 X = 0$. Therefore $(t^*, x^*) \mapsto X(t^*, x^*)$ is (affin) linear in x^* , that is

$$X(t^*, x^*) = \bar{b}(t^*) + \bar{Q}(t^*)x^*$$

with a vector $\bar{b}(t^*)$ and a matrix $\bar{Q}(t^*)$.

Then (III.6) says $Q(t^*, x^*) = D_{x^*} X(t^*, x^*) = \bar{Q}(t^*)$ is an orthonormal matrix, and (III.6) also says that $T(t^*, x^*) = t^* + \bar{a}$ with a constant \bar{a} . This results in

$$Y(t^*, x^*) = \begin{bmatrix} t^* + \bar{a} \\ \bar{b}(t^*) + \bar{Q}(t^*)x^* \end{bmatrix},$$

from which the result follows. □

1.8 Fundamental lemma. Suppose $C = (C_{ijk})_{i,j,k=1,\dots,N}$ is a 3-matrix in \mathbb{R}^N with $N \geq 1$, which is antisymmetric in the first two indices, and symmetric in the last two indices. Then $C = 0$.

Beweis. It is

$$\begin{aligned} C_{lkj} &= -C_{klj} = -C_{kjl} = C_{jkl}, \\ C_{lkj} &= C_{ljk} = -C_{jlk} = -C_{jkl}. \end{aligned}$$

Hence $C_{jkl} = 0$. □

2 Lorentz Transformationen

References: Siehe [Wikipedia: History of Lorentz transformations] und das Paper [113] von Lorentz als historische Beiträge. Zur Thomas Rotation im Beweis von 2.5 siehe [68]. Zur relativistischen Physik siehe den Abschnitt VI.

A Lorentz transformation is a linear transformation given by a Lorentz matrix. A **Lorentz matrix** is defined for $c > 0$ and for $V \in \mathbb{R}^n$ with $|V| < c$ by

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c(V, Q) &:= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \left(\text{Id} + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V V^T \right) Q \end{bmatrix}, \\ \gamma &:= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} \geq 1. \end{aligned} \tag{II2.1}$$

Here $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an orthonormal transformation with positive determinant, that is $Q^T Q = \text{Id}$ and $\det Q = 1$. The matrix has the decomposition

$$\mathbf{L}_c(V, Q) = \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) \mathbf{L}_c(0, Q) = \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

into a velocity part and a rotation. In components the velocity part has the form

$$\mathbf{L}_c(V, \text{Id}) = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V_1 & \frac{\gamma}{c^2} V_2 & \frac{\gamma}{c^2} V_3 \\ \gamma V_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_1^2 & \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_1 V_2 & \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_1 V_3 \\ \gamma V_2 & \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_1 V_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_2^2 & \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_2 V_3 \\ \gamma V_3 & \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_1 V_3 & \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_2 V_3 & 1 + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V_3^2 \end{bmatrix}.$$

We also write

$$\mathbf{L}_c(V, Q) = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \mathbf{B}_c(V) Q \end{bmatrix}, \quad (\text{II.2.2})$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_c(V) &:= \text{Id} + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} V V^T && \text{for } |V| < c, \\ &= \text{Id} + (\gamma-1) \frac{V V^T}{|V|^2} && \text{for } 0 < |V| < c, \end{aligned} \quad (\text{II.2.3})$$

which is true because

$$\frac{\gamma-1}{|V|^2} = \frac{\gamma^2-1}{(\gamma+1)|V|^2} = \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)}.$$

The matrix $\mathbf{B}_c(V)$ is the so-called “boost” in the direction of the “relative velocity” V , that is

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma V \end{bmatrix}, \\ \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{c^2} |V|^2 \\ (1 + (\gamma-1))V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma - \frac{1}{\gamma} \\ \gamma V \end{bmatrix}, \\ \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \text{ for } e \bullet V = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.2.4})$$

We have that $\det \mathbf{L}_c(V, Q) = 1$ (see 7.3). The class of Lorentz matrices give rise to linear observer transformations (this is the analogon to 1.2).

2.1 Lorentz Transformation. Sei $\mathbf{L}_c(V, Q) \in \mathcal{L}_{\text{Lorentz}}$ eine Lorentz Matrix wie in (II2.1). Eine **Lorentz Transformation** in $\mathcal{T}_{\text{Lorentz}}$ ist eine Abbildung Y zwischen den Koordinaten $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch die Gleichung

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} t_0 \\ x_0 \end{bmatrix} + \mathbf{L}_c(V, Q) \begin{bmatrix} t^* - t_0^* \\ x^* - x_0^* \end{bmatrix} \quad (\text{II2.5})$$

mit zwei gegebenen Punkten (t_0, x_0) und (t_0^*, x_0^*) . Die Abbildung Y ist also bestimmt durch die Matrix $\mathbf{L}_c(V, Q)$ und zwei Vektoren (t_0, x_0) und (t_0^*, x_0^*) .

2.2 Bewegung eines Objektes. Beobachtet ein Beobachter ein Objekt mit $t \mapsto \xi(t)$ und ein anderer Beobachter dasselbe Objekt mit $t^* \mapsto \xi^*(t^*)$ so gilt nach der Transformation (II2.5)

$$\begin{bmatrix} t \\ \xi(t) \end{bmatrix} = Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ \xi^*(t^*) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} T(t^*, \xi^*(t^*)) \\ X(t^*, \xi^*(t^*)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \mathbf{B}_c(V) Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^* \\ \xi^*(t^*) \end{bmatrix},$$

wobei die zwei Vektoren $(t_0, x_0) = 0$ und $(t_0^*, x_0^*) = 0$ sein sollen.

(1) Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} t &= \gamma t^* + \frac{\gamma}{c^2} V \bullet Q \xi^*(t^*), \\ \xi(t) &= \gamma t^* V + \mathbf{B}_c(V) Q \xi^*(t^*). \end{aligned}$$

Vorsicht: Es sind im Allgemeinen nicht ξ und ξ^ Funktionen.*

(2) Wenn t eine monoton wachsende Funktion von t^* ist, so gilt für die ‘‘Geschwindigkeiten’’ des Objekts

$$\dot{\xi}(t) = \frac{V + \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}_c(V) Q \dot{\xi}^*(t^*)}{1 + \frac{1}{c^2} V \bullet Q \dot{\xi}^*(t^*)},$$

wobei der Nenner positiv sein soll, was für $|\dot{\xi}^*| \leq c$ erfüllt ist.

(3) Wenn $v = \dot{\xi}(t)$ und $v^* = \dot{\xi}^*(t^*)$ mit $|v^*| \leq c$ sind, so folgt mit $\bar{v} := Qv^*$ aus (2)

$$v = \frac{V + \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}_c(V) \bar{v}}{1 + \frac{1}{c^2} V \bullet \bar{v}}.$$

Beachte: Dies ist die relativistische ‘‘Addition von Geschwindigkeiten’’, siehe [Wikipedia: Velocity-addition formula].

(4) Der *-Beobachter an der Position $\xi^*(t^*) = 0$ ist vom Standardbeobachter aus gesehen an der Position $\xi(t)$ mit

$$\dot{\xi}(t) = V,$$

der Standardbeobachter an der Position $\xi(t) = 0$ ist vom $*$ -Beobachter aus gesehen an der Position $\xi^*(t^*)$ mit

$$\dot{\xi}^*(t^*) = -Q^T V,$$

Es ist also wichtig für die “Geschwindigkeiten”, welche Zeit gemeint ist (siehe dazu auch [23, Abschnitt II.5]).

Beweis (2). Compute the t^* -derivative of $\xi(T(t^*), \xi^*(t^*)) = X(t^*, \xi^*(t^*))$ and obtain $\dot{\xi}(t) \frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt^*} X$. \square

There are also different forms of a Lorentz matrix, which are valid for all vectors $\tilde{V} \in \mathbb{R}^n$ and $\bar{V} \in \mathbb{R}^n$.

2.3 Remark. For $V \in \mathbb{R}^n$ with $|V| < c$ we used

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} > 1. \tag{II2.6}$$

Then $\tilde{V} \in \mathbb{R}^n$ runs over all of \mathbb{R}^n , defined by

$$\tilde{V} := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|V|^2}{c^2}}} V = \gamma V.$$

Also $\bar{V} \in \mathbb{R}^n$ runs over all of \mathbb{R}^n , defined by

$$\bar{V} := \frac{1}{c} \tilde{V} = \frac{\gamma}{c} V.$$

(1) With the definition of \tilde{V}

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{\tilde{V}}{c}\right|^2}} \tilde{V} = \frac{1}{\gamma} \tilde{V}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \left|\frac{\tilde{V}}{c}\right|^2}$$

and it follows, that for all orthonormal $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\tilde{\mathbf{L}}_c(\tilde{V}, Q) := \mathbf{L}_c\left(\frac{\tilde{V}}{\sqrt{1 + \left|\frac{\tilde{V}}{c}\right|^2}}, Q\right) = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{c^2} \tilde{V}^T Q \\ \tilde{V} & \left(\text{Id} + \frac{1}{c^2(\gamma+1)} \tilde{V} \tilde{V}^T\right) Q \end{bmatrix}.$$

(2) With the definition of \bar{V}

$$V = \frac{c}{\sqrt{1 + |\bar{V}|^2}} \bar{V} = \frac{c}{\gamma} \bar{V}, \quad \gamma = \sqrt{1 + |\bar{V}|^2}$$

and it follows, that for all orthonormal $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c\left(\frac{c\bar{V}}{\sqrt{1 + |\bar{V}|^2}}, Q\right) &= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{c} \bar{V}^T Q \\ c\bar{V} & \left(\text{Id} + \frac{1}{\gamma+1} \bar{V} \bar{V}^T\right) Q \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}_{\frac{1}{c}} \mathbf{L}(\bar{V}) \mathbf{I}_c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \\ \mathbf{L}(\bar{V}) &:= \begin{bmatrix} \bar{\gamma} & \bar{V}^T \\ \bar{V} & \text{Id} + \frac{1}{\bar{\gamma}+1} \bar{V} \bar{V}^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I}_a &:= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix}, \quad \bar{\gamma} = \sqrt{1 + |\bar{V}|^2} = \gamma. \end{aligned}$$

Beweis (1). With $\tilde{V} = \gamma V$ we compute

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c(V, Q) &= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \left(\text{Id} + (\gamma - 1) \frac{V V^T}{|V|^2} \right) Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{c^2} \tilde{V}^T Q \\ \tilde{V} & \left(\text{Id} + (\gamma - 1) \frac{\tilde{V} \tilde{V}^T}{|\tilde{V}|^2} \right) Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and

$$\frac{\gamma - 1}{|\tilde{V}|^2} = \frac{1}{c^2(\gamma + 1)} \text{ since } \gamma^2 = 1 + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}.$$

□

Beweis (2). With $\tilde{V} = \frac{2}{c} V$ we compute

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c(V, Q) &= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \left(\text{Id} + (\gamma - 1) \frac{V V^T}{|V|^2} \right) Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{1}{c} \tilde{V}^T Q \\ c\tilde{V} & \left(\text{Id} + (\gamma - 1) \frac{\tilde{V} \tilde{V}^T}{|\tilde{V}|^2} \right) Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and

$$\frac{\gamma - 1}{|\tilde{V}|^2} = \frac{1}{\gamma + 1} \text{ since } \gamma^2 = 1 + |\tilde{V}|^2.$$

□

The linear coordinate transformations given by Lorentz transformations converge towards Galilei transformations, if c tends to infinity, see lemma 2.4. There are also cases, where a Lorentz matrix coincides with a Galilei matrix, this is the case when only a rotation is applied:

$$\mathbf{L}_c(0, Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \mathbf{G}(0, Q).$$

2.4 Lemma. For every V, \tilde{V} , and Q it holds

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c(V, Q) &\rightarrow \mathbf{G}(V, Q) \quad \text{as } c \rightarrow \infty, \\ \tilde{\mathbf{L}}_c(\tilde{V}, Q) &\rightarrow \mathbf{G}(\tilde{V}, Q) \quad \text{as } c \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Beweis. This follows immediately. □

Für die linearen Lorentz-Transformationen gilt die folgende

2.5 Gruppeneigenschaft. Die Menge der Lorentz-Matrizen $\mathcal{G}_{\text{Lorentz}}$ in (II2.1) hat bezüglich der Matrixmultiplikation die Gruppeneigenschaft. Die Identität ist durch $\mathbf{L}_c(0, \text{Id})$ gegeben und die Inverse von $\mathbf{L}_c(V, Q)$ ist

$$\mathbf{L}_c(V, Q)^{-1} = \mathbf{L}_c(-Q^T V, Q^T).$$

Ebenso ist die Menge $\mathcal{T}_{\text{Lorentz}}$ der Lorentz Transformationen in (II.2.5) bezüglich der Hintereinanderschaltung eine Gruppe.

Hinweis: Ein anderer (nichtexpliziter) Beweis wird im Abschnitt [23, I.3] gegeben.

Beweis. We show the result by explicit computation. It is elementary to see that

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_c(V, Q) &= \mathbf{L}_c(V, \text{Id})\mathbf{L}_c(0, Q), \\ \mathbf{L}_c(V, Q) &= \mathbf{L}_c(0, Q)\mathbf{L}_c(Q^T V, \text{Id}), \\ \mathbf{L}_c(0, Q_1)\mathbf{L}_c(0, Q_2) &= \mathbf{L}_c(0, Q_1 Q_2).\end{aligned}$$

After the essential Thomas-identity in (II.2.7) is shown, this completes the axioms of a semigroup.

In particular this implies, denoting

$$B = \mathbf{B}_c(V) = \text{Id} + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma + 1)} V V^T,$$

that (note, that γ has the same value for V and $-V$)

$$\begin{aligned}& \mathbf{L}_c(V, Q)\mathbf{L}_c(-Q^T V, Q^T) \\ &= \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) \underbrace{\mathbf{L}_c(0, Q)\mathbf{L}_c(0, Q^T)}_{= \text{Id}} \mathbf{L}_c(-V, \text{Id}) \\ &= \mathbf{L}_c(V, \text{Id})\mathbf{L}_c(-V, \text{Id}) \\ &= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T \\ \gamma V & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c^2} V^T \\ -\gamma V & B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma^2 \left(1 - \frac{|V|^2}{c^2}\right) & \frac{\gamma}{c^2} (-\gamma V + BV)^T \\ \gamma(\gamma V - BV) & BB - \frac{\gamma^2}{c^2} V V^T \end{bmatrix} = \text{Id},\end{aligned}$$

which is true because

$$\begin{aligned}\gamma^2 \left(1 - \frac{|V|^2}{c^2}\right) &= 1, \\ BV &= \gamma V, \\ BB &= \left(\text{Id} + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma + 1)} V V^T\right)^2 \\ &= \text{Id} + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma + 1)} \left(2 + \frac{|V|^2 \gamma^2}{c^2(\gamma + 1)}\right) V V^T = \text{Id} + \frac{\gamma^2}{c^2} V V^T\end{aligned}$$

since

$$2 + \frac{|V|^2 \gamma^2}{c^2(\gamma + 1)} = 2 + \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} = \gamma + 1.$$

Thus we have shown, that $\mathbf{L}_c(-Q^T V, Q^T)$ is the right inverse. It is also the left inverse, because

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}_c(-Q^T V, Q^T) \mathbf{L}_c(V, Q) \\ &= \mathbf{L}_c(0, Q^T) \underbrace{\mathbf{L}_c(-V, \text{Id}) \mathbf{L}_c(V, \text{Id})}_{= \text{Id (siehe oben)}} \mathbf{L}_c(0, Q) \\ &= \mathbf{L}_c(0, Q^T) \mathbf{L}_c(0, Q) = \mathbf{L}_c(0, Q^T Q) = \text{Id}. \end{aligned}$$

Therefore $\mathbf{L}_c(V, Q)^{-1} = \mathbf{L}_c(-Q^T V, Q^T)$.

Now the nontrivial step is to show that

$$\mathbf{L}_c(U, \text{Id}) \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) = \mathbf{L}_c(W, \text{Id}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(U, V) \end{bmatrix}, \quad (\text{II2.7})$$

where W depends on U and V and $\mathbf{T}(U, V)$ is the **Thomas rotation** (1926), which can be found in [68],

$$\begin{aligned} W &= \left(\gamma_V + \frac{V \bullet U}{c^2(\gamma_U + 1)} \right) U + V, \\ \mathbf{T}(U, V) &= Q \text{ with } Q \text{ orthonormal.} \end{aligned}$$

We prove this identity by using the representation of Lorentz transformation with arbitrary vectors in \mathbb{R}^3 . The assertion (II2.7) then reads

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_c(\tilde{U}, \text{Id}) \tilde{\mathbf{L}}_c(\tilde{V}, \text{Id}) &= \tilde{\mathbf{L}}_c(\tilde{W}, \text{Id}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{U}, \tilde{V}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{W} &:= \gamma_{\tilde{V}} \tilde{U} + B(\tilde{U}) \tilde{V}, \\ \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{U}, \tilde{V}) &:= B(\tilde{W})^{-1} \left(B(\tilde{U}) B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2} \tilde{U} \tilde{V}^T \right), \\ \gamma_{\tilde{U}} &:= \sqrt{1 + \frac{|\tilde{U}|^2}{c^2}} \text{ and similar } \gamma_{\tilde{V}}, \gamma_{\tilde{W}}, \\ B(\tilde{U}) &:= \text{Id} + \frac{1}{c^2(\gamma_{\tilde{U}} + 1)} \tilde{U} \tilde{U}^T \text{ and similar } B(\tilde{V}), B(\tilde{W}). \end{aligned} \quad (\text{II2.8})$$

Inserting the definition of the Lorentz matrix in 2.3(1) we have to prove the identity

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\tilde{U}} & \frac{1}{c^2} \tilde{U}^T \\ \tilde{U} & B(\tilde{U}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\tilde{V}} & \frac{1}{c^2} \tilde{V}^T \\ \tilde{V} & B(\tilde{V}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{\tilde{W}} & \frac{1}{c^2} \tilde{W}^T \\ \tilde{W} & B(\tilde{W}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

where M denotes a certain matrix which has to be shown to be the Thomas rotation. Performing the matrix multiplication on both sides this identity

becomes

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2} & \frac{1}{c^2} \left(\gamma_{\tilde{U}}\tilde{V} + B(\tilde{V})\tilde{U} \right)^T \\ \gamma_{\tilde{V}}\tilde{U} + B(\tilde{U})\tilde{V} & B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{\tilde{W}} & \frac{1}{c^2}\tilde{W}^T M \\ \tilde{W} & B(\tilde{W})M \end{bmatrix}.$$

The last row we take as definition for \tilde{W} and M

$$\begin{aligned} \tilde{W} &:= \gamma_{\tilde{V}}\tilde{U} + B(\tilde{U})\tilde{V} \\ M &:= B(\tilde{W})^{-1} \left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \right). \end{aligned} \quad (\text{II2.9})$$

Here the inverse of $B(\tilde{W})$ exists, since this matrix is positive definite. Therefore it remains to show that

$$\begin{aligned} \gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2} &= \gamma_{\tilde{W}}, \\ M(\gamma_{\tilde{U}}\tilde{V} + B(\tilde{V})\tilde{U}) &= \tilde{W}, \end{aligned} \quad (\text{II2.10})$$

M is an orthogonal transformation with $\det M = 1$.

In fact, the second statement gives with the fact that M is an orthogonal transformation, that is $M^T = M^{-1}$,

$$M^T \tilde{W} = \gamma_{\tilde{U}}\tilde{V} + B(\tilde{V})\tilde{U}.$$

Altogether this would complete the proof. \square

Hier ist ein Beweis der drei Aussagen in (II2.10).

Beweis 1. Aussage. Zu zeigen ist

$$\gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2} = \sqrt{1 + \frac{|\tilde{W}|^2}{c^2}}.$$

Da die linke Seite positiv ist, denn es gilt

$$\left| \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2} \right| = \left| \frac{\tilde{U}}{c} \right| \cdot \left| \frac{\tilde{V}}{c} \right| \leq \sqrt{\left(1 + \frac{|\tilde{U}|^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}\right)} = \gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}},$$

reicht es

$$\left(\gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2} \right)^2 = 1 + \frac{|\tilde{W}|^2}{c^2}$$

zu zeigen. Nach der Definition von \tilde{W} und $B(\tilde{U})$ ist

$$\begin{aligned} 1 + \frac{|\tilde{W}|^2}{c^2} &= 1 + \frac{1}{c^2} \left| \gamma_{\tilde{V}}\tilde{U} + B(\tilde{U})\tilde{V} \right|^2 \\ &= 1 + \frac{1}{c^2} \left| \left(\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2(\gamma_{\tilde{U}}+1)} \right) \tilde{U} + \tilde{V} \right|^2 \\ &= 1 + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2} + \frac{2}{c^2} \left(\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2(\gamma_{\tilde{U}}+1)} \right) \tilde{U}\bullet\tilde{V} + \frac{|\tilde{U}|^2}{c^2} \left(\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2(\gamma_{\tilde{U}}+1)} \right)^2 \\ &= \gamma_{\tilde{V}}^2 + \frac{2}{c^2} \left(\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2(\gamma_{\tilde{U}}+1)} \right) \tilde{U}\bullet\tilde{V} + (\gamma_{\tilde{U}}^2 - 1) \left(\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2(\gamma_{\tilde{U}}+1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Dies ist das gewünschte Ergebnis, denn mit Umformungen ist dies

$$\begin{aligned}
 &= \gamma_{\tilde{V}}^2 + \frac{2\gamma_{\tilde{V}}}{c^2} \tilde{U} \bullet \tilde{V} + \frac{2}{c^4(\gamma_{\tilde{U}} + 1)} (\tilde{U} \bullet \tilde{V})^2 \\
 &\quad + (\gamma_{\tilde{U}}^2 - 1)\gamma_{\tilde{V}}^2 + \frac{2(\gamma_{\tilde{U}}^2 - 1)\gamma_{\tilde{V}}}{c^2(\gamma_{\tilde{U}} + 1)} \tilde{U} \bullet \tilde{V} + \frac{\gamma_{\tilde{U}}^2 - 1}{c^4(\gamma_{\tilde{U}} + 1)^2} (\tilde{U} \bullet \tilde{V})^2 \\
 &= \gamma_{\tilde{U}}^2 \gamma_{\tilde{V}}^2 + \frac{2\gamma_{\tilde{V}}}{c^2} (1 + \gamma_{\tilde{U}} - 1) \tilde{U} \bullet \tilde{V} + \frac{1}{c^4} \underbrace{\left(\frac{2}{\gamma_{\tilde{U}} + 1} + \frac{\gamma_{\tilde{U}} - 1}{\gamma_{\tilde{U}} + 1} \right)}_{=1} (\tilde{U} \bullet \tilde{V})^2 \\
 &= \left(\gamma_{\tilde{U}} \gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U} \bullet \tilde{V}}{c^2} \right)^2 .
 \end{aligned}$$

□

Beweis 2. Aussage. Es muss

$$\begin{aligned}
 M(\gamma_{\tilde{U}} \tilde{V} + B(\tilde{V})\tilde{U}) &= \tilde{W} \\
 M &:= B(\tilde{W})^{-1} \left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2} \tilde{U} \tilde{V}^T \right) ,
 \end{aligned}$$

gezeigt werden, also

$$\left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2} \tilde{U} \tilde{V}^T \right) (\gamma_{\tilde{U}} \tilde{V} + B(\tilde{V})\tilde{U}) = B(\tilde{W})\tilde{W} . \quad (\text{II2.11})$$

Nun gilt für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
 B(\tilde{W})\tilde{W} &= \left(\text{Id} + \frac{1}{c^2(\gamma_{\tilde{W}} + 1)} \tilde{W} \tilde{W}^T \right) \\
 &= \underbrace{\left(1 + \frac{|\tilde{W}|^2}{c^2(\gamma_{\tilde{W}} + 1)} \right)}_{= \gamma_{\tilde{W}}} \tilde{W} = \gamma_{\tilde{W}} \tilde{W} ,
 \end{aligned}$$

und genauso $B(\tilde{U})\tilde{U} = \gamma_{\tilde{U}} \tilde{U}$ und $B(\tilde{V})\tilde{V} = \gamma_{\tilde{V}} \tilde{V}$. Und die linke Seite von (II2.11) ist gleich

$$\begin{aligned}
 &= \gamma_{\tilde{U}} B(\tilde{U}) \underbrace{B(\tilde{V})\tilde{V}}_{= \gamma_{\tilde{V}} \tilde{V}} + B(\tilde{U})B(\tilde{V})^2 \tilde{U} \\
 &\quad + \gamma_{\tilde{U}} \underbrace{\frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}}_{= \gamma_{\tilde{V}}^2 - 1} \tilde{U} + \frac{1}{c^2} (\tilde{V} \bullet (B(\tilde{V})\tilde{U})) \tilde{U} .
 \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\tilde{V} \bullet (B(\tilde{V})\tilde{U}) = (B(\tilde{V})^T \tilde{V}) \bullet \tilde{U} = (B(\tilde{V})\tilde{V}) \bullet \tilde{U} = \gamma_{\tilde{V}} \tilde{V} \bullet \tilde{U} = \gamma_{\tilde{V}} \tilde{U} \bullet \tilde{V} ,$$

und da

$$\begin{aligned}
 B(\tilde{V})^2 &= (\text{Id} + a \tilde{V} \tilde{V}^T)^2 \quad (\text{wobei } a := \frac{1}{c^2(\gamma_{\tilde{V}} + 1)}) \\
 &= \text{Id} + (2a + |\tilde{V}|^2 a^2) \tilde{V} \tilde{V}^T \quad (\text{wegen } |\tilde{V}|^2 = c^2(\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)) \\
 &= \text{Id} + \frac{1}{c^2} \tilde{V} \tilde{V}^T ,
 \end{aligned} \quad (\text{II2.12})$$

ist

$$\begin{aligned} B(\tilde{U})B(\tilde{V})^2\tilde{U} &= B(\tilde{U})\left(\text{Id} + \frac{1}{c^2}\tilde{V}\tilde{V}^T\right)\tilde{U} \\ &= B(\tilde{U})\tilde{U} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}B(\tilde{U})\tilde{V} = \gamma_{\tilde{U}}\tilde{U} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}B(\tilde{U})\tilde{V}, \end{aligned}$$

und daher wird die linke Seite von (II2.11) gleich

$$\begin{aligned} &= \gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}}B(\tilde{U})\tilde{V} + B(\tilde{U})B(\tilde{V})^2\tilde{U} \\ &+ \gamma_{\tilde{U}}(\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)\tilde{U} + \frac{1}{c^2}(\tilde{V}\bullet(B(\tilde{V})\tilde{U}))\tilde{U} \\ &= \gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}}B(\tilde{U})\tilde{V} + \gamma_{\tilde{U}}\tilde{U} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}B(\tilde{U})\tilde{V} \\ &+ \left(\gamma_{\tilde{U}}(\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1) + \frac{1}{c^2}\gamma_{\tilde{V}}\tilde{U}\bullet\tilde{V}\right)\tilde{U} \\ &= \left(\gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}\right)B(\tilde{U})\tilde{V} + \left(\gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}}^2 + \frac{1}{c^2}\gamma_{\tilde{V}}\tilde{U}\bullet\tilde{V}\right)\tilde{U} \\ &= \left(\gamma_{\tilde{U}}\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}\right)\left(B(\tilde{U})\tilde{V} + \gamma_{\tilde{V}}\tilde{U}\right) = \gamma_{\tilde{W}}\left(B(\tilde{U})\tilde{V} + \gamma_{\tilde{V}}\tilde{U}\right) = \gamma_{\tilde{W}}\tilde{W}. \end{aligned}$$

□

Beweis 3. Aussage. Wir haben zu zeigen, dass M eine orthogonale Transformation mit Determinante 1 ist, d.h.

$$(Mx_1)\bullet(Mx_2) = x_1\bullet x_2$$

ist, oder dazu äquivalent $M^T M = \text{Id}$. Dazu äquivalent ist (siehe Beweis von I.1.3)

$$M M^T = \text{Id}.$$

Mit (II2.9) muss also gelten

$$\text{Id} = B(\tilde{W})^{-1} \left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \right) \left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \right)^T B(\tilde{W})^{-T}$$

oder

$$B(\tilde{W})B(\tilde{W})^T = \left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \right) \left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \right)^T. \quad (\text{II2.13})$$

Die linke Seite ist (wie (II2.12) für \tilde{V})

$$B(\tilde{W})B(\tilde{W})^T = B(\tilde{W})^2 = \text{Id} + \frac{1}{c^2}\tilde{W}\tilde{W}^T.$$

Da

$$\tilde{W} = \gamma_{\tilde{V}}\tilde{U} + B(\tilde{U})\tilde{V} = \underbrace{\left(\gamma_{\tilde{V}} + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2(\gamma_{\tilde{U}} + 1)} \right)}_{=: b} \tilde{U} + \tilde{V},$$

ist

$$\begin{aligned} B(\tilde{W})B(\tilde{W})^T &= \text{Id} + \frac{1}{c^2}\tilde{W}\tilde{W}^T \\ &= \text{Id} + \frac{1}{c^2}(b\tilde{U} + \tilde{V})(b\tilde{U}^T + \tilde{V}^T) \\ &= \text{Id} + \frac{1}{c^2}\left(b^2\tilde{U}\tilde{U}^T + b\tilde{U}\tilde{V}^T + b\tilde{V}\tilde{U}^T + \tilde{V}\tilde{V}^T\right). \end{aligned} \quad (\text{II2.14})$$

Mit

$$a_{\tilde{U}} := \frac{1}{\gamma_{\tilde{U}} + 1}, \quad a_{\tilde{V}} := \frac{1}{\gamma_{\tilde{V}} + 1}$$

ist

$$\begin{aligned}
 & B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \\
 &= \left(\text{Id} + \frac{a_{\tilde{U}}}{c^2}\tilde{U}\tilde{U}^T\right)\left(\text{Id} + \frac{a_{\tilde{V}}}{c^2}\tilde{V}\tilde{V}^T\right) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T \\
 &= \text{Id} + \frac{1}{c^2}\left(a_{\tilde{U}}\tilde{U}\tilde{U}^T + a_{\tilde{V}}\tilde{V}\tilde{V}^T + \underbrace{\left(\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}} + 1\right)}_{=: d}\right)\tilde{U}\tilde{V}^T.
 \end{aligned}$$

Also ist die rechte Seite von (II2.13)

$$\begin{aligned}
 &= \left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T\right)\left(B(\tilde{U})B(\tilde{V}) + \frac{1}{c^2}\tilde{U}\tilde{V}^T\right)^T \\
 &= \left(\text{Id} + \frac{1}{c^2}\left(a_{\tilde{U}}\tilde{U}\tilde{U}^T + a_{\tilde{V}}\tilde{V}\tilde{V}^T + d\tilde{U}\tilde{V}^T\right)\right) \\
 &\quad \left(\text{Id} + \frac{1}{c^2}\left(a_{\tilde{U}}\tilde{U}\tilde{U}^T + a_{\tilde{V}}\tilde{V}\tilde{V}^T + d\tilde{V}\tilde{U}^T\right)\right) \\
 &= \text{Id} + \frac{1}{c^2}\left(2a_{\tilde{U}} + \frac{|\tilde{U}|^2}{c^2}a_{\tilde{U}}^2 + 2\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}da_{\tilde{U}} + d^2\frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}\right)\tilde{U}\tilde{U}^T \\
 &\quad + \frac{1}{c^2}\left(2a_{\tilde{V}} + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}a_{\tilde{V}}^2\right)\tilde{V}\tilde{V}^T \\
 &\quad + \frac{1}{c^2}\left(d + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}} + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}da_{\tilde{V}}\right)\left(\tilde{U}\tilde{V}^T + \tilde{V}\tilde{U}^T\right).
 \end{aligned}$$

Dies ist derselbe Ausdruck wie in (II2.14), wenn wir zeigen

$$\begin{aligned}
 1 &= 2a_{\tilde{V}} + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}a_{\tilde{V}}^2, \\
 b &= d + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}} + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}da_{\tilde{V}}, \\
 b^2 &= 2a_{\tilde{U}} + \frac{|\tilde{U}|^2}{c^2}a_{\tilde{U}}^2 + 2\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}da_{\tilde{U}} + d^2\frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}.
 \end{aligned}$$

Indem wir die Definitionen einsetzen, ist

$$\begin{aligned}
 2a_{\tilde{V}} + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}a_{\tilde{V}}^2 &= 2a_{\tilde{V}} + (\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)a_{\tilde{V}}^2 = 1, \\
 d + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}} + \frac{|\tilde{V}|^2}{c^2}da_{\tilde{V}} \\
 &= 1 + 2\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}} + (\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)a_{\tilde{V}}\left(1 + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}}\right) \\
 &= 1 + (\gamma_{\tilde{V}} - 1) + \frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}}\left(2 + (\gamma_{\tilde{V}} - 1)\right) = b
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &2a_{\tilde{U}} + \frac{|\tilde{U}|^2}{c^2}a_{\tilde{U}}^2 + 2\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}da_{\tilde{U}} + d^2\frac{|\tilde{V}|^2}{c^2} \\
 &= 2a_{\tilde{U}} + (\gamma_{\tilde{U}}^2 - 1)a_{\tilde{U}}^2 + d\left(2\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}} + \left(\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}} + 1\right)(\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)\right) \\
 &= 1 + d\left(\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}(2 + a_{\tilde{V}}(\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)) + (\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)\right) \\
 &= 1 + \left(\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}a_{\tilde{V}} + 1\right)\left(\frac{\tilde{U}\bullet\tilde{V}}{c^2}a_{\tilde{U}}(\gamma_{\tilde{V}} + 1) + (\gamma_{\tilde{V}}^2 - 1)\right) = b^2.
 \end{aligned}$$

□

Den Definitionen könnte man entnehmen, dass die Lorentz-Transformationen das relativistische Analogon der Galilei-Transformationen darstellen. Dem ist aber nicht so, denn die Lorentz-Transformationen generieren keine nichtlineare Transformation (siehe [23, Abschnitt I.4]), wie das die Galilei-Transformationen tun, siehe die Charakterisierung der Newton Transformationen in 1.7.

3 Objektivität von Differentialgleichungen

Die Formulierung einer Klasse von physikalischen Prozessen muss unabhängig vom Beobachter sein, das heißt, sie muss unabhängig von Beobachtern sein, die sich durch ein Element in der Gruppe \mathcal{T} transformieren. Insbesondere gilt dies für die folgenden Aussagen:

- Erhaltungssätze (Diese wurden in I.1 eingeführt als Basis für die Dynamik physikalischer Prozesse.)
- Konstitutive Funktionen (Sie treten in der Modellierung verschiedener Materialien auf und sind Teil von Erhaltungssätzen, siehe Abschnitt 4.)

Wir betrachten in diesem Abschnitt einige spezielle Erhaltungssätze, wobei wir uns der Einfachheit halber auf klassische Lösungen beschränken. Die Überlegungen sind eine Wiederholung einiger Aussagen aus dem Abschnitt I.5, wobei der zentrale Satz der “Hauptsatz über die Invarianz” I.5.1 war. Als Menge der Transformationen Y wählen wir hierbei die Gruppe der Newton-Transformationen $\mathcal{T}_{\text{Newton}}^1$, die wir in 1.3 definiert hatten. Zu einer Transformation Y in dieser Gruppe sind X und Q wie in (III.3) definiert. Es gilt für die Funktionaldeterminante von Y

$$J = \det D_{(t^*, x^*)} Y = \det D_{x^*} X = \det Q = 1,$$

also werden die Gleichungen in (I5.11) einfacher, siehe (II3.5). Mit $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir (siehe (I5.1)) in \mathcal{U} die folgenden Differentialgleichungen

$$\partial_t u^k + \operatorname{div}_x q^k = \mathbf{r}^k \text{ für } k = 1, \dots, N, \quad (\text{II3.1})$$

wobei u^k , q_i^k und \mathbf{r}^k gegebene Funktionen für $k = 1, \dots, N$ seien, oder in Vektorschreibweise $u = (u^k)_k$, $q = (q^k)_k$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}^k)_k$,

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} q_i = \mathbf{r}. \quad (\text{II3.2})$$

Es gilt also für Testfunktionen $\zeta \in C_0^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{R}^N)$

$$\sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{U}} (\partial_t \zeta_k u^k + \nabla_x \zeta_k \bullet q^k + \zeta_k \mathbf{r}^k) \, dL^{n+1} = 0. \quad (\text{II3.3})$$

Die Objektivität gewisser Erhaltungssätze wird durch ein Transformationsgesetz für Testfunktionen definiert: Ist das Koordinatensystem eines Beobachters $y = (t, x)$ und werden die Koordinaten eines anderen Beobachters

¹ Wir werden hier als Gruppe die Newton Transformationen wählen. Daher stimmen wir nicht mit mancher Literatur überein, die nur die Objektivität bezüglich Galilei Transformationen verlangt. Unsere Definition der Objektivität verlangt mehr Bedingungen an die physikalischen Größen, was aber auch klar ist, wie die Corioliskraft und der Spannungstensor zeigen.

$y^* = (t^*, x^*)$ vermöge der Abbildung $y = Y(y^*)$ transformiert, so bestimmt die Transformationsregel für Testfunktionen den Typ des Systems von Erhaltungssätzen. Hierbei sind $y \mapsto \zeta(y) \in \mathbb{R}^N$ die Testfunktionen des einen Beobachters und $y^* \mapsto \zeta^*(y^*) \in \mathbb{R}^N$ die Testfunktionen des anderen Beobachters, und es gilt:

**Transformationsregel für Testfunktionen
eines Erhaltungssystems:**

$$\zeta^* = Z^T \zeta \circ Y \quad (\text{oder } \zeta \circ Y = Z^{-T} \zeta^*), \tag{II3.4}$$

$$Z = (Z_{kl})_{k,l=1,\dots,N} \text{ invertierbare Funktion}$$

Also bestimmt die Funktion $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ die **Objektivität der Erhaltungssätze** (II3.1). Nach der Aussage in (I5.11) ist die Invarianz von (II3.1) erfüllt, falls folgende Identitäten gelten:

Transformationsformel:

$$\begin{aligned} u^k \circ Y &= \sum_l Z_{kl} u^{*l}, \\ q_i^k \circ Y &= \sum_l \dot{X}_i Z_{kl} u^{*l} + \sum_{l,j} Q_{ij} Z_{kl} q_j^{*l}, \\ \mathbf{r}^k \circ Y &= \sum_l \dot{Z}_{kl} u^{*l} + \sum_{l,j} Z_{kl'j} q_j^{*l} + \sum_l Z_{kl} \mathbf{r}^{*l}, \end{aligned} \tag{II3.5}$$

für alle $k = 1, \dots, N$ und $i = 1, \dots, n$,
wobei l von $1, \dots, N$ und j von $1, \dots, n$ läuft.

Wir haben also nur die Matrix Z richtig zu wählen, um Aussagen über gewisse physikalische Erhaltungssysteme zu erlangen, und zwar ist das in diesem Abschnitt für die

Massenbilanz:	$Z = 1$
Masse-Impuls Bilanz:	$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & DX \end{bmatrix}$
Masse-Impuls-Energie Bilanz:	$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dot{X} & DX & 0 \\ \frac{1}{2} \dot{X} ^2 & \dot{X}^T Q & 1 \end{bmatrix}$
Transformationsformeln:	
	$u \circ Y = Z u^*$,
	$q_i \circ Y = \dot{X}_i Z u^* + \sum_j Q_{ij} Z q_j^*$,
	$\mathbf{r} \circ Y = \dot{Z} u^* + \sum_j Z'_{ij} q_j^* + Z \mathbf{r}^*$

Wir werden jetzt verschiedene Klassen von Erhaltungssätzen einführen, die sich nur durch Z unterscheiden.

Skalare Gleichungen

Wir wenden dies an zunächst auf eine skalarwertige Gleichung

$$\partial_t u + \operatorname{div} q = \mathbf{r}, \quad (\text{II3.6})$$

welche in der schwachen Form für $\zeta \in C_0^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ lautet

$$0 = \int_{\mathcal{U}} (\partial_t \zeta \cdot u + \nabla \zeta \bullet q + \zeta \cdot \mathbf{r}) \, dL^{n+1}.$$

3.1 Skalare Gleichung (Definition). Wir sagen, die Gleichung (II3.6) ist eine *skalare Gleichung*, wenn sich die schwache Form für eine Koordinatentransformation $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ nach dem Gesetz

$$\zeta^* = \zeta \circ Y \text{ für reellwertige Testfunktionen}$$

transformiert. Also ist $Z = 1$. Dies ist der Fall (siehe (I5.11) oder (II3.5)), falls gilt

$$\begin{aligned} u \circ Y &= u^*, \\ q \circ Y &= u^* \dot{X} + Qq^*, \\ \mathbf{r} \circ Y &= \mathbf{r}^*. \end{aligned} \quad (\text{II3.7})$$

Beweis. Nach (II3.5) erhalten wir für $N = 1$ und $Z = 1$, dass $\zeta^* = \zeta \circ Y$, damit gilt $u \circ Y = u^*$ und $q_i \circ Y = \dot{X}_i u^* + \sum_j Q_{ij} q_j^*$ sowie $\mathbf{r} \circ Y = \mathbf{r}^*$. \square

Dies ist Anlass für folgende Definition, die wir auch im folgenden Satz brauchen werden. Es sei bemerkt, dass diese Definitionen nicht die Transformationsregel für den Fluss q in (II3.7) beinhalten.

3.2 Objektive Tensoren. Die klassischen Definitionen sind, wenn zwei Beobachter mittels der Transformation $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ in Verbindung stehen:

(1) Eine reelle Größe $(t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ heißt *objektiver Skalar*, falls

$$u \circ Y = u^*,$$

wobei $(t^*, x^*) \mapsto u^*(t^*, x^*) \in \mathbb{R}$ diese reelle Funktion für einen weiteren Beobachter ist.

(2) Eine vektorielle Größe $(t, x) \mapsto q(t, x) \in \mathbb{R}^n$ heißt *objektiver Vektor*, falls

$$q \circ Y = Qq^*,$$

wobei $(t^*, x^*) \mapsto q^*(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^n$ der Wert für einen weiteren Beobachter ist.

(3) Eine tensorielle Größe $(t, x) \mapsto M(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **objektiver Tensor**, falls

$$M \circ Y = Q M^* Q^T,$$

wobei $(t^*, x^*) \mapsto M^*(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Wert für einen weiteren Beobachter ist.

(4) Allgemein, wenn $(t, x) \mapsto T_{i_1, \dots, i_m}(t, x) \in \mathbb{R}$ für $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ die Komponenten eines m -Tensors sind, wobei $m \geq 1$, dann heißt T ein **objektiver m -Tensor**, falls

$$T_{i_1, \dots, i_m} \circ Y = \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \left(\prod_{k=1}^m Q_{i_k j_k} \right) T_{j_1, \dots, j_m}^* \quad \text{für } i_1, \dots, i_m = 1, \dots, n,$$

wobei $(t^*, x^*) \mapsto T^*(t^*, x^*)$ der m -Tensor für einen weiteren Beobachter ist.

Wir kommen zur Massenerhaltung. Dies ist eine skalare Gleichung wie in Definition 3.1 und hat die Form

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \tilde{J} = \mathbf{r}, \quad (\text{II3.8})$$

Wie wir schon wissen, sind hierbei die Massendichte ϱ und die Reaktionsrate \mathbf{r} objektive Skalare. Bleibt also noch der Flussterm \tilde{J} zu interpretieren, der die Transformationsregel in (II3.7) erfüllt:

$$\tilde{J} \circ Y = \varrho^* \dot{X} + Q \tilde{J}^*. \quad (\text{II3.9})$$

Dazu definieren wir, was eine Geschwindigkeit v ist.²

3.3 Geschwindigkeit (Definition). Eine vektorielle Größe v heißt **Geschwindigkeit** (*en*: velocity), falls

$$v \circ Y = \dot{X} + Q v^*$$

erfüllt ist für verschiedene Beobachter, die sich mit $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ transformieren. *Hinweis:* Dasselbe erhalten wir mit der Definition

$$\begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = DY \begin{bmatrix} 1 \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{X} + Q v^* \end{bmatrix}$$

wobei die erste Gleichung auch für den Lorentzfall gilt. Diese Definition von $(1, v)$ als 4er-Geschwindigkeit zeigt, dass die Transformationsregel für $(1, v)$ linear ist mit DY als Matrix.

²Wir geben hier die Definition einer Geschwindigkeit mit Hilfe einer Transformationsformel. Es ist klar, dass wir nicht mit der Bemerkung in mancher Literatur übereinstimmen, dass die Geschwindigkeit nicht objektiv sei. Dies liegt dort an einem nicht vollständigen Gebrauch vom Begriff der Objektivität.

Ist nun v eine Geschwindigkeit, so ergibt sich, dass ϱv die Transformationsregel

$$\begin{aligned} (\varrho v) \circ Y &= (\varrho \circ Y)(v \circ Y) \\ &= \varrho^*(\dot{X} + Qv^*) = \varrho^* \dot{X} + Q(\varrho^* v^*) \end{aligned}$$

erfüllt, d.h. dieselbe Transformationsregel wie \tilde{J} in (II3.9). Mit

$$\mathbf{J} := \tilde{J} - \varrho v \quad \text{also} \quad \tilde{J} = \varrho v + \mathbf{J} \quad (\text{II3.10})$$

bilden wir nun die Differenz der Transformationsregel von \tilde{J} und der von ϱv und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \circ Y &= \tilde{J} \circ Y - (\varrho v) \circ Y \\ &= (\varrho^* \dot{X} + Q\tilde{J}^*) - \varrho^*(\dot{X} + Qv^*) = Q(\tilde{J}^* - \varrho^* v^*) = Q\mathbf{J}^*, \end{aligned}$$

d.h. \mathbf{J} ist ein objektiver Vektor. Also haben wir gezeigt:

3.4 Massengleichung. Die allgemeine *Massengleichung*

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) = \mathbf{r}$$

ist eine skalare Gleichung. Dies ist erfüllt, falls gilt:

- ϱ und \mathbf{r} sind objektive Skalare (siehe Definition 3.2(1)),
- v ist eine Geschwindigkeit (siehe Definition 3.3),
- \mathbf{J} ist ein objektiver Vektor (siehe Definition 3.2(2)),

wobei \mathbf{r} die *Massenproduktion* und \mathbf{J} die *Massendiffusion* ist.

Ist nun \bar{v} eine weitere Geschwindigkeit, so ist $v - \bar{v}$ wegen, siehe 3.3,

$$(v - \bar{v}) \circ Y = Q(v^* - \bar{v}^*)$$

ein objektiver Vektor. Somit gilt für den Fluss in der Massenerhaltung

$$\tilde{\mathbf{J}} = \varrho v + \mathbf{J} = \varrho \bar{v} + \bar{\mathbf{J}}, \quad \bar{\mathbf{J}} := \varrho(v - \bar{v}) + \mathbf{J}, \quad (\text{II3.11})$$

wobei $\bar{\mathbf{J}}$ ebenfalls ein objektiver Vektor ist. Eine weitere skalare Gleichung ist durch die Gravitation, die sich in der Schwerkraft äußert, gegeben.

3.5 Gravitationsgleichung. Die *Gravitationsgleichung*

$$\operatorname{div}(-\nabla \phi) = \varrho$$

ist eine skalare Gleichung. Das ist konsistent damit, dass die Massendichte ϱ ein objektiver Skalar ist und dass für das *Gravitationspotential* gilt:

ϕ ist objektiver Skalar,

eine Definition, die hier gemacht wird.

Beweis. Die Differentialgleichung ist

$$\underbrace{\partial_t 0}_{u :=} + \operatorname{div}(\underbrace{-\nabla\phi}_{q :=}) = \underbrace{\rho}_{\mathbf{r} :=}$$

Da $u = 0$, haben wir zu zeigen, dass $q = -\nabla\phi$ ein objektiver Vektor ist. Nun ist ϕ ein objektiver Skalar, also

$$\phi \circ Y = \phi^*$$

und wir berechnen die Ableitung dieser Gleichung. Es ist

$$\partial_{x_j^*}\phi^* = \partial_{x_j^*}(\phi \circ Y) = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i}\phi) \circ Y \cdot \partial_{x_j^*}Y_i,$$

und da $\partial_{x_j^*}Y_i = Y_i{}'{}_j = Q_{ij}$ erhalten wir

$$\partial_{x_j^*}\phi^* = \sum_{i=1}^n Q_{ij}(\partial_{x_i}\phi) \circ Y \quad \text{oder} \quad \nabla_{x^*}\phi^* = Q^T((\nabla_x\phi) \circ Y).$$

Da $Q^T = Q^{-1}$ ist dies äquivalent zu $(\nabla_x\phi) \circ Y = Q\nabla_{x^*}\phi^*$. (Dieser Schluß lässt sich für jeden objektiven Skalar durchführen.) \square

Masse-Impuls Gleichungen

Als weiteres Beispiel betrachten wir Masse und Impuls.

3.6 Masse-Impuls-Gleichung (Definition). Dieses Gleichungssystem hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} &= \tilde{\mathbf{f}}, \end{aligned}$$

und heißt objektiv, falls es sich zwischen zwei Beobachtern, die durch eine Koordinatentransformation $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ aufeinander bezogen sind, nach dem allgemeinen Gesetz

$$\zeta^* = Z^T \zeta \circ Y$$

für Testfunktionen $\zeta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ transformiert, wobei die Matrix

$$Z := D_{(t^*, x^*)}Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \tag{II3.12}$$

ist. Hierbei ist neben den Größen der allgemeinen Massengleichung ρv der **Impuls** und $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ der **Impulsfluss** sowie $\tilde{\mathbf{f}}$ die **allgemeine Kraftdichte**.

Hinweis: Das System ist ein beliebiges System von $1 + n$ Gleichungen, was nur durch das Gesetz für Testfunktionen eingeschränkt ist. Die Matrix Z in (II3.12) definiert dieses System als Masse-Impulse-System. Alles andere ist eine Folgerung aus dieser Definition.

Das System lässt sich auch schreiben als

$$\partial_t \underbrace{\begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \end{bmatrix}}_{=: u} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{J}_i \\ (\tilde{\Pi}_{ki})_k \end{bmatrix}}_{=: q_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}$$

und dieses System ist objektiv, falls mit der klassischen Koordinatentransformation $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ gilt (siehe (II3.5) oder (I5.11))

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \end{bmatrix} \circ Y &= Z \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{J}_i \\ (\tilde{\Pi}_{ki})_k \end{bmatrix} \circ Y &= \dot{X}_i Z \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n Q_{ij} Z \begin{bmatrix} \tilde{J}_j^* \\ (\tilde{\Pi}_{lj}^*)_l \end{bmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix} \circ Y &= Z'_{t^*} \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n Z'_{x_j^*} \begin{bmatrix} \tilde{J}_j^* \\ (\tilde{\Pi}_{lj}^*)_l \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} \mathbf{r}^* \\ \tilde{\mathbf{f}}^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix}, \quad Z'_{t^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \ddot{X} & \dot{Q} \end{bmatrix}, \quad Z'_{x_j^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{Q}_{kj} & 0 \end{bmatrix},$$

erhalten wir für die erste Identität

$$\begin{aligned} \varrho \circ Y &= \varrho^*, \\ (\varrho v) \circ Y &= \varrho^* \dot{X} + Q(\varrho^* v^*). \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen, nämlich dass ϱ ein objektiver Skalar ist, kam schon bei der Massenerhaltung vor, was klar ist, da das Masse-Impuls System ja die Massenerhaltung als erste Gleichung enthält. Für die zweite Identität erhalten wir für $k, i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_i \circ Y &= \varrho^* \dot{X}_i + \sum_{j=1}^n Q_{ij} \tilde{J}_j^*, \\ \tilde{\Pi}_{ki} \circ Y &= \dot{X}_i \left(\dot{X}_k \varrho^* + \sum_{l=1}^n Q_{kl} \varrho^* v_l^* \right) + \sum_{j=1}^n Q_{ij} \left(\dot{X}_k \tilde{J}_j^* + \sum_{l=1}^n Q_{kl} \tilde{\Pi}_{lj}^* \right). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung, was klar ist, kam schon bei der Massenerhaltung vor, und ist (II3.9). Setzen wir $\mathbf{J} := \tilde{\mathbf{J}} - \varrho v$, so folgt aus der ersten Gleichung und aus den gerade bewiesenen Transformationsregeln für ϱ und v wie im Beweis von 3.4, dass \mathbf{J} ein objektiver Vektor ist. Die zweite Gleichung ist

$$\tilde{\Pi}_{ki} \circ Y = \varrho^* \dot{X}_k \dot{X}_i + \varrho^* \dot{X}_i \sum_{l=1}^n Q_{kl} v_l^* + \dot{X}_k \sum_{j=1}^n Q_{ij} \tilde{J}_j^* + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n Q_{kl} Q_{ij} \tilde{\Pi}_{lj}^*,$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi} \circ Y &= \varrho^* \dot{X} \dot{X}^T + \varrho^*(Qv^*) \dot{X}^T + \dot{X} (Q\tilde{J}^*)^T + Q\tilde{\Pi}^* Q^T \\ &= (\dot{X} + Qv^*)(\varrho^* \dot{X})^T + \dot{X} (Q\tilde{J}^*)^T + Q\tilde{\Pi}^* Q^T.\end{aligned}\quad (\text{II3.13})$$

Wir vergleichen dies mit dem bekannten Transformationsverhalten von $v\tilde{J}^T$,

$$\begin{aligned}(v\tilde{J}^T) \circ Y &= (\dot{X} + Qv^*)(\varrho^* \dot{X} + Q\tilde{J}^*)^T \\ &= (\dot{X} + Qv^*)(\varrho^* \dot{X})^T + \dot{X} (Q\tilde{J}^*)^T + \underbrace{(Qv^*)(Q\tilde{J}^*)^T}_{= Q(v^* \tilde{J}^{*T}) Q^T}.\end{aligned}$$

Ziehen wir die von (II3.13) ab, so erhalten wir

$$(\tilde{\Pi} - v\tilde{J}^T) \circ Y = Q(\tilde{\Pi}^* - v^* \tilde{J}^{*T}) Q^T,$$

d.h.

$$\Pi := \tilde{\Pi} - v\tilde{J}^T = \tilde{\Pi} - v(\varrho v + \mathbf{J})^T$$

ist ein objektiver Tensor. Wir haben noch den Quellterm zu betrachten. Unter Benutzung der obigen Ableitungen von Z ergibt dies

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{r} \circ Y \\ \tilde{\mathbf{f}} \circ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \ddot{X} & \dot{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\dot{Q}_{kj})_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_j^* \\ (\tilde{\Pi}_{lj}^*)_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^* \\ \tilde{\mathbf{f}}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varrho^*(\ddot{X} + \dot{Q}v^*) \\ \varrho^*(\ddot{X} + \dot{Q}v^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{Q}\tilde{J}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}^* \\ \mathbf{r}^* \dot{X} + Q\tilde{\mathbf{f}}^* \end{bmatrix},\end{aligned}$$

d.h. $\mathbf{r} \circ Y = \mathbf{r}^*$, und

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}} \circ Y &= \varrho^*(\ddot{X} + \dot{Q}v^*) + \dot{Q}\tilde{J}^* + \mathbf{r}^* \dot{X} + Q\tilde{\mathbf{f}}^* \\ &= \varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + \dot{Q}\mathbf{J}^* + \mathbf{r}^* \dot{X} + Q\tilde{\mathbf{f}}^*,\end{aligned}$$

also

$$\tilde{\mathbf{f}} \circ Y = \varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + \dot{Q}\mathbf{J}^* + \mathbf{r}^* \dot{X} + Q\tilde{\mathbf{f}}^*. \quad (\text{II3.14})$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz.

3.7 Theorem. Das Masse-Impuls-System, also das System in 3.6 mit

$$\tilde{J} = \varrho v + \mathbf{J}, \quad \tilde{\Pi} = \varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi,$$

also beliebigem \mathbf{J} und Π , lautet

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}}.\end{aligned}\quad (\text{II3.15})$$

Es ist objektiv (siehe Definition 3.6 und (II3.5) oder (I5.11)), falls

- ϱ und \mathbf{r} objektive Skalare sind,
- v eine Geschwindigkeit ist,
- \mathbf{J} ein objektiver Vektor ist,
- Π ein objektiver Tensor ist,

wobei Π der allgemeine *Drucktensor* und $\tilde{\mathbf{f}}$ eine *allgemeine Kraftdichte* ist, d.h. die Transformationsregel (II3.14) erfüllt (was \mathbf{r} und \mathbf{J} enthält). Wir verweisen auf die nächste Aussage 3.8, wo ein Teil von $\tilde{\mathbf{f}}$ als *Scheinkräfte* und ein Teil als die *klassische Kraftdichte* definiert wird.

The transformation rule (II3.14) does not allow a vanishing force for all observers, even for the special case that \mathbf{r} and \mathbf{J} vanish, since then the inhomogeneous term is $\varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*)$ containing centrifugal and Coriolis forces (see example I.5.5). These forces are also called “fictitious forces” (*de*: “Scheinkräfte”, *fr*: “forces translucides”, *it*: “forze traslucidi”, *pl*: “sily przeswitujace”). The equation (II3.14) can also be written by reordering the terms of the right-hand side as

$$\tilde{\mathbf{f}} \circ Y = \varrho^* \ddot{X} + \dot{Q}(2\varrho^* v^* + \mathbf{J}^*) + \mathbf{r}^* \dot{X} + Q\tilde{\mathbf{f}}^* .$$

Here the term $2\varrho^* v^* + \mathbf{J}^*$ is the sum of the term under the time derivative of the momentum equation and the term under the space derivative of the mass equation. Ist nun w irgendeine Geschwindigkeit, also $w \circ Y = \dot{X} + Qw^*$, und daher für die Ableitung $(Dw \circ Y)Q = \dot{Q} + QDw^*$, so erfüllt $\mathbf{r}w + Dw\mathbf{J}$ die Transformationsformel (benutze, dass \mathbf{J} ein objektiver Vektor ist)

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}w + Dw\mathbf{J}) \circ Y &= \mathbf{r}^*(\dot{X} + Qw^*) + Dw \circ Y Q \mathbf{J}^* \\ &= \mathbf{r}^*(\dot{X} + Qw^*) + (\dot{Q} + QDw^*) \mathbf{J}^* \\ &= \mathbf{r}^* \dot{X} + \dot{Q} \mathbf{J}^* + Q(\mathbf{r}^* w^* + Dw^* \mathbf{J}^*) . \end{aligned}$$

Wenn wir dies von der Transformationsregel (II3.14) für $\tilde{\mathbf{f}}$ abziehen, erhalten wir

$$(\tilde{\mathbf{f}} - (\mathbf{r}w + Dw\mathbf{J})) \circ Y = \varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q(\tilde{\mathbf{f}}^* - (\mathbf{r}^* w^* + Dw^* \mathbf{J}^*)) ,$$

also erfüllt

$$\tilde{\mathbf{f}} - (\mathbf{r}w + Dw\mathbf{J})$$

die Transformationsformel (II3.18) unten, wenn \mathbf{f} wie in (II3.17) und als Standardgeschwindigkeit $w = v$ genommen wird.

3.8 Klassische Kraft (Definition). Das Masse-Impuls System (II3.15) (äquivalent zu 3.6) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\rho} + \rho \operatorname{div} v &= \mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J}, \\ \rho \overset{\circ}{v} + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (\text{II3.16})$$

wobei \mathbf{f} die (*klassische*) *Kraftdichte* ist gegeben durch

$$\mathbf{f} := \tilde{\mathbf{f}} - (\mathbf{r}v + Dv\mathbf{J}). \quad (\text{II3.17})$$

Für \mathbf{f} gilt die Transformationsformel

$$\mathbf{f} \circ Y = \rho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^*. \quad (\text{II3.18})$$

Notation: Hierbei ist $\overset{\circ}{h} := \partial_t h + v \bullet \nabla h$ für jede Funktion h .³

Bemerkung: Das Masse-Impuls System (II3.15) ist zwar äquivalent zu (II3.16) aber nur für glatte Funktionen. Bei Distributionen gehe besser zu dem Original (II3.15) zurück.

Beweis. Die Äquivalenz der Massenerhaltungen folgt aus

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = (\partial_t + v \bullet \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} v = \overset{\circ}{\rho} + \rho \operatorname{div} v.$$

Die Impulserhaltung schreibt sich als

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}} &= \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) \\ &= (\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v + \mathbf{J}))v + \rho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + Dv\mathbf{J} + \operatorname{div} \Pi \\ &= \mathbf{r}v + Dv\mathbf{J} + \rho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \operatorname{div} \Pi \\ &= \mathbf{r}v + Dv\mathbf{J} + \rho \overset{\circ}{v} + \operatorname{div} \Pi, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\operatorname{div}(v \mathbf{J}^T) = (\operatorname{div} \mathbf{J})v + Dv\mathbf{J} = (\operatorname{div} \mathbf{J} + \mathbf{J} \bullet \nabla)v$$

benutzt haben. Also folgt die zweite Gleichung von (II3.16), wenn \mathbf{f} wie in (II3.17) definiert wird. Die Transformationsregel (II3.18) wurde oben schon bewiesen. \square

³ Es ist $\overset{\circ}{h} := \partial_t h + v \bullet \nabla h = \partial_{(1,v)} h = (1, v) \bullet (\partial_t, \nabla) h$ für jede Funktion h . Für $\overset{\circ}{h}$ wird in der Literatur üblicherweise \dot{h} geschrieben, man findet auch $D_t h$ (siehe [4, Definition 5.1]), $\frac{d}{dt} h$ oder $D_v h$. Wenn Sie der Unterschied zur anderen Definition der Punktableitung nicht stört, können Sie \dot{h} verwenden. *Beachte:* Meistens ist in der Abkürzung keine Referenz auf v vorhanden.

Usually one considers the system (II3.15) in the case $\mathbf{J} = 0$. Then this system becomes

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{r}v + \mathbf{f},\end{aligned}$$

where \mathbf{f} is the “classical force” in 3.8. If one considers the total mass then usually $\mathbf{r} = 0$, and in this case the total mass is “conserved”.

3.9 Inertialsysteme. Ein Koordinatensystem heißt Inertialsystem, wenn in dem Impulsgesetz für die gesamte Masse die rechte Seite bei der Abwesenheit von externen Kräften gleich Null ist. Es ist nie klar, ob solche Systeme existieren, deshalb ist Vorsicht geboten. Inertialsysteme, wie definiert, existieren nur als Approximation, der Fehler kann natürlich sehr klein sein. Es ist zum Beispiel immer das Schwerefeld von (unbekannten) Himmelskörpern gegenwärtig.

Es finden sich im weiteren Verlauf im Zusammenhang von mehreren Beobachtern Beispiele zu Inertialsystemen, es sei der Abschnitt IV.1 über Ebbe und Flut sowie in diesem Abschnitt das Beispiel 3.10 genannt. Dieses Beispiel geht auf die Zentrifuge I.3.5 zurück. Dabei haben wir einen Beobachter außerhalb der Zentrifuge sowie einen zweiten Beobachter, der sich auf der Achse befindet und mit der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Flüssigkeit dreht. Schreibt er die Situation in seinen Koordinaten auf, muss er die gleiche Physik beschreiben, d.h. für ihn muss ebenfalls der Druck mit dem Radius ansteigen. Dies obwohl für ihn die (relative) Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich Null ist.

3.10 Beispiel. Bei der Zentrifuge in I.3.5 haben wir stationäre Lösungen des Masse-Impuls Systems

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_x(\varrho v) &= 0, \\ \varrho v \bullet \nabla_x v + \nabla_x p - \operatorname{div}_x S &= \mathbf{f}\end{aligned}\tag{II3.19}$$

Dabei hatten wir den Spannungstensor S wie bei der Navier-Stokes Gleichung (I3.32) genommen.

Beobachter außerhalb Zentrifuge: Der Beobachter, der die Zentrifuge von außen sieht und der in I.3.5 betrachtet wurde, sei hier der *-Beobachter. Für ihn gelten die Gleichungen (II3.19) mit einem '*' versehen. Wir hatten

$$v^* = \omega \begin{bmatrix} -x_2^* \\ x_1^* \\ 0 \end{bmatrix} = -\omega A x^*, \quad \mathbf{f}^* = 0,$$

vorausgesetzt, wobei A wie in I.5.5 definiert sei. Er befindet sich also in einem Inertialsystem und der Druck p^* sowie ϱ^* hängen nur von dem Abstand $r^* := \sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}}$ zur Achse ab, und die Gestalt von v^* impliziert $S^* = 0$.

Die Differentialgleichungen (II3.19), mit \bullet geschrieben, werden damit also (siehe I.3.5)

$$\varrho^* v^* \bullet \nabla_{x^*} v^* + \nabla_{x^*} p^* = 0. \quad (\text{II3.20})$$

Nun ist $v^* \bullet \nabla_{x^*} v^* = -\omega^2(x_1^*, x_2^*, 0) = -\omega^2 I x^*$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Zylinders ist, und I auch aus I.5.5 stammt. Also ist (II3.20) äquivalent zu $\nabla_{x^*} p^* = \varrho^* \omega^2 I x^*$.

Beobachter in der Zentrifuge: Der Beobachter, der sich in der Achse mit der Zentrifuge mitdreht, hat auch das System (II3.19) zu betrachten, und zwar gilt für ihn

$$v = 0, \quad \mathbf{f} \circ Y = \varrho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*)$$

wegen $\mathbf{f}^* = 0$, eine Gleichung die in (II3.18) bei der klassischen Kraft auftrat. Hier ist Y eine klassische Beobachtertransformation mit $t = t^*$ und $x = X(t^*, x^*) = Q(t^*)x^*$. Also ist er kein Inertialsystem. Nun ist für ihn auch $S = 0$ wegen $v = 0$, und die Differentialgleichungen (II3.19) werden zu

$$\nabla_x p = \mathbf{f}. \quad (\text{II3.21})$$

Wegen $\ddot{Q} = -\omega^2 I Q$ und $\dot{Q}A = -\omega I Q$ folgt

$$\mathbf{f} \circ Y = \varrho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) = \varrho^* (\ddot{Q} - 2\omega \dot{Q}A)x^* = \varrho^* \omega^2 I Q x^*,$$

wegen $\varrho^* = \varrho \circ Y$ somit $\mathbf{f} = \varrho \omega^2 I x$. Also ist $\nabla_x p = \varrho \omega^2 I x$.

Vergleich der Beobachter: Die Beobachter haben also das gleiche physikalische Resultat $\nabla_{x^*} p^* = \varrho^* \omega^2 I x^*$ bzw. $\nabla_x p = \varrho \omega^2 I x$. Es sei noch bemerkt, dass der Druck ein objektiver Skalar ist, denn $\Pi \circ Y = Q \Pi^* Q^T$ und $\Pi = p \text{Id}$ sowie $\Pi^* = p^* \text{Id}$ implizieren $p \circ Y = p^*$.

In (II3.16) haben wir den Term $\text{div} \mathbf{J}$ auf die rechte Seite geschrieben, die dann zu $\mathbf{r} - \text{div} \mathbf{J}$ wird. Genauso können wir in der Impulserhaltung $\text{div} \Pi$ auf die rechte Seite bringen, die dann $\tilde{\mathbf{f}} - \text{div} \Pi$ wird, oder wir können das für Teile der Terme tun. Das letztere hatten wir schon in Abschnitt I.3 bei der Behandlung von Massenpunkten kennengelernt, siehe I.3.1 für einen einzelnen Massenpunkt und I.3.4 für eine Kollektion von Massenpunkten. Deshalb machen wir für den Produktionsterm \mathbf{r} und die allgemeine Kraft $\tilde{\mathbf{f}}$ die folgende Bemerkung.

3.11 The term \mathbf{J} . The differential system is (II3.15), which is equivalent to

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \text{div}(\varrho v) &= \bar{\mathbf{r}}, \\ \partial_t(\varrho v) + \text{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \bar{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (\text{II3.22})$$

if $\bar{\mathbf{r}} := \mathbf{r} - \text{div} \mathbf{J}$ and $\bar{\mathbf{f}} := \tilde{\mathbf{f}} - \text{div}(v \mathbf{J}^T)$. Show by a direct calculation, that $\bar{\mathbf{f}}$ fulfils the transformation rule

$$\bar{\mathbf{f}} \circ Y = \varrho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + \bar{\mathbf{r}}^* \dot{X} + Q \bar{\mathbf{f}}^*. \quad (\text{II3.23})$$

Beweis. The last formula given here in (II3.23) is the transformation rule as in definition 3.6, if we consider (II3.22) as mass-momentum system. The purpose is to show this formula independently from the mass-momentum system (II3.14) and from the definitions in the statement. The transformation rules for system (II3.14) include $\mathbf{r} \circ Y = \mathbf{r}^*$ and

$$\tilde{\mathbf{f}} \circ Y = \varrho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + \dot{Q} \mathbf{J}^* + \mathbf{r}^* \dot{X} + Q \tilde{\mathbf{f}}^*$$

Subtracting (II.3.23) gives

$$(\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}) \circ Y = \dot{Q} \mathbf{J}^* + \mathbf{r}^* \dot{X} - \bar{\mathbf{r}}^* \dot{X} + Q(\tilde{\mathbf{f}}^* - \bar{\mathbf{f}}^*).$$

Using the definition $\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}} = \text{div}(v \mathbf{J}^T)$ and $\mathbf{r}^* - \bar{\mathbf{r}}^* = \text{div} \mathbf{J}^*$ in the statement, this equation reads

$$(\text{div}(v \mathbf{J}^T)) \circ Y = \dot{Q} \mathbf{J}^* + (\text{div} \mathbf{J}^*) \dot{X} + Q \text{div}(v^* \mathbf{J}^{*T}).$$

Since $\text{div}(v \mathbf{J}^T) = (\text{div} \mathbf{J})v + Dv \mathbf{J}$, this is

$$((\text{div} \mathbf{J})v + Dv \mathbf{J}) \circ Y = \dot{Q} \mathbf{J}^* + (\text{div} \mathbf{J}^*) \dot{X} + Q((\text{div} \mathbf{J}^*)v^* + Dv^* \mathbf{J}^*).$$

Now, $\text{div} \mathbf{J}$ is an objective scalar, i.e. $(\text{div} \mathbf{J}) \circ Y = \text{div} \mathbf{J}^*$, and $v \circ Y = \dot{X} + Qv^*$. Therefore the equation reduces to

$$(Dv \mathbf{J}) \circ Y = \dot{Q} \mathbf{J}^* + Q Dv^* \mathbf{J}^*.$$

Since \mathbf{J} is an objective vector, i.e. $\mathbf{J} \circ Y = Q \mathbf{J}^*$, the equation becomes

$$((Dv) \circ Y) Q \mathbf{J}^* = \dot{Q} \mathbf{J}^* + Q Dv^* \mathbf{J}^*$$

or

$$((Dv) \circ Y) Q = \dot{Q} + Q Dv^*.$$

This is the transformation rule for the derivative of v . □

Masse-Impuls-Energie Gleichungen

Als weiteres Beispiel betrachten wir Masse, Impuls und Energie (die Energie wird genauer in Abschnitt III.2 eingeführt). Zur Motivation berechnen wir das Transformationsverhalten von $\varrho v v^T$, was sich aus dem Transformationsverhalten von ϱ und v ergibt. Es ist

$$\begin{aligned} (\varrho v v^T) \circ Y &= (\varrho \circ Y)(v \circ Y)(v \circ Y)^T = \varrho^*(\dot{X} + Qv^*)(\dot{X} + Qv^*)^T \\ &= \varrho^* \dot{X} \dot{X}^T + \varrho^* \left(\dot{X} (Qv^*)^T + (Qv^*) \dot{X}^T + \underbrace{(Qv^*)(Qv^*)^T}_{= Q(v^* v^{*T})} Q^T \right) \\ &= \varrho^* \dot{X} \dot{X}^T + \left(\dot{X} (Q(\varrho^* v^*))^T + Q(\varrho^* v^*) \dot{X}^T \right) + Q(\varrho^* v^* v^{*T}) Q^T \end{aligned}$$

und daraus folgt für die **kinetische Energie**

$$\frac{\varrho}{2} |v|^2 = \frac{1}{2} \text{trace} (\varrho v v^T),$$

dass

$$\left(\frac{\varrho}{2} |v|^2\right) \circ Y = \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \varrho^* + (Q^T \dot{X}) \bullet (\varrho^* v^*) + \frac{\varrho^*}{2} |v^*|^2. \tag{II3.24}$$

Dies ergibt die zusätzliche Zeile

$$\left[\frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \quad \dot{X}^T Q \quad 1 \right]$$

in der Matrix Z für die Energie. Dies wird in der folgenden Aussage benutzt.

3.12 Masse-Impuls-Energie-Gleichung (Definition). Wir betrachten ein Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \text{div} \tilde{J} &= \mathbf{r}, \\ \partial_t (\varrho v) + \text{div} \tilde{\Pi} &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t e + \text{div} \tilde{q} &= \tilde{g}. \end{aligned}$$

Dieses System heißt objektiv, falls es sich zwischen zwei Beobachtern, zwischen denen eine Koordinatentransformation $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ besteht, nach dem allgemeinen Gesetz

$$\zeta^* = Z^T \zeta \circ Y$$

für Testfunktionen $\zeta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2+n}$ transformiert, wobei die quadratische $(1 + n + 1)$ -Matrix Z durch

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dot{X} & Q & 0 \\ \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 & \dot{X}^T Q & 1 \end{bmatrix} \tag{II3.25}$$

gegeben ist. Hier ist neben den Größen der allgemeinen Massen- und Impulsgleichung die Größe e die **gesamte Energie (totale Energie)**, die Größe \tilde{q} den gesamten **Energiefluss** und \tilde{g} die gesamte **Energieproduktion** bezeichnet.

Hinweis: Hierbei handelt es sich wieder um ein beliebiges System von jetzt $1+n+1$ Gleichungen (5 Gleichungen für $n = 3$), was nur durch das Gesetz für Testfunktionen eingeschränkt ist. Die Matrix Z in (II3.25) definiert dieses System als Masse-Impulse-Energie-System. Alles andere ist eine Folgerung aus dieser Definition.

Das System kann auch geschrieben werden als $n + 2$ einzelne skalare Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \tilde{J}_i &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v_k) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \tilde{\Pi}_{ki} &= \tilde{\mathbf{f}}_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n, \\ \partial_t e + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \tilde{q}_i &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

oder mit $\tilde{\Pi}_i := (\tilde{\Pi}_{ki})_{k=1, \dots, n}$ als Gleichung für Vektoren

$$\underbrace{\partial_t \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \\ e \end{bmatrix}}_{=: u} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{J}_i \\ \tilde{\Pi}_i \\ \tilde{q}_i \end{bmatrix}}_{=: q_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{g} \end{bmatrix}.$$

Dies ist von der Gestalt in (II3.2) und das System ist objektiv, falls die Transformationsformeln (II3.5) (äquivalent zu (I5.11)) gelten. Hierbei dient als $(1 + n + 1)$ -Matrix Z mit ihren Ableitungen

$$\begin{aligned} Z &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dot{X} & Q & 0 \\ \frac{1}{2}|\dot{X}|^2 & \dot{X}^T Q & 1 \end{bmatrix}, \\ Z'_{j0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \ddot{X} & \dot{Q} & 0 \\ \ddot{X} \bullet \dot{X} & \ddot{X}^T Q + \dot{X}^T \dot{Q} & 0 \end{bmatrix}, \quad Z'_{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{X}'_j & 0 & 0 \\ \dot{X} \bullet \dot{X}'_j & \dot{X}'_j{}^T Q & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, n$, wobei $\dot{X}'_{k'j} = \dot{Q}_{kj}$. Die Gleichungen (II3.5) lauten

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \\ e \end{bmatrix} \circ Y &= Z \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \\ e^* \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{J}_i \\ \tilde{\Pi}_i \\ \tilde{q}_i \end{bmatrix} \circ Y &= \dot{X}_i Z \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \\ e^* \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n Q_{ij} Z \begin{bmatrix} \tilde{J}_j^* \\ \tilde{\Pi}_j^* \\ \tilde{q}_j^* \end{bmatrix} \quad \text{for } i = 1, \dots, n, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{f} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \circ Y &= Z_{\prime 0} \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \varrho^* v^* \\ e^* \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n Z_{\prime j} \begin{bmatrix} \tilde{J}_j^* \\ \tilde{\Pi}_j^* \\ \tilde{q}_j^* \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} \mathbf{r}^* \\ \mathbf{f}^* \\ \tilde{g}^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Struktur der Matrix Z (die letzte Spalte der ersten beiden Zeilen ist Null) folgen die Eigenschaften der Größen von Masse und Impuls wie in 3.7. Deshalb haben wir nur den Energieteil auszuwerten. Die erste Identität ergibt

$$e \circ Y = \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \varrho^* + \varrho^* \dot{X} \bullet (Qv^*) + e^*. \quad (\text{II3.26})$$

Vergleichen wir dies mit der Regel für die kinetisch Energie $\frac{\varrho}{2}|v|^2$ in (II3.24) und definieren wir die *interne Energie* ε durch

$$e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2,$$

erhalten wir

$$\varepsilon \circ Y = e \circ Y - \left(\frac{\varrho}{2}|v|^2\right) \circ Y = e^* - \frac{\varrho^*}{2}|v^*|^2 = \varepsilon^*,$$

das heißt, ε ist ein objektiver Skalar. The energy part of the second identity is

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i \circ Y &= \dot{X}_i \left(\frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \varrho^* + \varrho^* \dot{X}^T Qv^* + e^* \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n Q_{ij} \left(\frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \tilde{J}_j^* + \dot{X}^T Q \tilde{\Pi}_j^* + \tilde{q}_j^* \right), \end{aligned}$$

which in vector notation reads

$$\begin{aligned} \tilde{q} \circ Y &= \left(\frac{\varrho^*}{2} |\dot{X}|^2 + \varrho^* \dot{X}^T Qv^* + e^* \right) \dot{X} \\ &+ \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 Q \tilde{J}^* + (Q \tilde{\Pi}^* Q^T)^T \dot{X} + Q \tilde{q}^*. \end{aligned} \quad (\text{II3.27})$$

The energy part of the third identity is

$$\begin{aligned} \tilde{g} \circ Y &= \varrho^* \ddot{X} \bullet \dot{X} + \varrho^* (\dot{X}^T Q + \dot{X}^T \dot{Q})v^* \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\dot{X} \bullet \dot{X}_{\prime j} \tilde{J}_j^* + \dot{X}_{\prime j}^T Q \tilde{\Pi}_j^* \right) \\ &+ \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \mathbf{r}^* + \dot{X}^T Q \tilde{\mathbf{f}}^* + \tilde{g}^*, \end{aligned}$$

that is

$$\begin{aligned}\tilde{g} \circ Y &= \varrho^* \ddot{X} \bullet (\dot{X} + Qv^*) + (\dot{Q}^T \dot{X}) \bullet (\varrho^* v^* + \tilde{J}^*) \\ &+ (Q^T \dot{Q}) \bullet \tilde{\Pi}^* + \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \mathbf{r}^* + \dot{X} \bullet Q \tilde{\mathbf{f}}^* + \tilde{g}^*.\end{aligned}\quad (\text{II3.28})$$

Defining \mathbf{J} , Π , and q by

$$\begin{aligned}\tilde{J} &= \varrho v + \mathbf{J}, \\ \tilde{\Pi} &= \varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi, \\ \tilde{q} &= e v + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v + q,\end{aligned}\quad (\text{II3.29})$$

we derive, see the following proof, from (II3.26), (II3.27), and (II3.28), the following theorem.

3.13 Theorem. It follows that the mass-momentum-energy system 3.12, written with arbitrary terms \mathbf{J} , Π , and q as in (II3.29),

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(v(\varrho v + \mathbf{J})^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v + q) &= \tilde{g},\end{aligned}\quad (\text{II3.30})$$

is objective (siehe Definition 3.12), if

$$\begin{aligned}e &= \varepsilon + \frac{\varrho}{2} |v|^2, \quad \varepsilon \text{ is the } \mathbf{internal\ energy}, \\ \varrho, \varepsilon, \mathbf{r} &\text{ are objective scalars, } v \text{ is a velocity,} \\ \mathbf{J}, q &\text{ are objective vectors, } \Pi \text{ is an objective tensor,}\end{aligned}\quad (\text{II3.31})$$

and with $\Pi = \Pi^{sym} + \Pi^{rest}$, where Π^{sym} must be symmetric,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}} &= (\mathbf{r} + \mathbf{J} \bullet \nabla) v + \mathbf{f}, \\ \mathbf{f} &\text{ is a } \mathbf{(classical) force} \text{ (see 3.8),} \\ \tilde{g} &= \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + v \bullet Dv \mathbf{J} + Dv \bullet \Pi^{rest} + g, \\ g &\text{ is an objective scalar.}\end{aligned}\quad (\text{II3.32})$$

Here both, Π^{sym} and Π^{rest} , must be are objective tensors.

Symmetric case: If Π is symmetric, choose $\Pi^{sym} := \Pi$ and $\Pi^{rest} := 0$.

Standard case: It is $\Pi = \Pi^S + \Pi^A$, hence $\Pi^{sym} := \Pi^S$ and $\Pi^{rest} := \Pi^A$ can be set.

One can also write

$$\tilde{g} = v \bullet \left(\frac{\mathbf{r}}{2} v + \mathbf{f} \right) + Dv \bullet (v \mathbf{J}^T + \Pi^{rest}) + g. \quad (\text{II3.33})$$

(The equations (II3.32) do not mean that \mathbf{f} is independent of \mathbf{r} and \mathbf{J} or that g is independent of \mathbf{r} , \mathbf{J} , and \mathbf{f} , although this is true in many examples.)

Energieerhaltung: Es ist g wie in (II3.32) (siehe (II3.40) im Beweis unten) ein objektiven Skalar, somit können wir im Einvernehmen mit dem Entropieprinzip (siehe z.B. III.1.3) sagen, dass die Wahl $g = 0$ im Entropieprinzip der *Energieerhaltung* entspricht.

Beweis. For the properties of ϱ , v , \mathbf{J} , \mathbf{r} , Π , and \mathbf{f} see 3.7 and 3.8. That ε is an objective scalar, has already been shown.

Next, insert $\tilde{\mathcal{J}}^*$ and $\tilde{\Pi}^*$, as defined in (II3.29), in rule (II3.27). Since

$$\frac{1}{2}|\dot{X}|^2 Q \tilde{\mathcal{J}}^* = \frac{\varrho^*}{2}|\dot{X}|^2 Q v^* + \frac{1}{2}|\dot{X}|^2 Q \mathbf{J}^*$$

and

$$\begin{aligned} (Q \tilde{\Pi}^* Q^T)^T \dot{X} &= Q(\varrho^* v^* + \mathbf{J}^*) v^{*\text{T}} Q^T \dot{X} + (Q \Pi^* Q^T)^T \dot{X} \\ &= \dot{X} \bullet Q v^* (\varrho^* Q v^* + Q \mathbf{J}^*) + (Q \Pi^* Q^T)^T \dot{X}, \end{aligned}$$

this gives

$$\begin{aligned} \tilde{q} \circ Y &= \left(\frac{\varrho^*}{2} |\dot{X}|^2 + \varrho^* \dot{X} \bullet Q v^* + e^* \right) \dot{X} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} |\dot{X}|^2 + \dot{X} \bullet Q v^* \right) (\varrho^* Q v^* + Q \mathbf{J}^*) \\ &\quad + (Q \Pi^* Q^T)^T \dot{X} + Q \tilde{q}^*. \tag{II3.34} \\ &= \left(\frac{\varrho^*}{2} |\dot{X}|^2 + \varrho^* \dot{X} \bullet Q v^* \right) (\dot{X} + Q v^*) + e^* \dot{X} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} |\dot{X}|^2 + \dot{X} \bullet Q v^* \right) Q \mathbf{J}^* + (Q \Pi^* Q^T)^T \dot{X} + Q \tilde{q}^*. \end{aligned}$$

From known rules one computes

$$\begin{aligned} (\Pi^T v) \circ Y &= (Q \Pi^* Q^T)^T (\dot{X} + Q v^*) \\ &= (Q \Pi^* Q^T)^T \dot{X} + Q(\Pi^{*\text{T}} v^*), \end{aligned} \tag{II3.35}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J} \right) \circ Y &= \left(\frac{1}{2} |\dot{X}|^2 + \dot{X} \bullet Q v^* + \frac{1}{2} |v^*|^2 \right) Q \mathbf{J}^* \\ &= \left(\frac{1}{2} |\dot{X}|^2 + \dot{X} \bullet Q v^* \right) Q \mathbf{J}^* + Q \left(\frac{1}{2} |v^*|^2 \mathbf{J}^* \right), \end{aligned} \tag{II3.36}$$

$$\begin{aligned} (e v) \circ Y &= \left(\frac{\varrho^*}{2} |\dot{X}|^2 + \varrho^* \dot{X} \bullet (Q v^*) + e^* \right) (\dot{X} + Q v^*) \\ &= \left(\frac{\varrho^*}{2} |\dot{X}|^2 + \varrho^* \dot{X} \bullet (Q v^*) \right) (\dot{X} + Q v^*) + e^* \dot{X} + Q(e^* v^*). \end{aligned} \tag{II3.37}$$

Subtraction of (II3.35), (II3.36), (II3.37) from (II3.34) gives $q \circ Y = Q q^*$.

Finally the rule (II3.28) becomes, by again inserting $\tilde{\mathcal{J}}^*$ and $\tilde{\Pi}^*$ and using the formula (II3.17), that is $\tilde{\mathbf{f}}^* = \mathbf{f}^* + \mathbf{r}^*v^* + Dv^*\mathbf{J}^*$,

$$\begin{aligned}\tilde{g} \circ Y &= \varrho^* \ddot{X} \bullet (\dot{X} + Qv^*) + (\dot{Q}^T \dot{X}) \bullet (\varrho^* v^* + \tilde{\mathcal{J}}^*) + (Q^T \dot{Q}) \bullet \tilde{\Pi}^* \\ &\quad + \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 \mathbf{r}^* + \dot{X} \bullet Q \tilde{\mathbf{f}}^* + \tilde{g}^* \\ &= \varrho^* \ddot{X} \bullet (\dot{X} + Qv^*) + (\dot{Q}^T \dot{X}) \bullet (2\varrho^* v^* + \mathbf{J}^*) + (Q^T \dot{Q}) \bullet (v^* (\varrho^* v^* + \mathbf{J}^*)^T) \\ &\quad + \frac{\mathbf{r}^*}{2} |\dot{X}|^2 + \dot{X} \bullet Q (\mathbf{f}^* + \mathbf{r}^* v^* + Dv^* \mathbf{J}^*) + (Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* + \tilde{g}^*.\end{aligned}$$

Subtracting

$$\begin{aligned}(v \bullet Dv \mathbf{J}) \circ Y &= (\dot{X} + Qv^*) \bullet (Dv \circ Y) Q \mathbf{J}^* \\ &= (\dot{X} + Qv^*) \bullet (\dot{Q} + Q Dv^*) \mathbf{J}^* \\ &= (\dot{X} + Qv^*) \bullet \dot{Q} \mathbf{J}^* + \dot{X} \bullet Q Dv^* \mathbf{J}^* + v^* \bullet Dv^* \mathbf{J}^*\end{aligned}$$

one gets using

$$(Qv^*) \bullet (\dot{Q}v^*) = v^* \bullet (Q^T \dot{Q}v^*) = (Q^T \dot{Q}) \bullet (v^* v^{*\text{T}}) = 0 \quad (\text{II3.38})$$

since $Q^T \dot{Q}$ is antisymmetric, the equation

$$\begin{aligned}(\tilde{g} - v \bullet Dv \mathbf{J}) \circ Y &= \varrho^* \ddot{X} \bullet (\dot{X} + Qv^*) + (\dot{Q}^T \dot{X}) \bullet (2\varrho^* v^*) \\ &\quad + \frac{\mathbf{r}^*}{2} |\dot{X}|^2 + \dot{X} \bullet Q (\mathbf{f}^* + \mathbf{r}^* v^*) + (Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* + (\tilde{g}^* - v^* \bullet Dv^* \mathbf{J}^*).\end{aligned}$$

Then subtracting

$$\begin{aligned}(v \bullet \mathbf{f}) \circ Y &= (\dot{X} + Qv^*) \bullet (\varrho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^*) \\ &= \varrho^* (\dot{X} + Qv^*) \bullet (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + \dot{X} \bullet Q\mathbf{f}^* + v^* \bullet \mathbf{f}^* \\ &= \varrho^* \ddot{X} \bullet (\dot{X} + Qv^*) + 2\varrho^* \dot{X} \bullet \dot{Q}v^* + \dot{X} \bullet Q\mathbf{f}^* + v^* \bullet \mathbf{f}^*,\end{aligned}$$

where one used again (II3.38), one is lead to

$$\begin{aligned}(\tilde{g} - v \bullet \mathbf{f} - v \bullet Dv \mathbf{J}) \circ Y &= \frac{\mathbf{r}^*}{2} |\dot{X}|^2 + \mathbf{r}^* \dot{X} \bullet Qv^* + (Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* \\ &\quad + (\tilde{g}^* - v^* \bullet \mathbf{f}^* - v^* \bullet Dv^* \mathbf{J}^*),\end{aligned}$$

and therefore using $\mathbf{r} \circ Y = \mathbf{r}^*$ and (II3.24)

$$\begin{aligned}(\tilde{g} - \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 - v \bullet \mathbf{f} - v \bullet Dv \mathbf{J}) \circ Y &= (Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* + (\tilde{g}^* - \frac{\mathbf{r}^*}{2} |v^*|^2 - v^* \bullet \mathbf{f}^* - v^* \bullet Dv^* \mathbf{J}^*).\end{aligned}$$

Hence if we define

$$\bar{g} := \tilde{g} - \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 - v \bullet \mathbf{f} - v \bullet Dv \mathbf{J}$$

we have shown

$$\bar{g} \circ Y = (Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* + \bar{g}^*. \quad (\text{II3.39})$$

Hinweis: Falls Π symmetrisch ist, also auch Π^* , so ist $(Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* = 0$ und deshalb \bar{g} ein objektiver Skalar.

Es folgt im allgemeinen Fall, wenn wir den Tensor Dv nehmen, wegen (II4.13) die Formel

$$(Dv \bullet \Pi) \circ Y = (\dot{Q} Q^T + Q Dv^* Q^T) \bullet (Q \Pi^* Q^T) = (Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* + Dv^* \bullet \Pi^*,$$

das heißt die gleiche Transformationsformel wie in (II3.39). Um der Aussage in dem Hinweis nahezukommen, zerlegen wir Π in zwei objektive Tensoren

$$\Pi = \Pi^{sym} + \Pi^{rest} \quad \text{wobei } \Pi^{sym} \text{ symmetrisch}$$

ist. Da Π^{sym*} symmetrisch ist, ist $(Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^{sym*} = 0$, und daher auch

$$(Dv \bullet \Pi^{rest}) \circ Y = (\dot{Q} Q^T + Q Dv^* Q^T) \bullet (Q \Pi^{rest*} Q^T) = (Q^T \dot{Q}) \bullet \Pi^* + Dv^* \bullet \Pi^{rest*}.$$

Indem wir Differenz zu (II3.39) bilden, folgt dass

$$g := \bar{g} - Dv \bullet \Pi^{rest} \quad (\text{II3.40})$$

ein objektiver Skalar ist, d.h. $g \circ Y = g^*$. (Die Aufteilung Π^{rest} gleich Π und Π^{sym} gleich 0 ist zwar mathematisch möglich, aber nicht physikalisch, wenn wir darauf bestehen $g = 0$ setzen zu können.) \square

We finish this section by the following remark, see section 6.

3.14 Remark. If the pressure tensor Π is symmetric, then the conservation of angular momentum is satisfied.

Beweis. See the statement 6.6. \square

4 Konstitutive Beziehungen

Eine “konstitutive Beziehung” beschreibt die Abhängigkeit einer Größe von anderen Größen. Eine “konstitutive Funktion” ist eine Vorschrift, wie der Wert einer physikalischen Größe aus den Werten anderer, also in der Regel unabhängigen, Größen zu berechnen ist. Die physikalische Größe, die durch eine Funktion beschrieben wird, wird damit zu einer abhängigen Größe. Konstitutive Beziehungen beschreiben verschiedene konkrete Materialien, sie dienen daher der Kommunikation zwischen Beobachtern. So sei z.B. w eine physikalische Größe, die von Größen u_1, \dots, u_N abhängt, und die darstellende Funktion sei \hat{w} , also

$$w = \hat{w}(u_1, \dots, u_N),$$

was bedeutet

$$w(t, x) = \hat{w}(u_1(t, x), \dots, u_N(t, x)).$$

Dann nennen wir \hat{w} eine **konstitutive Funktion**. Bezüglich der Funktion \hat{w} machen wir folgende Aussage.

4.1 Definition. Eine konstitutive Funktion heißt **objektiv**, falls sie die gleiche Funktion für alle Beobachter ist. Das heißt zum Beispiel, wenn zwei Beobachter sich mit $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ transformieren, und w, u_1, \dots, u_N Größen des einen Beobachters sind, die w^*, u_1^*, \dots, u_N^* für den anderen Beobachter heißen, dass die Gleichung

$$w(t, x) = \hat{w}(u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$$

für den einen Beobachter gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$w^*(t^*, x^*) = \hat{w}(u_1^*(t^*, x^*), \dots, u_N^*(t^*, x^*))$$

für den anderen Beobachter. **Wichtig:** Die Funktion \hat{w} ist dieselbe für beide Beobachter.

Diese Definition ist für die physikalische Behandlung von Problemen ganz wesentlich. Die physikalischen Größen haben unterschiedliche Werte für unterschiedliche Beobachter, aber Beziehungen zwischen diesen sind dieselbe, d.h. konstitutive Funktionen, die diese Beziehungen ausdrücken, sind objektiv. d.h. sie müssen unabhängig vom Beobachter sein.

Referenzen: Für Aussagen zur Beobachterunabhängigkeit von konstitutiven Funktionen siehe Eck & Garcke & Knabner [4, 5.8 Beobachterunabhängigkeit], Greve [5, 1.4 Transformationseigenschaften], REF-??-.

Wir geben nun einige Beispiele konstitutiver Funktionen.

Objektive Skalare

Als einfachstes Beispiel nehmen wir objektive Skalare, hierunter fällt zum Beispiel die Produktion einer skalaren Gleichung.

4.2 Beispiel. Ist p ein objektiver Skalar und ebenso u_1, \dots, u_N , dann ist jede konstitutive Relation zwischen p und (u_1, \dots, u_N) objektiv. Also, eine konstitutive Funktion \hat{p} , gegeben durch

$$p = \hat{p}(u_1, u_2, \dots, u_N) \quad (\text{II4.1})$$

ist die Gleiche für alle Beobachter.

Beweis. Sind p^*, u_1^*, \dots, u_N^* die Größen bezüglich eines Beobachters, dessen Koordinaten mit $(t, x) = Y(t^*, y^*)$ transformiert werden, so gilt

$$p \circ Y = p^*, \quad u_j \circ Y = u_j^*. \quad (\text{II4.2})$$

Aus der konstitutiven Beziehung (II4.1), die besagt

$$p(t, x) = \hat{p}(u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_N(t, x)),$$

folgt also (setze $(t, x) = Y(t^*, x^*)$)

$$p \circ Y(t^*, x^*) = \hat{p}(u_1 \circ Y(t^*, x^*), u_2 \circ Y(t^*, x^*), \dots, u_N \circ Y(t^*, x^*)),$$

und damit unter Ausnutzung von (II4.2)

$$p^*(t^*, x^*) = \hat{p}(u_1^*(t^*, x^*), u_2^*(t^*, x^*), \dots, u_N^*(t^*, x^*)),$$

d.h. \hat{p} ist dieselbe Funktion geblieben. \square

4.3 Beispiel. Seien p und u_1, \dots, u_N objektive Skalare und es für \hat{p} gelte

$$p(t, x) = \hat{p}(t, x, u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_N(t, x)). \quad (\text{II4.3})$$

Dann ist \hat{p} eine objektive Funktion genau dann, wenn sie von t und x unabhängig ist.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt für $(t, x) = Y(t^*, x^*)$

$$\begin{aligned} \hat{p}((t^*, x^*), u^*(t^*, x^*)) &= p^* = p \circ Y \\ &= \hat{p}(Y(t^*, x^*), u(Y(t^*, x^*))) = \hat{p}(Y(t^*, x^*), u^*(t^*, x^*)), \end{aligned}$$

wobei $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$. Wegen $Y(t^*, x^*) = (t^* + a, Q(t^*)x^* + b(t^*))$ folgt also

$$\hat{p}(t^*, x^*, u^*(t^*, x^*)) = \hat{p}(t^* + a, Q(t^*)x^* + b(t^*), u^*(t^*, x^*)).$$

Indem wir nun bei gegebenem (t^*, x^*) den Wert a beliebig wählen, folgt dass \hat{p} unabhängig von t^* ist. Wenn wir dann $Q(t^*) = \text{Id}$ und $b(t^*)$ beliebig wählen, folgt die Unabhängigkeit von \hat{p} von x^* . \square

Auch Ungleichungen fallen unter das Prinzip der Objektivität.

4.4 Ungleichung. Ist u ein objektiver Skalar, so ist

$$u > 0$$

eine objektive Ungleichung. Die Ungleichung $u > 0$ heißt eigentlich

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : u(t, x) > 0.$$

Bemerkung: Transformiert sich u (affin) linear $u \circ Y = Au^* + B$, so ist die Ungleichung objektiv nur falls $B = 0$ und $A > 0$.

Beweis. Ist Y eine Beobachtertransformation, so ist $u^* = u \circ Y > 0$, also ist die Ungleichung objektiv. \square

Objektive Vektoren

Jetzt ein Beispiel für einen objektiven Vektor, wobei als Beispiel der objektive Flussterm \mathbf{J} in der Massenerhaltung gemeint ist.

4.5 Lemma. Es sei

$$J = \hat{J}(\nabla \varrho),$$

wobei ϱ ein objektiver Skalar und J ein objektiver Vektor sei. Dann ist \hat{J} objektiv, d.h. dieselbe Funktion für alle Beobachter, falls

$$\hat{J}(Qq) = Q\hat{J}(q) \tag{II4.4}$$

für alle $q \in \mathbb{R}^n$ und alle orthogonalen Transformationen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Determinante $\det Q = 1$. *Zusatz:* Unter diesen Voraussetzungen ist also die konstitutive Funktion

$$\hat{J}(q) := -a(|q|)q \text{ für alle } q \in \mathbb{R}^n$$

objektiv, wenn a eine gegebene reelle Funktion ist.

Beweis Zusatz. Für alle orthonormalen Q erfüllt $|q|$ die Identität $|Qq| = |q|$. Also ist

$$\hat{J}(Qq) = -a(|Qq|)Qq = Q(-a(|Qq|)q) = Q(-a(|q|)q) = Q\hat{J}(q).$$

Also ist (II4.4) gezeigt. \square

Beweis. Ist Y die Beobachtertransformation, so gilt

$$\varrho \circ Y = \varrho^*, \quad J \circ Y = QJ^*.$$

Wir berechnen den Gradienten (da die Zeitkomponente von Y nicht von x^* abhängt) als

$$\partial_{x_j^*} \varrho^* = \partial_{x_j^*} (\varrho \circ Y) = (\partial_t \varrho) \circ Y \underbrace{Y_{0'x_j^*}}_{=0} + \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} \varrho) \circ Y \underbrace{Y_{i'x_j^*}}_{=Q_{ij}}$$

und damit in Vektorschreibweise $\nabla \varrho^* = Q^T (\nabla \varrho \circ Y)$ oder

$$(\nabla \varrho) \circ Y = Q \nabla \varrho^*, \quad (\text{II.4.5})$$

also ist $\nabla \varrho$ ein objektiver Vektor. Nun sei (II.4.4) erfüllt. Da J ein objektiver Vektor ist impliziert die Gleichung $J(t, x) = \widehat{J}(\nabla \varrho(t, x))$ somit

$$QJ^* = J \circ Y = \widehat{J}((\nabla \varrho) \circ Y) = \widehat{J}(Q \nabla \varrho^*) = Q \widehat{J}(\nabla \varrho^*),$$

nach der Voraussetzung (II.4.4) an \widehat{J} . Also folgt für den $*$ -Beobachter

$$J^* = \widehat{J}(\nabla \varrho^*), \quad \text{d.h.} \quad J^*(t^*, x^*) = \widehat{J}(\nabla \varrho^*(t^*, x^*))$$

daher ist \widehat{J} auch die konstitutive Funktion für den $*$ -Beobachter, und somit ist \widehat{J} objektiv. *Bemerkung:* Zur Umkehrung des Beweises siehe 7.10. \square

Wir wenden 4.5 jetzt an auf die Massenerhaltung.

4.6 Beispiel einer Diffusion. Sei ϱ ein objektiver Skalar, v eine Geschwindigkeit und a eine skalare Funktion. Zwei Formulierungen:

(1) Dann ist die skalare Differentialgleichung

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v - a(\varrho, |\nabla \varrho|) \nabla \varrho) = 0$$

objektiv, also die gleiche für alle Beobachter.

(2) Man kann auch sagen

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v - a \nabla \varrho) &= 0, \\ a &= \widehat{a}(\varrho, |\nabla \varrho|), \end{aligned}$$

wobei \widehat{a} dieselbe Funktion für alle Beobachter ist (siehe 4.2).

Hinweis: Die Massendiffusion wurde von Adolf Fick im 19. Jahrhundert beschrieben (siehe [Wikipedia: Fick's laws of diffusion]). Für das Vorzeichen von a , das heißt $a \geq 0$, müssen wir auf das Entropieprinzip warten, das in Abschnitt III.1 behandelt wird. Siehe Hutter & Wang [9, 17.4.1 Diffusion].

Beweis. It is $|\nabla \varrho|$ like ϱ an objective scalar and therefore \hat{a} is a function depending on objective scalars, therefore \hat{a} is the same for all observers by 4.2. Therefore in the mass equation $\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) = 0$, see 3.4, the vector $\mathbf{J} = -a \nabla \varrho$ is objective, \square

Wie geben nun ein Beispiel zum Zusammenhang zwischen objektiven Vektoren und objektiven Tensoren an. Wie wir sehen werden, werden um so mehr Größen bei konstitutiven Funktionen benötigt, je detaillierter wir in die Beschreibung von physikalischen Vorgängen einsteigen. (Siehe auch Aufgabe 7.14.)

4.7 Lemma. Es sei $(t, x) \mapsto \{e_1(t, x), \dots, e_n(t, x)\}$ ein Orthonormalsystem des \mathbb{R}^n , also

$$e_i \bullet e_j = \delta_{i,j} \text{ für } i, j = 1, \dots, n \quad (\text{II4.6})$$

und e_i seien objektive Vektoren. Weiter seien λ_{ij} objektive Skalare. Ist dann Π ein objektiver Tensor, so ist

$$\Pi = \sum_{ij} \lambda_{ij} e_i e_j^T$$

eine objektive Darstellung von Π . *Bemerkung:* Dass die e_i objektive Vektoren sind, ist konsistent mit der Aussage (II4.6). *Beispiel:* Die Matrix $\Pi = p \operatorname{Id}$ mit einem objektiven Skalar p hat diese Darstellung.

Es gilt $e_i \bullet (\Pi e_j) = \lambda_{ij}$ für alle i und j , d.h. bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ hat Π die Darstellung

$$(e_i \bullet (\Pi e_j))_{i,j=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

Beweis. Es ist $\Pi \circ Y = Q \Pi^* Q^T$, $e_i \circ Y = Q e_i^*$ und $\lambda \circ Y = \lambda^*$. Wegen

$$e_i^* \bullet e_j^* = (Q^T e_i \circ Y) \bullet (Q^T e_j \circ Y) = e_i \circ Y \bullet e_j \circ Y = \delta_{i,j}$$

ist das System auch für den neuen Beobachter ein Orthonormalsystem. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \lambda_{ij}^* e_i^* e_j^{*\top} &= Q^T \sum_{ij} \lambda_{ij}^* Q e_i^* (Q e_j^*)^T Q \quad (\text{da } Q^T Q = \operatorname{Id}) \\ &= Q^T \left(\sum_{ij} \lambda_{ij} e_i e_j^T \right) \circ Y Q = Q^T \Pi \circ Y Q = Q^T Q \Pi^* Q^T Q = \Pi^*. \end{aligned}$$

Also ist die Darstellung objektiv. \square

4.8 Allgemeiner. In 4.7 kann man natürlich außer Tensoren Π auch andere Größen durch ein objektives Orthonormalsystem darstellen. So ist für einen objektiven Vektor J

$$J = \sum_i \lambda_i e_i$$

eine objektive Darstellung, falls λ_i objektive Skalare sind. *Definition:* Ein objektives Orthonormalsystem ist ein Orthonormalsystem aus objektiven Vektoren.

Mit diesem objektiven Tensor, der durch ein Orthonormalsystem gegeben ist, lassen sich inhomogene Materialien angeben. Take for example an ob-

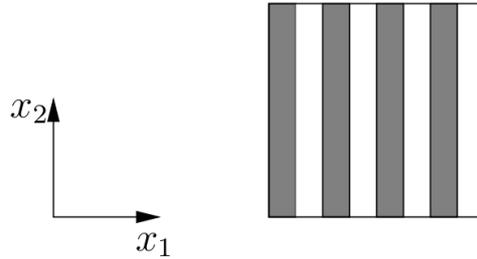


Abb. 4: “Geschichtetes Material” (aus dem Buch [4])

jective vector J of the form

$$J = -D\nabla\varrho \tag{II4.7}$$

with a matrix function D (conditions will be derived) and an objective scalar ϱ . What are the conditions on D so that equation (II4.7) is the same for all observers? For a $*$ -observer we have $J^* = -D^*\nabla\varrho^*$. Since $\nabla\varrho$ is an objective vector, we get

$$J \circ Y = -(D\nabla\varrho) \circ Y = -D \circ Y Q \nabla\varrho^* .$$

On the other hand, since J is an objective vector,

$$J \circ Y = Q J^* = -Q D^* \nabla\varrho^* ,$$

hence we obtain

$$D \circ Y Q \nabla\varrho^* = Q D^* \nabla\varrho^* .$$

This is satisfied, if $D \circ Y Q = Q D^*$ or

$$D \circ Y = Q D^* Q^T , \tag{II4.8}$$

that is, the transformation rule of an objective tensor. (If $D = \text{const}$ and the constant is the same constant for all observers, it follows (if $n \geq 3$) that

$D = a\text{Id}$, a a scalar, see 4.14(4). The same holds if D depends on a finite number of objective scalars, see exercise 7.11.) Now, if $n = 2$, take D as a matrix

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

see Abb. 4. This is for an observer with (x_1, x_2) -coordinates. If we consider another observer with (x_1^*, x_2^*) -coordinates we have to use the matrix D^* with the property in (II4.8), that is, if

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \text{ then } D^* = \begin{bmatrix} a \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta & (a-1) \cos \vartheta \sin \vartheta \\ (a-1) \cos \vartheta \sin \vartheta & a \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta \end{bmatrix}.$$

In particular, if

$$Q = \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ then } D^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

This is because the material stays at the same physical place but the coordinates differ. So we can say

4.9 Lemma. Let ϱ be an objective scalar and J an objective vector. If D satisfies the transformation rule (II4.8) then the equation

$$J = -D\nabla\varrho$$

is objective, that is, is the same for all observers.

Beweis. If $J + D\nabla\varrho = 0$ we compute

$$\begin{aligned} 0 &= (J + D\nabla\varrho) \circ Y = J \circ Y + D \circ Y(\nabla\varrho) \circ Y \\ &= QJ^* + (QD^*Q^T)Q\nabla\varrho^* = Q(J^* + D^*\nabla\varrho^*). \end{aligned}$$

Hence $0 = J^* + D^*\nabla\varrho^*$. □

Therefore, the vector J depends on D and $\nabla\varrho$, where D is an objective tensor and $\nabla\varrho$ is an objective vector. Hence making the matrix D public we get the following lemma.

4.10 Lemma. Let ϱ be an objective scalar, J an objective vector, and D an objective tensor. Assume

$$J = \widehat{J}(D, \nabla\varrho).$$

Then the function $(M, q) \mapsto \widehat{J}(M, q)$ is objective, that is the same function for all observers, if for all orthonormal matrices Q with positive determinant and all M and q

$$\widehat{J}(QM Q^T, Qq) = Q\widehat{J}(M, q). \quad (\text{II4.9})$$

Example: $\widehat{J}(M, q) = -Mq$.

We see that in order to have the same function \widehat{J} for all observers it is necessary to add the matrix D as argument to the function \widehat{J} .

Beweis. We assume that $J = \widehat{J}(D, \nabla\varrho)$, that is, \widehat{J} is the constitutive function for this observer. Now, another observer has the quantities J^* , D^* , ϱ^* . If Y is the corresponding observer transformation, we take Q from this transformation and set $M = D^*$ and $q = \nabla\varrho^*$ in (II4.9). We get

$$\widehat{J}(QD^*Q^T, Q\nabla\varrho^*) = Q\widehat{J}(D^*, \nabla\varrho^*). \quad (\text{II4.10})$$

If we use the known transformation rules for D and $\nabla\varrho$, which are

$$QD^*Q^T = D \circ Y \quad \text{and} \quad Q\nabla\varrho^* = (\nabla\varrho) \circ Y,$$

we obtain

$$\widehat{J}(D, \nabla\varrho) \circ Y = Q\widehat{J}(D^*, \nabla\varrho^*),$$

and the left side is, since J is an objective vector,

$$\widehat{J}(D, \nabla\varrho) \circ Y = J \circ Y = QJ^*$$

and it follows $J^* = \widehat{J}(D^*, \nabla\varrho^*)$.

Remark: For the reverse direction of the assertion, we assume that \widehat{J} is the same function for all observers. Then (II4.10) follows arguing in the reverse direction. Now, if for all processes in consideration D^* can be any matrix and $\nabla\varrho^*$ any vector, the equation (II4.9) follows. \square

A formulation with an orthonormal system is also possible: Let $n = 2$ and realize, that for the observer with (t, x) -coordinates

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = ae_1e_1^T + e_2e_2^T \quad (\text{II4.11})$$

if $\{e_1, e_2\}$ is the standard orthonormal system with respect to the (t, x) -coordinates, this is of the form in 4.7 (for II). If we consider the other observer with (x_1^*, x_2^*) -coordinates we have to use

$$D^* = ae_1^*e_1^{*\text{T}} + e_2^*e_2^{*\text{T}},$$

$$e_1^* = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{bmatrix}, \quad e_2^* = \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}, \quad \text{if} \quad Q = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

So in general one considers (II4.11) with objective vectors e_i , $i = 1, 2$. Also lemma 4.10 can be adopted to orthogonal systems. So, for example, if $\{e_1, e_2\}$ is an orthonormal system of objective vectors, the representation

$$J = -D\nabla\varrho,$$

$$D = ae_1e_1^T + e_2e_2^T, \quad a = \widehat{a}(|\nabla\varrho|),$$

defines an objective vector J . The considerations are relevant, if one has, for example, several bodies in a fluid.

Objektive Tensoren

Die Objektivitätsbetrachtungen übertragen sich auch auf Tensoren. Dies ist insbesondere für die Elastizitätstheorie von Bedeutung, siehe den Abschnitt 5. Hier betrachten wir den Tensor Π aus der Flüssigkeitstheorie, die Objektivitätsbetrachtungen für diesen Tensor sind wesentlich.

4.11 Lemma. Seien ϱ und ε objektive Skalare und v eine Geschwindigkeit. Es sei Π ein objektiver Tensor und es gelte

$$\Pi = \widehat{\Pi}(\varrho, \varepsilon, v, \nabla\varrho, \nabla\varepsilon, Dv)$$

mit einer objektiven Funktion $\widehat{\Pi}$. Dann ist $\widehat{\Pi}$ von v unabhängig und hängt nur vom symmetrischen Anteil von Dv ab. Es kann also $\widehat{\Pi}$ gewählt werden als

$$\Pi = \widehat{\Pi}(\varrho, \varepsilon, \nabla\varrho, \nabla\varepsilon, (Dv)^S).$$

Bemerkung: Es gelten natürlich auch noch mehr Folgerungen.

Beweis. Für die Geschwindigkeit v gilt

$$v_i \circ Y = \dot{X}_i + \sum_j Q_{ij} v_j^*.$$

Berechnen wir Raumableitungen bezüglich x_k^* , so erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass $X_j' x_k^* = Q_{jk}$ und $\dot{X}_i' x_k^* = \dot{Q}_{jk}$ ist,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} v_i) \circ Y Q_{jk} &= \partial_{x_k^*} (v_i \circ Y) \\ &= \dot{X}_i' x_k^* + \sum_j \partial_{x_k^*} (Q_{ij} v_j^*) = \dot{Q}_{ik} + \sum_j Q_{ij} \partial_{x_k^*} v_j^*, \end{aligned}$$

d.h. in Matrixschreibweise

$$(Dv) \circ Y Q = \dot{Q} + Q Dv^*. \quad (\text{II4.12})$$

Wenn wir dies von Rechts mit der Matrix Q^T multiplizieren, erhalten wir

$$(Dv) \circ Y = \dot{Q} Q^T + Q Dv^* Q^T \quad (\text{II4.13})$$

mit einer antisymmetrischen Matrix $\dot{Q} Q^T$.⁴ Setzen wir dies ein in $\Pi \circ Y = Q \Pi^* Q^T$, so ist, unter Ausnutzung, dass $\widehat{\Pi}$ objektiv ist,

$$\begin{aligned} Q \widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, v^*, \nabla\varrho^*, \nabla\varepsilon^*, Dv^*) Q^T &= Q \Pi^* Q^T = \Pi \circ Y \\ &= \widehat{\Pi}(\varrho \circ Y, \varepsilon \circ Y, v \circ Y, (\nabla\varrho) \circ Y, (\nabla\varepsilon) \circ Y, (Dv) \circ Y) \\ &= \widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, \dot{X} + Qv^*, Q\nabla\varrho^*, Q\nabla\varepsilon^*, \dot{Q} Q^T + Q Dv^* Q^T). \end{aligned}$$

⁴ $\dot{Q} Q^T = (Q Q^T) \cdot - Q (Q^T) \cdot = -Q \dot{Q}^T = -(\dot{Q} Q^T)^T$

Wir können nun an einer bestimmten Stelle (t_0^*, x_0^*) die Transformation Y so wählen, dass der Wert von $c = \dot{X}$ in dem Punkt beliebig sein kann und dass die Matrix $A = \dot{Q}Q^T$ eine beliebige antisymmetrische Matrix ist, bei gleichzeitiger Wahl von $Q = \text{Id}$ in diesem Punkt. (Wähle zunächst $Q(t_0^*) = \text{Id}$ und dann Q für $t^* \neq t_0^*$ so, dass $\dot{Q}(t_0^*) = A$. Nun ist $\dot{X}(t^*, x^*) = \dot{Q}(t^*)x^* + \dot{b}(t^*)$ für alle (t^*, x^*) . Dann wähle b so, dass $\dot{X}(t_0^*, x_0^*) = c$.) Wir erhalten dann im Punkte (t_0^*, x_0^*) (mit der Abkürzung $\varepsilon^* = \varepsilon^*(t_0^*, x_0^*)$, $\nabla\varepsilon^* = \nabla\varepsilon^*(t_0^*, x_0^*)$ etc.)

$$\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, v^*, \nabla\varrho^*, \nabla\varepsilon^*, Dv^*) = \widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, c + v^*, \nabla\varrho^*, \nabla\varepsilon^*, A + Dv^*)$$

für alle c im \mathbb{R}^n und alle antisymmetrischen Matrizen A . Wir konzentrieren uns jetzt auf diese Gleichung. Wählen wir speziell $c = -v^*$ und $A = -(Dv^*)^A$ so erhalten wir wegen $Dv^* = (Dv^*)^S + (Dv^*)^A$, dass

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, v^*, \nabla\varrho^*, \nabla\varepsilon^*, Dv^*) &= \widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, \nabla\varrho^*, \nabla\varepsilon^*, (Dv^*)^S) \\ &=: \widetilde{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, \nabla\varrho^*, \nabla\varepsilon^*, (Dv^*)^S) \end{aligned}$$

mit einer neuen konstitutiven Funktion $\widetilde{\Pi}$. Es folgt die Behauptung. □

4.12 Konstitutive Funktion für Flüssigkeiten. Für den Drucktensor ist folgende Darstellung objektiv:

$$\begin{aligned} \Pi &= p\text{Id} - S, \\ S &= a(Dv + (Dv)^T) + b \text{div}(v)\text{Id} \\ &= 2a (Dv)^S + b \text{div}(v)\text{Id} \\ &= 2\eta \underbrace{\left((Dv)^S - \frac{1}{n} \text{div}(v)\text{Id} \right)}_{\text{spurfrei}} + \zeta \text{div}(v)\text{Id}, \\ a &:= \eta, \quad b := \zeta - \frac{2}{n}\eta \quad \left(= \zeta - \frac{2}{3}\eta \text{ for } n = 3 \right), \end{aligned}$$

wobei p , η und ζ von $(\varrho, \varepsilon, |(Dv)^S|)$ abhängen können. Hierbei sind

p der Druck der Flüssigkeit (ein objektiver Skalar),
 η , ζ die Zähigkeitskoeffizienten.⁵

Beweis. Nach (II.4.13) ist

$$Dv \circ Y = \underbrace{\dot{Q}Q^T}_{\text{schiefsymmetrisch}} + QDv^*Q^T$$

⁵Die Bezeichnungen η und ζ finden sich in Landau & Lifschitz [10, (15,3)-(15,4)]

und damit gilt für den symmetrischen Anteil $(Dv)^S$ von Dv

$$(Dv)^S \circ Y = Q (Dv^*)^S Q^T, \quad (\text{II4.14})$$

d.h. $(Dv)^S$ ist ein objektiver Tensor.

Nun gilt für die euklidische Norm von Matrizen $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, welche einen objektiven Tensor darstellen, also $M \circ Y = Q M^* Q^T$ und $N \circ Y = Q N^* Q^T$,⁶

$$\begin{aligned} (M \bullet N) \circ Y &= (Q M^* Q^T) \bullet (Q N^* Q^T) = \sum_{ij} (Q M^* Q^T)_{ij} (Q N^* Q^T)_{ij} \\ &= \sum_{ijklpq} Q_{ik} M_{kl}^* Q_{jl} Q_{ip} N_{pq}^* Q_{jq} = \sum_{klpq} \delta_{kp} M_{kl}^* N_{pq}^* \delta_{lq} = \sum_{kl} M_{kl}^* N_{kl}^* = M^* \bullet N^* \end{aligned}$$

und damit auch

$$|M| \circ Y = \sqrt{M \bullet M} = \sqrt{M^* \bullet M^*} = |M^*|.$$

Daher ist die euklidische Norm von $|(Dv)^S|$ ein objektiver Skalar,

$$|(Dv)^S| \circ Y = |(Dv^*)^S|,$$

genauso wie ϱ und ε . Daher fallen die konstitutiven Funktionen von a und b , bzw. von η und ζ , und die von p unter das Beispiel 4.2. Also können wir im Folgenden so tun, als seien diese Funktionen konstant.

Nun ist $(Dv)^S$ nach (II4.14) ein objektiver Tensor, und damit für jedes Orthonormalsystem $\{e_1(t, x), \dots, e_n(t, x)\}$

$$\operatorname{div} v = \sum_i e_i \bullet (Dv)^S e_i,$$

und damit

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} v) \circ Y &= \sum_i (e_i \circ Y) \bullet ((Dv)^S \circ Y) (e_i \circ Y) \\ &= \sum_i (e_i \circ Y) \bullet (Q (Dv^*)^S Q^T) (e_i \circ Y) \\ &= \sum_i (Q^T e_i \circ Y) \bullet (Dv^*)^S (Q^T e_i \circ Y) = \operatorname{div} v^*, \end{aligned}$$

denn $\{Q(t^*)^T e_1(t, x), \dots, Q(t^*)^T e_n(t, x)\}$ ist ebenfalls ein Orthonormalsystem. Also ist $\operatorname{div} v$ ein objektiver Skalar.

Insgesamt ist also S ein objektiver Tensor (Id ist trivialerweise ein objektiver Tensor), und damit auch Π . \square

⁶Definition: Für Matrizen M, N ist $M \bullet N := \sum_{i,j} M_{ij} N_{ij}$, also $|M|^2 := \sum_{i,j} |M_{ij}|^2$. Dieses Skalarprodukt wird in der Regel mit ' \bullet ' bezeichnet, also $M \bullet N := M \bullet N$.

Ersetzt man eine konstitutive Funktion für eine physikalische Größe durch eine, die von mehr Parametern abhängt, so ändert sich die Situation, und zwar in der Regel grundlegend. Man hat also darauf zu achten, wie konstitutive Funktionen aussehen. Wir zeigen nun, dass unter Linearitätsvoraussetzungen an Π eine Darstellung wie in 4.12 auch notwendig ist (siehe auch III.2.5).

4.13 Theorem. Sei $\Pi = \widehat{\Pi}(\varrho, \varepsilon, v, Dv)$ mit einer objektiven Funktion $\widehat{\Pi}$, die symmetrisch ist, d.h. $\widehat{\Pi}_{ji} = \widehat{\Pi}_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, n$. Ist dann $\widehat{\Pi}$ affin linear in Dv , so hat Π die Darstellung in 4.12, wobei die Koeffizienten p, η und ζ von $(Dv)^S$ unabhängig sind. *Hinweis:* Es ist vorausgesetzt, dass $\widehat{\Pi}$ für alle Werte der Ableitung von v definiert ist.

Beweis ⁷. For $\widehat{\Pi}$ one obtains independence of v and independence of the antisymmetric part of Dv in the same manner as in 4.11. Therefore

$$\widehat{\Pi}(\varrho, \varepsilon, v, Dv) = \widehat{\Pi}(\varrho, \varepsilon, 0, (Dv)^S).$$

Now Π is an objective tensor, that is, $\Pi \circ Y = Q\Pi^*Q^T$ or

$$\widehat{\Pi}(\varrho, \varepsilon, 0, (Dv)^S) \circ Y = Q\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, (Dv^*)^S)Q^T.$$

Inserting the transformation rules for the arguments this is

$$\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, Q(Dv^*)^SQ^T) = Q\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, (Dv^*)^S)Q^T,$$

where the function $\widehat{\Pi}$ is affine linear in the last argument. For $(Dv^*)^S = 0$ we obtain that

$$\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, 0) = Q\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, 0)Q^T$$

for all orthogonal matrices Q . This implies that the matrix $\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, 0)$ (for fixed values of ϱ^* and ε^*) is a constant objective tensor, and therefore, by 4.14(4) for $n \geq 3$, is a multiple of the identity, that is,

$$\widehat{\Pi}(\varrho^*, \varepsilon^*, 0, 0) = \widehat{p}(\varrho^*, \varepsilon^*)\text{Id},$$

where physically $p = \widehat{p}(\varrho, \varepsilon)$ is the “pressure”. Then $S := p\text{Id} - \Pi$ is linear in the gradient, hence we have for the “stress tensor” S a representation

$$S_{ij} = \sum_{k,l=1}^n c_{ijkl}(\partial_k v_l + \partial_l v_k), \quad c_{ijkl} = \widehat{c}_{ijkl}(\varrho, \varepsilon),$$

where we can assume that $\widehat{c}_{ijkl} = \widehat{c}_{ijlk}$ for all $i, j, k, l = 1, \dots, n$. This is an objective representation of S with a scalar function \widehat{c}_{ijkl} since S is like Π an objective tensor, that is,

$$S_{ij} \circ Y = \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{j}\tilde{j}} S_{\tilde{i}\tilde{j}}^*.$$

⁷ Ein Beweis befindet sich in [10, §15], er entspricht aber nicht der hier gemeinten mathematischen Rigorosität, deshalb der folgende Beweis.

This can also be written as

$$\sum_{k,l} (c_{ijkl}(\partial_k v_l + \partial_l v_k)) \circ Y = \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}} \sum_{\tilde{k}, \tilde{l}} c_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}}^* Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{j}\tilde{j}} (\partial_{\tilde{k}} v_{\tilde{l}}^* + \partial_{\tilde{l}} v_{\tilde{k}}^*).$$

Using the transformation rule for $(Dv)^S$, that is (II4.14) which says that it is an objective tensor, we get that on the left-hand side we can replace

$$(\partial_k v_l + \partial_l v_k) \circ Y = \sum_{\tilde{k}, \tilde{l}} Q_{k\tilde{k}} Q_{l\tilde{l}} (\partial_{\tilde{k}} v_{\tilde{l}}^* + \partial_{\tilde{l}} v_{\tilde{k}}^*),$$

therefore

$$\sum_{k,l} c_{ijkl} \circ Y \sum_{\tilde{k}, \tilde{l}} Q_{k\tilde{k}} Q_{l\tilde{l}} (\partial_{\tilde{k}} v_{\tilde{l}}^* + \partial_{\tilde{l}} v_{\tilde{k}}^*) = \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}} \sum_{\tilde{k}, \tilde{l}} c_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}}^* Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{j}\tilde{j}} (\partial_{\tilde{k}} v_{\tilde{l}}^* + \partial_{\tilde{l}} v_{\tilde{k}}^*).$$

Since $(Dv^*)^S$ can be any symmetric matrix at a given spacetime point (this is true by assumption) the coefficients, which are symmetric in \tilde{k} and \tilde{l} , have to be the same. This leads to the identity

$$\sum_{k,l=1}^n c_{ijkl} \circ Y Q_{k\tilde{k}} Q_{l\tilde{l}} = \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{j}\tilde{j}} c_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}}^* \quad \text{for all } i, j, \tilde{k}, \tilde{l}.$$

Again we rewrite this so, that we have Q -terms only on the right-hand side, that is, we multiply the equation by $Q_{\tilde{k}\tilde{k}} Q_{\tilde{l}\tilde{l}}$, sum over (\tilde{k}, \tilde{l}) , and then rename (\tilde{k}, \tilde{l}) as (k, l) . This gives

$$c_{ijkl} \circ Y = \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{l}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{j}\tilde{j}} Q_{k\tilde{k}} Q_{l\tilde{l}} c_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}}^* \quad \text{for all } i, j, k, l$$

that is, $(c_{ijkl})_{i,j,k,l=1,\dots,n}$ is an objective 4-tensor. Now

$$c_{ijkl} \circ Y = \widehat{c}_{ijkl}(\varrho, \varepsilon) \circ Y = \widehat{c}_{ijkl}(\varrho^*, \varepsilon^*) = c_{ijkl}^*$$

so that

$$c_{ijkl}^* = \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{l}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{j}\tilde{j}} Q_{k\tilde{k}} Q_{l\tilde{l}} c_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}}^* \quad \text{for all } i, j, k, l.$$

This means that for fixed values of ϱ^* and ε^* the value $c_{ijkl}^* = \widehat{c}_{ijkl}^*(\varrho^*, \varepsilon^*)$ is fixed, that is, we can treat $(c_{ijkl}^*)_{i,j,k,l=1,\dots,n}$ as a constant objective 4-tensor, which is symmetric in the last two indices. Since S^* is symmetric, this implies, as shown in 4.14(6), that the symmetric part with respect to the first two indices is of the form

$$c_{ijkl}^* = a^*(\delta_{k,i}\delta_{l,j} + \delta_{l,i}\delta_{k,j}) + b^*\delta_{k,l}\delta_{i,j}$$

with two scalars a^* , b^* . Now use the fact, that $c_{ijkl} \circ Y = c_{ijkl}^*$ and similar $a \circ Y = a^*$, $b \circ Y = b^*$, to arrive at

$$c_{ijkl} = a(\delta_{k,i}\delta_{l,j} + \delta_{l,i}\delta_{k,j}) + b\delta_{k,l}\delta_{i,j}.$$

From this the assertion follows (see 4.14(6), (II4.32), (II4.33)). \square

Hier jetzt die benutzte Identität für konstante m -Tensoren.

4.14 Lemma. We consider a constant objective m -tensor $C = (c_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1, \dots, n}$ (see the definition in 3.2(4)). This means that for all orthogonal matrices Q in \mathbb{R}^n with $\det Q = 1$ the following identity is satisfied:

$$c_{i_1, \dots, i_m} = \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m=1}^n Q_{i_1 \bar{i}_1} \cdots Q_{i_m \bar{i}_m} c_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m}. \quad (\text{II4.15})$$

We assume $n \geq 2$ (for $n = 1$ there is only $Q = \text{Id}$).

(1) Property (II4.15) is equivalent to, for any antisymmetric matrix A ,

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{\bar{i}_1=1}^n A_{i_1 \bar{i}_1} c_{\bar{i}_1, i_2, \dots, i_m} + \sum_{\bar{i}_2=1}^n A_{i_2 \bar{i}_2} c_{i_1, \bar{i}_2, i_3, \dots, i_m} \\ & + \cdots + \sum_{\bar{i}_m=1}^n A_{i_m \bar{i}_m} c_{i_1, \dots, i_{m-1}, \bar{i}_m}. \end{aligned} \quad (\text{II4.16})$$

(2) Property (II4.15) is equivalent to

$$\begin{aligned} \delta_{i_1, r} c_{s, i_2, \dots, i_m} + \delta_{i_2, r} c_{i_1, s, i_3, \dots, i_m} + \cdots + \delta_{i_m, r} c_{i_1, \dots, i_{m-1}, s} \\ \text{is symmetric in } r, s \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (\text{II4.17})$$

for all $i_1, \dots, i_m = 1, \dots, n$.

(3) If $m = 1$ then $C = 0$.

(4) If $m = 2$ then, if $n \geq 3$, the matrix C is a multiple of the identity. For $n = 2$ it can have an additional antisymmetric part (see (II4.20)).

(5) If $m = 3$ then C satisfies (II4.15) if and only if C is antisymmetric in every pair of indices. If $n = 3$, then C satisfies for vectors $\xi \in \mathbb{R}^3$ for some $a \in \mathbb{R}$

$$C(\xi) := (\sum_{k=1}^3 c_{i, j, k} \xi_k)_{i, j=1, \dots, n} = a \cdot \begin{bmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II4.18})$$

If $n \geq 4$, then $C = 0$.

(6) If $m = 4$ we consider only the case $n \geq 3$. Then if C is symmetric in the last two arguments and C is symmetric in the first two arguments it has the form

$$C(M) := \left(\sum_{k, l=1}^n c_{i, j, k, l} M_{k, l} \right)_{i, j=1, \dots, n} = a \cdot (M + M^T) + b \cdot \text{trace}(M) \cdot \text{Id}. \quad (\text{II4.19})$$

Remark: Dieses Resultat ist aus dem Anhang von [19].

Beweis (1). Assume (II4.15) holds. Setting $Q = \exp(sA)$ with an antisymmetric matrix A , and taking the derivative with respect to s in (II4.15) at $s = 0$ one obtains (II4.16). Now assume that (II4.16) holds. Denote the right-hand side of (II4.15) by

$$F_i(Q) := \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m=1}^n Q_{i_1 \bar{i}_1} \cdots Q_{i_m \bar{i}_m} c_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m} \quad \text{for } i = (i_1, \dots, i_m).$$

Consider a smooth curve $s \mapsto Q(s)$ with $Q(0) = \text{Id}$. Then with $A(s) := \dot{Q}(s)Q^T(s)$ one computes

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F_i(Q(s)) &= \sum_{k=1}^n A_{i_1 k} F_{k, i_2, \dots, i_m}(Q(s)) + \sum_{k=1}^n A_{i_2 k} F_{i_1, k, i_3, \dots, i_m}(Q(s)) \\ &+ \cdots + \sum_{k=1}^n A_{i_m k} F_{i_1, \dots, i_{m-1}, k}(Q(s)). \end{aligned}$$

Using (II4.16), we see that the same differential equation holds for the function $s \mapsto F_i(Q(s)) - c_i$. Since $F_i(Q(0)) - c_i = 0$ for all i , we obtain $F_i(Q(s)) - c_i = 0$ for all s and i .

Since the set of orthogonal matrices with positive determinant is a connected manifold, we can reach any such matrix with a curve starting at the identity. \square

Beweis (2). Varying over all antisymmetric matrices one sees that (II4.16) is equivalent to the fact, that the identity (II4.17) holds. \square

We consider property (II4.17) in the subsequent argumentations. We do not claim that this is the most efficient way to derive these conclusions, but at least there is a unified background.

Beweis (3): Case $m = 1$. Then (II4.17) reads

$$\delta_{i,r}c_s = \delta_{i,s}c_r \quad \text{for all } i \text{ and } r \neq s.$$

Setting $i = r$ we get $c_s = 0$, and this for all s , hence the result follows. \square

Beweis (4): Case $m = 2$. Then (II4.17) reads

$$\delta_{i,r}c_{s,j} + \delta_{j,r}c_{i,s} = \delta_{i,s}c_{r,j} + \delta_{j,s}c_{i,r} \quad \text{for all } i, j \text{ and } r \neq s.$$

Setting $i = r, j = s$ we get

$$c_{s,s} = c_{r,r} \quad \text{for all } r \neq s,$$

hence for some number a

$$c_{i,i} = a \quad \text{for all } i.$$

If $n \geq 3$ set $i = r$ and let $j \neq r, s$. This gives

$$c_{s,j} = 0 \quad \text{for all } j \neq s.$$

Thus

$$C = a\text{Id}.$$

For $n = 2$ set $i = j = r$ and obtain

$$c_{s,r} + c_{r,s} = 0 \quad \text{for } s \neq r,$$

hence for some number b

$$C = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{II4.20}$$

\square

Beweis (5): Case $m = 3$. Then (II4.17) reads

$$\begin{aligned} & \delta_{i,r}c_{s,j,k} + \delta_{j,r}c_{i,s,k} + \delta_{k,r}c_{i,j,s} \\ & = \delta_{i,s}c_{r,j,k} + \delta_{j,s}c_{i,r,k} + \delta_{k,s}c_{i,j,r} \quad \text{for all } i, j, k \text{ and } r \neq s. \end{aligned} \tag{II4.21}$$

We consider the case $n \geq 3$. For $r = k = j$, and three different i, k , and s this gives

$$c_{i,s,k} + c_{i,k,s} = 0 \quad \text{for all } s, k \neq i \text{ with } s \neq k.$$

For $i = j, r = k$, and three different i, k , and s the identity gives

$$c_{i,i,s} = 0 \quad \text{for all } s \neq i,$$

and for $j = k, r = i$, and different i, k , and s this gives

$$c_{s,j,j} = 0 \quad \text{for all } s \neq j.$$

For $k = i \neq j$ and $s = i$, $r = j$ this gives $c_{i,i,i} = c_{j,j,i} + c_{i,j,j}$, which is 0 by the previous results, thus

$$c_{i,i,i} = 0 \quad \text{for all } i.$$

Therefore we have seen that

$$c_{i,j,k} \quad \text{is antisymmetric in } j, k.$$

Interchanging two indices leads to a tensor, which again is objective, hence the above antisymmetry applies to the new tensor. It follows that C is antisymmetric in every pair of indices. Every such 3-tensor is objective.

For $n \geq 4$ obtain for empty set $\{r, s\} \cap \{i, j\}$

$$\delta_{k,r} c_{i,j,s} = \delta_{k,s} c_{i,j,r}$$

and then for $k = s \neq r$

$$c_{i,j,r} = 0 \quad \text{for all } r \neq i, j.$$

Together with the above antisymmetry it follows that $C = 0$. For $n = 3$ we have

$$a := c_{1,2,3} = -c_{1,3,2} = c_{3,1,2} = -c_{3,2,1} = c_{2,3,1} = -c_{2,1,3},$$

and all other components vanish. Hence for vectors $\xi \in \mathbb{R}^3$ equation (II.4.18) holds. \square

Beweis (6): Case $m = 4$. Let C be any constant objective 4-tensor. We consider the case $n \geq 3$. Equation (II.4.17) reads

$$\begin{aligned} & \delta_{i,r} c_{s,j,k,l} + \delta_{j,r} c_{i,s,k,l} + \delta_{k,r} c_{i,j,s,l} + \delta_{l,r} c_{i,j,k,s} \\ &= \delta_{i,s} c_{r,j,k,l} + \delta_{j,s} c_{i,r,k,l} + \delta_{k,s} c_{i,j,r,l} + \delta_{l,s} c_{i,j,k,r} \quad \text{for all } i, j, k, l \text{ and } r \neq s. \end{aligned} \quad (\text{II.4.22})$$

Let us assume, that C is symmetric in the last two indices, that is

$$c_{i,j,k,l} = c_{i,j,l,k} \quad \text{for all } i, j, k, l.$$

Set $i = j$ in (II.4.22). Then

$$\begin{aligned} & \delta_{i,r} (c_{s,i,k,l} + c_{i,s,k,l}) + \delta_{k,r} c_{i,i,s,l} + \delta_{l,r} c_{i,i,k,s} \\ &= \delta_{i,s} (c_{r,i,k,l} + c_{i,r,k,l}) + \delta_{k,s} c_{i,i,r,l} + \delta_{l,s} c_{i,i,k,r} \quad \text{for } r \neq s \text{ and all } i, k, l. \end{aligned} \quad (\text{II.4.23})$$

For $k, l, r, s \neq i$ with $r \neq s$ one obtains

$$\delta_{k,r} c_{i,i,s,l} + \delta_{l,r} c_{i,i,k,s} = \delta_{k,s} c_{i,i,r,l} + \delta_{l,s} c_{i,i,k,r}.$$

This is the characterization of the objective 2-tensor $(c_{i,i,k,l})_{k,l=1,\dots,n}$ in $n-1$ dimensions. Since $n-1 \geq 2$ and symmetry is assumed, the above result (4) implies with a real number b_i

$$c_{i,i,k,l} = b_i \delta_{k,l} \quad \text{for all } k, l \neq i. \quad (\text{II.4.24})$$

For $r, s \neq i$ with $r \neq s$ and $k = r$, $l = i$ one obtains

$$c_{i,i,s,i} = 0 \quad \text{for all } s \neq i. \quad (\text{II.4.25})$$

Now, in (II.4.23), set $k = i$ and let $l, r, s \neq i$ with $r \neq s$. One obtains

$$\delta_{l,r} c_{i,i,i,s} = \delta_{l,s} c_{i,i,i,r} \quad \text{for all } i \text{ and } l, r, s \neq i \text{ with } r \neq s.$$

For $l = r$ this gives

$$c_{i,i,i,s} = 0 \quad \text{for all } s \neq i.$$

Together with (II4.24) this gives

$$\begin{aligned} c_{i,i,k,l} &= 0 && \text{for all } k \neq l, \\ c_{i,i,k,k} &= b_i && \text{for all } k \neq i, \\ c_{i,i,i,i} &&& \text{so far undetermined.} \end{aligned} \quad (\text{II4.26})$$

Now, in (II4.23), set $r = i$ and let $k, l, s \neq i$ (then $r \neq s$). One obtains

$$c_{s,i,k,l} + c_{i,s,k,l} = \delta_{k,s} c_{i,i,i,l} + \delta_{l,s} c_{i,i,k,i}.$$

The right-hand side vanishes by the first identity in (II4.26), hence

$$c_{s,i,k,l} + c_{i,s,k,l} = 0 \quad \text{for all } k, l, s \neq i,$$

or relabeled

$$c_{j,i,k,l} + c_{i,j,k,l} = 0 \quad \text{for all } i \neq j \text{ and all } k, l \neq i \text{ or } k, l \neq j.$$

Denoting the symmetrization with respect to the first two indices by

$$c'_{i,j,k,l} := \frac{1}{2}(c_{i,j,k,l} + c_{j,i,k,l}) \quad \text{for all } i, j, k, l \quad (\text{II4.27})$$

we obtain $c'_{i,j,k,l} = c'_{j,i,k,l} = 0$ for all $i \neq j$ and all $k, l \neq i$ or $k, l \neq j$, that is

$$c'_{i,j,k,l} = 0 \quad \text{for all } i \neq j \text{ and } k, l \text{ with } \{k, l\} \neq \{i, j\}. \quad (\text{II4.28})$$

For $\{k, l\} = \{i, j\}$ we get

$$a_{i,j} := c'_{i,j,i,j} = c'_{i,j,j,i} = c'_{j,i,i,j} = c'_{j,i,j,i} = a_{j,i}.$$

Now let $i \neq j$ in (II4.22). Then for $r = i$ and $s \neq i$ this identity becomes

$$\begin{aligned} c_{s,j,k,l} + \delta_{k,i} c_{i,j,s,l} + \delta_{l,i} c_{i,j,k,s} \\ = \delta_{j,s} c_{i,i,k,l} + \delta_{k,s} c_{i,j,i,l} + \delta_{l,s} c_{i,j,k,i} \quad \text{for } i \neq j, \text{ and } s \neq i, \text{ and all } k, l. \end{aligned} \quad (\text{II4.29})$$

As first case in (II4.29) let $s = j$. Then

$$\begin{aligned} c_{j,j,k,l} + \delta_{k,i} c_{i,j,j,l} + \delta_{l,i} c_{i,j,k,j} \\ = c_{i,i,k,l} + \delta_{k,j} c_{i,j,i,l} + \delta_{l,j} c_{i,j,k,i} \quad \text{for all } k, l. \end{aligned}$$

For $k = l \neq i, j$ this gives

$$c_{j,j,k,k} = c_{i,i,k,k} \quad \text{for all } i \neq j \text{ and } k \neq i, j,$$

thus in the second identity in (II4.26) for some number b

$$b_i = b \quad \text{for all } i.$$

For $k = l = i$ we obtain

$$c_{j,j,i,i} + c_{i,j,j,i} + c_{i,j,i,j} = c_{i,i,i,i},$$

which by definition of b becomes

$$c_{i,i,i,i} = b + c_{i,j,j,i} + c_{i,j,i,j},$$

and for $k = l = j$ we obtain

$$c_{j,j,j,j} = c_{i,i,j,j} + c_{i,j,i,j} + c_{i,j,j,i} = b + c_{i,j,i,j} + c_{i,j,j,i},$$

and interchanging i, j

$$c_{i,i,i,i} = b + c_{j,i,j,i} + c_{j,i,i,j}.$$

Adding up both equations for $c_{i,i,i,i}$ we arrive at

$$c_{i,i,i,i} = b + c'_{i,j,j,i} + c'_{i,j,i,j} = b + 2a_{i,j} \quad (\text{II4.30})$$

by definition of $a_{i,j}$. As second case in (II4.29) let $s \neq i, j$. Then

$$\begin{aligned} & c_{s,j,k,l} + \delta_{k,i} c_{i,j,s,l} + \delta_{l,i} c_{i,j,k,s} \\ &= \delta_{k,s} c_{i,j,i,l} + \delta_{l,s} c_{i,j,k,i} \quad \text{for } i \neq j \text{ and } s \neq i, j, \text{ and all } k, l. \end{aligned}$$

For $k = s$ and $l = j$ this gives

$$c_{s,j,s,j} = c_{i,j,i,j} \quad \text{for all } i \neq j \text{ and } s \neq i, j.$$

From now on let us consider only $C' := (c'_{i,j,k,l})_{i,j,k,l=1,\dots,n}$ given by (II4.27), that is the symmetric part of C with respect to the first two indices. Since also C' is a constant objective 4-tensor (the same for the corresponding antisymmetric part), we can apply all results also to C' . In particular, the last identity becomes

$$c'_{s,j,s,j} = c'_{i,j,i,j} \quad \text{for all } i \neq j \text{ and } s \neq i, j,$$

which by symmetry means that $c'_{i,j,i,j} = c'_{i,j,i,j}$ for all $i \neq j$ and $\tilde{i} \neq \tilde{j}$. Hence for some number a

$$a_{i,j} = a \quad \text{for all } i \neq j.$$

Therefore $c'_{i,i,i,i} = b + 2a$ from (II4.30). Summing up, we have shown that C' has the following structure:

$$\begin{aligned} & c'_{i,j,k,l} = 0 \quad \text{except that} \\ & c'_{i,i,k,k} = b \quad \text{for all } k \neq i, \\ & c'_{i,i,i,i} = b + 2a \quad \text{for all } i, \\ & c'_{i,j,i,j} = c'_{i,j,j,i} = c'_{j,i,i,j} = c'_{j,i,j,i} = a \quad \text{for all } j \neq i. \end{aligned} \quad (\text{II4.31})$$

This means that

$$c'_{i,j,k,l} = a(\delta_{k,i}\delta_{l,j} + \delta_{l,i}\delta_{k,j}) + b\delta_{k,l}\delta_{i,j} \quad \text{for all } i, j, k, l. \quad (\text{II4.32})$$

Or equivalently, for all matrices $M = (M_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$

$$\sum_{k,l=1}^n c'_{i,j,k,l} M_{k,l} = a \cdot (M_{i,j} + M_{j,i}) + b \cdot \text{trace}(M) \cdot \delta_{i,j}, \quad (\text{II4.33})$$

that is, C' satisfies (II4.19). □

5 Objektivität in Referenzkoordinaten

Die Objektivität lässt sich auch in Referenzkoordinaten formulieren. Als Beispiel seien auf dem deformierten Körper im physikalischen Raum vier (affin) linear unabhängige Punkte markiert werden, so dass sie jeder Beobachter “sehen” kann. Das führt für jeden Beobachter zu vier Punkten in dem nichtdeformierten Körper, sie gehören damit zum gemeinsamen Beobachterrepertoire. Es sei aber bemerkt, dass es die Referenzkoordinaten nur in der Newton’schen Physik gibt, in der relativistischen Physik geht das nicht. Es sei also eine Newton’sche Beobachtertransformation

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t^* + \mathbf{a} \\ X(t^*, x^*) \end{bmatrix}$$

gegeben. Beide Beobachter haben nun eine Transformation

$$x = \varphi(t, \underline{x}) \quad \text{und} \quad x^* = \varphi^*(t^*, \underline{x}^*)$$

von Referenzkoordinaten in die physikalischen Koordinaten, wobei wir annehmen, dass beide Beobachter dieselbe Referenzkonfiguration wählen. (Wir haben also die Situation in Abb. I23 mit denselben Referenzgebieten, also $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ und $\underline{x}^* = \underline{x}$, während wir in I.6.5 die Änderung der Referenzkoordinaten bei einem festen Beobachter behandelt hatten. In EX:Referenzkoordinaten werden wir Beobachter mit verschiedenen Referenzkonfigurationen behandeln.) Ist dann $\underline{\xi}$ durch

$$x = \varphi(t, \underline{x}) \quad \iff \quad \underline{x} = \underline{\xi}(t, x)$$

definiert (also als die Inverse von $\varphi(t, \bullet)$), so bedeutet dies

$$\underline{\xi}_i(t, x) = \underline{x}_i = \underline{\xi}_i^*(t^*, x^*) \quad \text{für} \quad (t, x) = Y(t^*, x^*), \quad (\text{II5.1})$$

d.h. die i -te Komponente der Referenzkoordinate $\underline{\xi}_i$ ist ein objektiver Skalar. Das wird für das folgende Lemma gebraucht.

5.1 Lemma. Eine Funktion $(t, \underline{x}) \mapsto \underline{p}(t, \underline{x})$ ist ein objektiver Skalar, wenn $\underline{p}(t, \underline{x}) = \underline{p}^*(t^*, \underline{x}^*)$ gilt. Ebenso ist $(t, \underline{x}) \mapsto \underline{e}(t, \underline{x})$ ein objektiver Vektor, wenn $\underline{e}(t, \underline{x}) = Q(t^*)\underline{e}^*(t^*, \underline{x}^*)$ gilt. *Bemerkung:* J ist ein objektiver Skalar.

Beweis. \underline{p} heißt objektiver Skalar, wenn dies für $\underline{p}(t, x) := \underline{p}(t, \underline{\xi}(t, x))$ erfüllt ist, also, wenn $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ die Beobachtertransformation ist,

$$\underline{p}(t, \underline{x}) = \underline{p}(t, \underline{\xi}(t, x)) = \underline{p}^*(t^*, \underline{\xi}^*(t^*, x^*)) = \underline{p}^*(t^*, \underline{x}^*).$$

Ebenso heißt \underline{e} objektiver Vektor, wenn dies für $\underline{e}(t, x) := \underline{e}(t, \underline{\xi}(t, x))$ erfüllt ist, also

$$\begin{aligned} \underline{e}(t, \underline{x}) &= \underline{e}(t, \underline{\xi}(t, x)) = \underline{e}(t, x) = Q(t^*)\underline{e}^*(t^*, x^*) \\ &= \underline{e}^*(t^*, \underline{\xi}^*(t^*, x^*)) = \underline{e}^*(t^*, \underline{x}^*), \end{aligned}$$

wenn $(t, x) = Y(t^*, x^*)$. □

Beweis der Bemerkung. Es ist $F = QF^*$ nach 5.2. Daher folgt die Behauptung für $J = \det F$. \square

Weiter gilt

5.2 Lemma. Für den Deformationsgradienten F sowie für die Geschwindigkeit V gilt

$$\begin{aligned} F(t, \underline{x}) &= Q(t^*)F^*(t^*, \underline{x}), \\ V(t, \underline{x}) &= \dot{X}(t^*, \varphi^*(t^*, \underline{x})) + Q(t^*)V^*(t^*, \underline{x}), \end{aligned}$$

für $t = t^* + a$.

Beweis. Da $X(t^*, x^*) = Q(t^*)x^* + b(t^*)$ folgt (beide Beobachter haben dieselbe Referenzkonfiguration)

$$\varphi(t, \underline{x}) = X(t^*, \varphi^*(t^*, \underline{x})) = Q(t^*)\varphi^*(t^*, \underline{x}) + b(t^*), \quad t = t^* + a.$$

Wenn wir dies nach \underline{x} ableiten, erhalten wir

$$F(t, x) = D\varphi(t, x) = Q(t^*)D\varphi^*(t^*, \underline{x}) = Q(t^*)F^*(t^*, \underline{x}),$$

die erste Behauptung, und wenn wir dies nach t^* ableiten

$$\begin{aligned} V(t, \underline{x}) &= \partial_t \varphi(t, \underline{x}) = \partial_{t^*} \varphi(t^* + a, \underline{x}) \\ &= \dot{X}(t^*, \varphi^*(t^*, \underline{x})) + Q(t^*)\partial_{t^*} \varphi^*(t^*, \underline{x}) \\ &= \dot{X}(t^*, \varphi^*(t^*, \underline{x})) + Q(t^*)V^*(t^*, \underline{x}), \end{aligned}$$

die zweite Behauptung. \square

Für den Piola-Kirchhoff Tensor definiert in Abschnitt I.6 gilt (den Tensor S bitte nicht mit dem Tensor aus der Flüssigkeitstheorie III.2.4 verwechseln)

5.3 Piola-Kirchhoff Spannungstensor. Definiere

$$\begin{aligned} S &:= F^{-1}P \text{ zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor,} \\ C &:= F^T F \text{ rechter Cauchy-Green Deformationstensor,} \\ B &:= F F^T \text{ linker Cauchy-Green Deformationstensor,} \end{aligned}$$

Beide, C und B , sind symmetrische Deformationstensoren. Dann gilt für den Drucktensor

$$-\Pi \circ \tau = \frac{1}{J} F S F^T \quad \text{oder} \quad S = J F^{-1} (-\Pi \circ \tau) F^{-T}.$$

Dies führt zu folgenden Beobachterabhängigkeiten

$$\begin{aligned} S(t, \underline{x}) &= S^*(t^*, \underline{x}), \\ C(t, \underline{x}) &= C^*(t^*, \underline{x}), \end{aligned}$$

das heißt, die Werte S_{ij} und C_{ij} sind beobachterunabhängig.

Beachte: Der Tensor S ist somit symmetrisch genau dann, wenn der Drucktensor Π symmetrisch ist.

Beweis. Nach 5.2 ist für $t = t^* + a$

$$F(t, \underline{x}) = Q(t^*)F^*(t^*, \underline{x}), \quad \text{also} \quad F^{*-1}(t^*, \underline{x}) = F^{-1}(t, \underline{x})Q(t^*).$$

Daraus folgt, wobei wir im Folgenden die Argumente weglassen,

$$C = F^T F = (QF^*)^T QF^* = F^{*T} Q^T QF^* = F^{*T} F^* = C^*.$$

Da

$$J = \det F = \det(QF^*) = \det Q \cdot \det F^* = \det F^* = J^*,$$

und da Π nach 3.7 ein objektiver Tensor ist, d.h. $\Pi \circ Y = Q\Pi^*Q^T$, erhalten wir unter Weglassen der Argumente

$$\begin{aligned} FSF^T &= -J\Pi = -J^*Q\Pi^*Q^T \\ &= Q(F^*S^*F^{*T})Q^T = QF^*S^*(QF^*)^T = FS^*F^T, \end{aligned}$$

und daraus $S = S^*$. Oder ausführlich mit allen Argumenten, da $\Pi \circ Y = Q\Pi^*Q^T$, $Y^{-1} \circ \tau = \tau^*$ und $Q \circ \tau^* = Q$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} FSF^T &= -J\Pi \circ \tau = -J\Pi \circ Y \circ Y^{-1} \circ \tau = -J^*Q\Pi^* \circ \tau^* Q^T \\ &= Q(F^*S^*F^{*T})Q^T = QF^*S^*(QF^*)^T = FS^*F^T, \end{aligned}$$

und daraus $S = S^*$. □

5.4 Konstitutive Funktion für S . Ist S der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor, so definiert jede konstitutive Beziehung

$$S(t, \underline{x}) = \widehat{S}(\underline{x}, C(t, \underline{x})) \tag{II5.2}$$

eine objektive Funktion \widehat{S} . Dasselbe gilt für

$$S(t, \underline{x}) = \widehat{S}(\underline{x}, \underline{p}(t, \underline{x}), C(t, \underline{x})), \tag{II5.3}$$

wenn \underline{p} ein objektiver Skalar ist.

Beweis. Es gilt $C(t, \underline{x}) = C^*(t^*, \underline{x})$ und $S(t, \underline{x}) = S^*(t^*, \underline{x})$, wie in 5.3 bewiesen. Setzen wir dies in die konstitutive Beziehung (II5.2) ein, so erhalten wir $S^*(t^*, \underline{x}) = \widehat{S}(\underline{x}, C^*(t^*, \underline{x}))$, also ist die Funktion \widehat{S} dieselbe für verschiedene Beobachter. Im Falle (II5.3) greift dieselbe Argumentation, da $\underline{p}(t, \underline{x}) = \underline{p}^*(t^*, \underline{x})$. □

5.5 Beispiel. A simple example for \widehat{S} is

$$\widehat{S}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\underline{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(\underline{x}) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\underline{x}) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T.$$

Then $S(t, \underline{x}) = \widehat{S}(\underline{x})$ implies

$$-\Pi \circ \tau = \frac{1}{J} F S F^T = \frac{1}{J} F \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T F^T = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^n \lambda_k \circ \underline{\xi} e_k \circ \tau (e_k \circ \tau)^T$$

with $e_k \circ \tau := F \mathbf{e}_k$. It is $\{e_1(t, x), \dots, e_n(t, x)\}$ a basis in physical space. The vectors e_k are objective vectors, since if $x = \varphi(t, \underline{x})$ and $x^* = \varphi^*(t^*, \underline{x})$

$$e_k(t, x) = F(t, \underline{x}) \mathbf{e}_k = Q(t^*) F^*(t^*, \underline{x}) \mathbf{e}_k = Q(t^*) e_k^*(t^*, x^*)$$

See the example in 4.7 where an orthonormal basis were chosen.

6 Drehmoment

We are interested in the angular momentum of a medium with respect to a moving point

$$t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^3,$$

which might be the center of another observer seen from the present observer. The special case, that this point is equal to 0, is usually presented in literature, an exception one finds in Truesdell [14, I.8]. Indeed, the description with ξ is necessary, if one wants an observer independent formulation of the angular momentum. So we have the identity $(t, \xi(t)) = Y(t^*, \xi^*(t^*))$ for an observer transformation Y .

We start with the usual conservation for mass and momentum 3.7 in the special case $\mathbf{J} = 0$ and $\mathbf{r} = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (\text{II6.1})$$

For this case we define the **Drehmoment** \mathcal{J} by a matrix satisfying

Drehmoment \mathcal{J} :

$$\partial_t \mathcal{J} + \operatorname{div}(\mathcal{J} v^T + \tilde{\Sigma}) = \tilde{G}$$

$\mathcal{J} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ antisymmetrisch,
 $\mathcal{J} \circ Y = \varrho^*(Q(x^* - \xi^*)) \wedge (\dot{Q}(v^* - \dot{\xi}^*)) + Q \mathcal{J}^* Q^T$
 where Y is the observer transformation

(II6.2)

In coordinates this equation reads

$$\partial_t \mathcal{J}_{kl} + \sum_j \partial_{x_j} (\mathcal{J}_{kl} v_j + \tilde{\Sigma}_{klj}) = \tilde{G}_{kl}.$$

This is the form used in DeGroot & Mazur [6, CH. XII §1]. To be concrete we define the **Spin** as a matrix satisfying

Spin \mathcal{S} :

$$\mathcal{J} = \mathcal{L} + \mathcal{S}$$

$\mathcal{L} = (x - \xi) \wedge \varrho(v - \dot{\xi})$ see 6.2,
 der Bahndrehmoment,
 $\mathcal{S} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ antisymmetrisch,
 der Spin, ist ein objektiver Tensor

(II6.3)

Here we use the ' \wedge ' product as in Truesdell [14, I.8], in literature usually the cross product ' \times ' is used, it is an equivalent notation:

6.1 Definition. The products ' \wedge ' and ' \times ' satisfy for $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a_2b_3 - b_2a_3)\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + (a_3b_1 - b_3a_1)\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \\ a \times b &= (a_2b_3 - b_2a_3)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - b_3a_1)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

so that they use just different basis vectors. The Grassman product ' \wedge ' can also be defined by

$$a \wedge b := a \otimes b - b \otimes a = ab^T - ba^T.$$

For an antisymmetric matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ and a vector $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ the property

$$\mathbf{R} = \mathcal{R}(\boldsymbol{\omega}) := \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \iff \forall a \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{\omega} \times a = \mathbf{R}a$$

is true.

We have to show the assumption on \mathcal{L} in (II6.3).

6.2 Basic lemma. The following transformation formulas hold

$$\begin{aligned} (x - \xi) \circ Y &= Q(x^* - \xi^*) \quad \text{with} \quad \partial_{(1,v)}(x - \xi) = v - \dot{\xi}, \\ (v - \dot{\xi}) \circ Y &= \dot{Q}(x^* - \xi^*) + Q(v^* - \dot{\xi}^*). \end{aligned}$$

This implies that \mathcal{L} in (II6.3) satisfies the transformation rule of \mathcal{J} in (II6.2).

Beweis. It is

$$\xi(t) = X(t^*, \xi^*(t^*)) \quad \text{for} \quad (t, x) = Y(t^*, x^*)$$

as in (III.3), hence

$$((x - \xi) \circ Y)(t^*, x^*) = X(t^*, x^*) - X(t^*, \xi^*(t^*)) = Q(t^*)(x^* - \xi^*(t^*)).$$

And we compute

$$\begin{aligned} \partial_{(1,v)}(x - \xi) &= \partial_{(1,v)}x - \partial_{(1,v)}\xi \\ &= \partial_t x + v \bullet \nabla x - \partial_t \xi - v \bullet \nabla \xi = v \bullet \nabla x - \partial_t \xi = v - \dot{\xi}. \end{aligned}$$

The transformation rule for ξ is

$$(\dot{\xi} \circ Y)(t^*) = \dot{X}(t^*, \xi^*(t^*)) + Q(t^*)\dot{\xi}^*(t^*), \quad (\text{II6.4})$$

hence we obtain for $v - \dot{\xi}$

$$\begin{aligned} ((v - \dot{\xi}) \circ Y)(t^*, x^*) &= \dot{X}(t^*, x^*) + Q(t^*)v^* - \dot{X}(t^*, \xi^*(t^*)) - Q(t^*)\dot{\xi}^*(t^*) \\ &= \dot{Q}(t^*)(x^* - \xi^*(t^*)) + Q(t^*)(v^* - \dot{\xi}^*(t^*)). \end{aligned}$$

These statements imply immediately

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \circ Y &= \varrho \circ Y ((x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi})) \circ Y \\
&= \varrho^*(Q(x^* - \xi^*)) \wedge (\dot{Q}(x^* - \xi^*) + Q(v^* - \dot{\xi}^*)) \\
&= \varrho^*(Q(x^* - \xi^*)) \wedge (\dot{Q}(x^* - \xi^*)) + \varrho^*(Q(x^* - \xi^*)) \wedge (Q(v^* - \dot{\xi}^*)) \\
&= \varrho^*(Q(x^* - \xi^*)) \wedge (\dot{Q}(x^* - \xi^*)) + Q\mathcal{L}^*Q^T,
\end{aligned}$$

since for $w, z \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
(Qw \wedge Qz)_{kl} &= (Qw)_k(Qz)_l - (Qw)_l(Qz)_k \\
&= \sum_{\bar{k}, \bar{l}} Q_{k\bar{k}} Q_{l\bar{l}} (w_{\bar{k}} z_{\bar{l}} - w_{\bar{l}} z_{\bar{k}}) = (Q(w \wedge z)Q^T)_{kl}.
\end{aligned} \tag{II6.5}$$

Thus \mathcal{L} satisfies the transformation rule of an angular momentum. \square

We define the *specific angular momentum* by

$$\mathcal{J} = \varrho \mathcal{J}^{\text{sp}}, \quad \text{similar} \quad \mathcal{L} = \varrho \mathcal{L}^{\text{sp}}, \quad \mathcal{S} = \varrho \mathcal{S}^{\text{sp}}. \tag{II6.6}$$

With this definition

6.3 Theorem. The system (II6.1) and the angular momentum equation (II6.2) are equivalent to⁸

$$\begin{aligned}
\partial_{(1,v)} \varrho + \varrho \operatorname{div}(v - \dot{\xi}) &= 0, \\
\varrho \partial_{(1,v)}(v - \dot{\xi}) + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}, \\
\varrho \partial_{(1,v)} \mathcal{J}^{\text{sp}} + \operatorname{div} \tilde{\Sigma} &= \tilde{G}.
\end{aligned} \tag{II6.7}$$

Beweis. For the mass-momentum system we recall (II3.16) and do the following manipulation: In the mass equation we add $\operatorname{div} \dot{\xi} = 0$ and in the momentum equation $\varrho \partial_{(1,v)} \dot{\xi} = \varrho \ddot{\xi}$. This gives the asserted equations. For the angular momentum we compute

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{J} + \operatorname{div}(\mathcal{J} v^T) &= \partial_t(\varrho \mathcal{J}^{\text{sp}}) + \operatorname{div}(\mathcal{J}^{\text{sp}}(\varrho v)^T) \\
&= (\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v)) \mathcal{J}^{\text{sp}} + \varrho \partial_t \mathcal{J}^{\text{sp}} + \varrho v \bullet \nabla \mathcal{J}^{\text{sp}} = \varrho \partial_{(1,v)} \mathcal{J}^{\text{sp}}
\end{aligned}$$

which gives the third equation. \square

The third equation in (II6.7) can also be written as

⁸ Es ist $\partial_{(1,v)} = \partial_t + v \bullet \nabla_x$ als Richtungsableitung in Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ definiert. Dies wird die ‘‘totale Zeitableitung’’ genannt und auch mit $\partial_{(1,v)} h = \overset{\circ}{h}$ für jede Funktion h bezeichnet. Siehe die Fußnote zur Notation in 3.8.

6.4 Spin balance equation. The spin \mathcal{S} satisfies

$$\varrho \partial_{(1,v)} \mathcal{S}^{\text{sp}} + \text{div} \Sigma = 2 \Pi^{\text{A}} + G,$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= (x - \xi) \wedge \Pi + \Sigma, \\ (x - \xi) \wedge \Pi &\quad \text{moment of stress density,} \\ \Sigma &\quad \text{couple stress density,} \\ \tilde{G} &= (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}) + G, \\ (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}) &\quad \text{moment of volume forces,} \\ G &\quad \text{(intrinsic) body couple density.} \end{aligned}$$

Remark: See Hutter & Jöhnk [47, Ex. 2.4.4 with solution 2.5.4].

Beweis. The third equation of (II6.7) with $\mathcal{J}^{\text{sp}} = \mathcal{L}^{\text{sp}} + \mathcal{S}^{\text{sp}}$ and the equation of the next statement are

$$\begin{aligned} \varrho \partial_{(1,v)} (\mathcal{L}^{\text{sp}} + \mathcal{S}^{\text{sp}}) + \text{div} \tilde{\Sigma} &= \tilde{G}, \\ \varrho \partial_{(1,v)} \mathcal{L}^{\text{sp}} + 2 \Pi^{\text{A}} + \text{div}((x - \xi) \wedge \Pi) &= (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}) \end{aligned}$$

for $\mathcal{L}^{\text{sp}} = (x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi})$. Taking the difference we obtain

$$\begin{aligned} \varrho \partial_{(1,v)} \mathcal{S}^{\text{sp}} + \text{div}(\tilde{\Sigma} - (x - \xi) \wedge \Pi) \\ = 2 \Pi^{\text{A}} + \tilde{G} - (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}). \end{aligned}$$

Hence the assertion holds. □

In the proof we have used the subsequent

6.5 Important identity. We obtain for solutions of (II6.1)

$$\varrho \partial_{(1,v)} \mathcal{L}^{\text{sp}} + 2 \Pi^{\text{A}} + \text{div}((x - \xi) \wedge \Pi) = (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi})$$

where $\mathcal{L} := \varrho (x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi})$.

Beweis. For arbitrary Π we compute

$$\begin{aligned} \varrho \partial_{(1,v)} ((x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi})) &= \varrho \partial_{(1,v)} ((x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi})) \\ &= (x - \xi) \wedge (\varrho \partial_{(1,v)} (v - \dot{\xi})) + \underbrace{\varrho (\partial_{(1,v)} (x - \xi)) \wedge (v - \dot{\xi})}_{= \varrho (v - \dot{\xi}) \wedge (v - \dot{\xi}) = 0} \\ &= (x - \xi) \wedge (\varrho \partial_{(1,v)} v) - (x - \xi) \wedge (\varrho \ddot{\xi}) \\ &= (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}) - (x - \xi) \wedge \text{div} \Pi \end{aligned}$$

that is

$$\varrho \partial_{(1,v)}((x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi})) + (x - \xi) \wedge \operatorname{div} \Pi = (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}).$$

Now we have to handle the term

$$\begin{aligned} (x - \xi) \wedge \operatorname{div} \Pi &= \sum_{\gamma} (x - \xi) \wedge \partial_{x_{\gamma}} \Pi_{\bullet \gamma} \\ &= \sum_{\gamma} \partial_{x_{\gamma}} ((x - \xi) \wedge \Pi_{\bullet \gamma}) - \sum_{\gamma} (\partial_{x_{\gamma}} (x - \xi)) \wedge \Pi_{\bullet \gamma} \\ &= \operatorname{div}((x - \xi) \wedge \Pi) - \sum_{\gamma} \mathbf{e}_{\gamma} \wedge \Pi_{\bullet \gamma} \end{aligned}$$

where ⁹

$$- \sum_{\gamma} \mathbf{e}_{\gamma} \wedge \Pi_{\bullet \gamma} = \sum_{\beta, \gamma} \Pi_{\beta \gamma} \mathbf{e}_{\beta} \wedge \mathbf{e}_{\gamma} = \sum_{\beta, \gamma} (\Pi_{\beta \gamma} - \Pi_{\gamma \beta}) \mathbf{e}_{\beta} \otimes \mathbf{e}_{\gamma} = 2\Pi^{\mathbf{A}}.$$

Das ergibt die behauptete Gleichung. \square

If Π is symmetric, then \mathcal{L} satisfies the usual form of angular momentum.

6.6 Conservation of angular momentum. Assume the first two equations of 6.3 are satisfied. Then it holds: The matrix Π is symmetric if and only if

$$\varrho \partial_{(1,v)}((x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi})) + \operatorname{div}((x - \xi) \wedge \Pi) = (x - \xi) \wedge (\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi}).$$

Hence $\mathcal{J} = \mathcal{L} = \varrho((x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi}))$ by 6.2 is an angular momentum. For observers for which ξ is zero the equation reads

$$\varrho \partial_{(1,v)}(x \wedge v) + \operatorname{div}(x \wedge \Pi) = x \wedge \mathbf{f}.$$

Notice: Here for symmetric Π the spin matrix \mathcal{S} is zero.

Reminder: The divergence operator works on the last index of the argument, here it is

$$\operatorname{div}(w \wedge \Pi) = \operatorname{div}\left(\sum_j w \wedge \Pi_{\bullet j} \mathbf{e}_j\right) = \sum_j \partial_j (w \wedge \Pi_{\bullet j})$$

for vectors w and tensors Π where $\Pi_{\bullet j} = (\Pi_{ij})_i$.

Beweis. Now, the difference of the equation in 6.5, which is true for any Π , with the equation in the statement is $2\Pi^{\mathbf{A}} = 0$. Therefore the assertion is proved. \square

⁹For vectors $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$ and $x \otimes y = xy^{\mathbf{T}}$, and for matrices we have $M = (M_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta} = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}$

Also gibt es für symmetrische Π keinen Spin. Die einzige Anwendung mit einem nichtsymmetrischen Drucktensor Π findet sich hierim Abschnitt 17 über Flüssigkristalle.

Um einen Spin zu erklären betrachten wir einen starren Körper wie er in I.6.4(3) identifiziert wurde als $v(t, x) = A(t)x + b(t)$ für den Geschwindigkeitsvektor, mit einer antisymmetrischen Matrixfunktion A und einer Vektorfunktion b . Alternatively, one could define the rigid body in reference coordinates as in I.6.6

$$x = \varphi(t, \underline{x}) = x_{cen}(t) + F(t)\underline{x}, \quad \underline{x} \in \mathcal{B},$$

with an orthogonal matrix $F(t)$. Then $B_t := \varphi(t, \mathcal{B})$ is the solid body at time t . The mass $\underline{x} \mapsto \underline{\rho}(\underline{x})$ is given and the body \mathcal{B} is translated so that the center of mass in reference coordinates $\underline{x}_{cen} = 0$. Then in physical space the mass center is $x_{cen}(t) := \varphi(t, \underline{x}_{cen})$, that is, defining ϱ as in (I6.4) by $\varrho(t, x) = \underline{\rho}(\underline{x})$ since $J = \det F = 1$ (hence ϱ in B_t is independent of time),

$$\int_{B(t)} \varrho(t, x)(x - x_{cen}(t)) dx = F(t) \int_{\mathcal{B}} \underline{\rho}(\underline{x})\underline{x} d\underline{x} = 0.$$

For the velocity we obtain

$$v(t, x) = \partial_t \varphi(t, \underline{x}) = \dot{x}_{cen}(t) + \dot{F}(t)\underline{x} = \dot{x}_{cen}(t) + \dot{F}(t)F(t)^T (x - x_{cen}(t)),$$

and with $A(t) := \dot{F}(t)F(t)^T$ this is equivalent to

$$v(t, x) = v_{cen}(t) + A(t)(x - x_{cen}(t)), \quad v_{cen}(t) := \dot{x}_{cen}(t), \quad (\text{II6.8})$$

where $A(t)$ is an antisymmetric matrix, that is, we have derived for v the above mentioned structure. As mass-momentum equation for solid bodies we take the following system in the distributional version in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \partial_t[\varrho \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho v \mathcal{X}_B] &= 0, \\ \partial_t[\varrho v \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho v v^T \mathcal{X}_B] &= [\mathbf{f}], \\ \mathbf{f} \circ Y &= \varrho^* \mathcal{X}_{B^*}(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^*, \end{aligned} \quad (\text{II6.9})$$

where $B = \{(t, x); x \in B_t\}$. It is clear that the following holds.

6.7 Lemma. For a rigid body in empty space the mass-momentum system (II6.9) holds, if

$$\mathbf{f} = \varrho \mathbf{f}^{\text{sp}} \mathcal{X}_B, \quad \mathbf{f}^{\text{sp}} = C(t)(x - x_{cen}(t)) + c(t),$$

where

$$c = \ddot{x}_{cen} \quad \text{and} \quad C = \dot{A} + A^2.$$

This is compatible with the transformation rule of \mathbf{f} , see (II6.9).

Résumé: For a rigid body the mass-momentum equation cannot hold under a general gravitational potential, only if the potential is approximated by a linear term like on the surface of Earth.

Beweis. One possible proof is: The left side of the mass equation reads for scalar test functions ζ

$$\begin{aligned} & \langle \zeta, \partial_t[\varrho \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho v \mathcal{X}_B] \rangle \\ &= - \int_B (\varrho \partial_t \zeta + \varrho v \bullet \nabla \zeta) \, dL^4 = - \int_B (\varrho, \varrho v) \bullet (\partial_t, \nabla) \zeta \, dL^4 \\ &= - \int_{\partial B} \zeta (\varrho, \varrho v) \bullet \mathbf{n}_B \, dH^3 + \int_B \zeta (\partial_t, \operatorname{div})(\varrho, \varrho v) \, dL^4 \end{aligned}$$

where \mathbf{n}_B is the outer normal of $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (and ∂B is 3-dimensional). Now, if $\underline{x} \in \partial B$ then for all times $(t, \varphi(t, \underline{x})) \in \partial B$ hence

$$(1, v(t, x)) = (1, \partial_t \varphi(t, \underline{x})) = \frac{d}{dt}(t, \varphi(t, \underline{x}))$$

lies in the tangent space of $\partial B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, therefore $(1, v) \bullet \mathbf{n}_B = 0$. In the second integral, since $\operatorname{div} v = \operatorname{trace} A = 0$ in B ,

$$(\partial_t, \operatorname{div})(\varrho, \varrho v) = (\partial_t + v \bullet \nabla) \varrho = \frac{d}{dt} \varrho(t, \varphi(t, \underline{x})) = \frac{d}{dt} \varrho(\underline{x}) = 0.$$

We have proved the mass equation. Analogously we show for the momentum equation for vector valued test functions ζ

$$\begin{aligned} & \langle \zeta, \partial_t[\varrho v \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho v v^T \mathcal{X}_B] \rangle \\ &= - \sum_k \int_B (\varrho v_k \partial_t \zeta_k + \varrho v_k (v \bullet \nabla) \zeta_k) \, dL^4 = - \sum_k \int_B \varrho v_k (1, v) \bullet (\partial_t, \nabla) \zeta_k \, dL^4 \\ &= - \sum_k \int_{\partial B} \zeta_k \varrho v_k (1, v) \bullet \mathbf{n}_B \, dH^3 + \sum_k \int_B \zeta_k (\partial_t, \operatorname{div})(\varrho v_k, \varrho v_k v) \, dL^4. \end{aligned}$$

The boundary term vanishes as before and, since $\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0$ in B ,

$$\begin{aligned} (\partial_t, \operatorname{div})(\varrho v_k, \varrho v_k v) &= \partial_t(\varrho v_k) + \operatorname{div}(\varrho v_k v) \\ &= \varrho \partial_t v_k + \varrho v \bullet \nabla v_k = \varrho (\partial_t + v \bullet \nabla) v_k, \end{aligned}$$

hence the differential equation implies

$$\begin{aligned} \langle \zeta, [\mathbf{f}] \rangle &= \langle \zeta, \partial_t[\varrho v \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho v v^T \mathcal{X}_B] \rangle \\ &= \langle \zeta, [\varrho \mathcal{X}_B (\partial_t + v \bullet \nabla) v] \rangle. \end{aligned}$$

Therefore \mathbf{f} has to be as in the assertion $\mathbf{f} = \varrho \mathbf{f}^{\text{SP}} \mathcal{X}_B$ and \mathbf{f}^{SP} in the set B is

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\text{SP}} &= (\partial_t + v \bullet \nabla) v = (\partial_t + v \bullet \nabla)(v_{cen} + A(x - x_{cen})) \\ &= \dot{v}_{cen} - A v_{cen} + \dot{A}(x - x_{cen}) + A v \\ &= \dot{v}_{cen} - A v_{cen} + \dot{A}(x - x_{cen}) + A(v_{cen} + A(x - x_{cen})) \\ &= \dot{v}_{cen} + (\dot{A} + A^2)(x - x_{cen}), \end{aligned}$$

that is, c and C in the assertion are $c = \dot{v}_{cen}$ and $C = \dot{A} + A^2$. To have the standard transformation rule for \mathbf{f} , that is, the third equation in (II6.9), \mathbf{f}^{sp} has to satisfy

$$\mathbf{f}^{sp} \circ Y = (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^{sp*}.$$

Now

$$\mathbf{f}^{sp} \circ Y = C \circ Y (X(t^*, x^*) - X(t^*, x_{cen}^*)) + c \circ Y = C \circ Y Q (x^* - x_{cen}^*) + c \circ Y$$

and

$$\begin{aligned} (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^{sp*} &= \ddot{Q}x^* + \ddot{b} + 2\dot{Q}(v_{cen}^* + A(x^* - x_{cen}^*)) + Q\mathbf{f}^{sp*} \\ &= \ddot{Q}((x^* - x_{cen}^*) + x_{cen}^*) + \ddot{b} + 2\dot{Q}(v_{cen}^* + A(x^* - x_{cen}^*)) \\ &\quad + Q(C^*(x^* - x_{cen}^*) + c^*). \end{aligned}$$

Comparison of the coefficients of $x^* - x_{cen}^*$ gives

$$C \circ Y Q = \ddot{Q} + 2\dot{Q}A + QC^*$$

and the remaining absolute term is

$$c \circ Y = \ddot{Q}x_{cen}^* + \ddot{b} + 2\dot{Q}v_{cen}^* + Qc^*.$$

These are the transformation rules for C and c . □

The angular momentum for the rigid body has the following distributional version.

6.8 Lemma. For a rigid body in empty space the angular momentum reads in the space of distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{J} + \operatorname{div}(v \mathcal{J}) &= [(x - \xi) \wedge (\mathbf{f}^{sp} - \ddot{\xi}) \varrho \mathcal{X}_B], \\ \mathcal{J} &:= [(x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi}) \varrho \mathcal{X}_B]. \end{aligned}$$

Beweis. First we prove that the modified momentum equation

$$\partial_t [\varrho(v - \dot{\xi}) \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho(v - \dot{\xi}) v^T \mathcal{X}_B] = [\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi} \mathcal{X}_B] \quad (\text{II6.10})$$

holds, since for vector valued test functions ζ

$$\begin{aligned} &\left\langle \zeta, \partial_t [\varrho(v - \dot{\xi}) \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho(v - \dot{\xi}) v^T \mathcal{X}_B] \right\rangle \\ &= - \int_B \left(\partial_t \zeta \bullet \varrho(v - \dot{\xi}) + \sum_j v_j \partial_j \zeta \bullet \varrho(v - \dot{\xi}) \right) dL^4 \\ &= - \int_B \left(\partial_t (\zeta \bullet (v - \dot{\xi})) \cdot \varrho - \varrho \zeta \bullet \partial_t (v - \dot{\xi}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_j \partial_j (\zeta \bullet (v - \dot{\xi})) \cdot \varrho v_j - \varrho \zeta \bullet \sum_j v_j \partial_j (v - \dot{\xi}) \right) dL^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_B \left(\partial_t(\zeta \bullet (v - \dot{\xi})) \cdot \varrho + \sum_j \partial_j(\zeta \bullet (v - \dot{\xi})) \cdot \varrho v_j \right) dL^4 \\
&\quad + \int_B \left(\varrho \zeta \bullet \partial_t(v - \dot{\xi}) + \varrho \zeta \bullet \sum_j v_j \partial_j(v - \dot{\xi}) \right) dL^4 \\
&= \left\langle \zeta \bullet (v - \dot{\xi}), \partial_t[\varrho \mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho v_j \mathcal{X}_B] \right\rangle \\
&\quad + \int_B \varrho \zeta \bullet (\partial_t(v - \dot{\xi}) + (v \bullet \nabla)(v - \dot{\xi})) dL^4.
\end{aligned}$$

The first term vanishes because of the distributional mass equation, here with test function $\zeta \bullet (v - \dot{\xi})$ (we have to continue v somehow outside B). In the second term we have $(\partial_t + (v \bullet \nabla))\dot{\xi} = \ddot{\xi}$, and $\partial_t v + (v \bullet \nabla)v = \mathbf{f}^{\text{SP}}$ for the momentum equation in B . Therefore

$$\begin{aligned}
&\left\langle \zeta, \partial_t[\varrho(v - \dot{\xi})\mathcal{X}_B] + \operatorname{div}[\varrho(v - \dot{\xi})v^T \mathcal{X}_B] \right\rangle \\
&= \int_B \zeta \bullet (\varrho \mathbf{f}^{\text{SP}} - \varrho \ddot{\xi}) dL^4 = \left\langle \zeta, [\mathbf{f} - \varrho \ddot{\xi} \mathcal{X}_B] \right\rangle
\end{aligned}$$

so that (II6.10) is proved.

In the main part of the proof we choose in the weak equation of (II6.10)

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_k \int_B (\partial_t \zeta_k \cdot \varrho(v - \dot{\xi})_k + \nabla \zeta_k \cdot (\varrho(v - \dot{\xi})_k v) + \zeta_k \varrho(\mathbf{f}^{\text{SP}} - \ddot{\xi})_k) dL^4 \\
&= \sum_k \int_B ((\partial_t + v \bullet \nabla) \zeta_k \cdot \varrho(v - \dot{\xi})_k + \zeta_k \varrho(\mathbf{f}^{\text{SP}} - \ddot{\xi})_k) dL^4
\end{aligned}$$

the vector valued test functions ζ as

$$\zeta_k(t, x) = \sum_l \zeta_{kl}(t, x) \cdot (x - \xi)_l \quad \text{with} \quad \zeta_{kl} + \zeta_{lk} = 0,$$

that is, we multiply the k -th component of (II6.10) with $(x - \xi)_l$ and subtract the l -th component of the multiple by $(x - \xi)_k$. We obtain

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k,l} \int_B \left((\partial_t + v \bullet \nabla)(\zeta_{kl}(x - \xi)_l) \cdot \varrho(v - \dot{\xi})_k \right. \\
&\quad \left. + \zeta_{kl}(x - \xi)_l \varrho(\mathbf{f}^{\text{SP}} - \ddot{\xi})_k \right) dL^4 \\
&= \sum_{k,l} \int_B \left((\partial_t + v \bullet \nabla) \zeta_{kl} \cdot (x - \xi)_l \varrho(v - \dot{\xi})_k \right. \\
&\quad \left. + \zeta_{kl} \underbrace{(\partial_t + v \bullet \nabla)(x - \xi)_l}_{= (v - \dot{\xi})_l} \cdot \varrho(v - \dot{\xi})_k + \zeta_{kl}(x - \xi)_l \varrho(\mathbf{f}^{\text{SP}} - \ddot{\xi})_k \right) dL^4
\end{aligned}$$

The second term vanishes since $(k, l) \mapsto \zeta_{kl}$ is antisymmetric, and therefore with $\mathcal{J}_{kl} := [(x - \xi)_l (v - \dot{\xi})_k \varrho \mathcal{X}_B]$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k,l} \int_B \left((\partial_t \zeta_{kl} + v \bullet \nabla \zeta_{kl}) \cdot (x - \xi)_l \varrho (v - \dot{\xi})_k \right. \\ &\quad \left. + \zeta_{kl} (x - \xi)_l \varrho (\mathbf{f}^{\text{SP}} - \ddot{\xi})_k \right) dL^4 \\ &= \sum_{k,l} \left\langle \zeta_{kl}, \partial_t \mathcal{J}_{kl} + \operatorname{div}(\mathcal{J}_{kl} v) + [(x - \xi)_l \varrho (\mathbf{f}^{\text{SP}} - \ddot{\xi})_k \mathcal{X}_B] \right\rangle, \end{aligned}$$

the assertion. □

Now we let B_t a moving rod with $x_{cen}(t)$ as center of mass

$$B_t := \left\{ (t, x_{cen}(t) + sn(t) + y) ; -\frac{\ell}{2} \leq s \leq \frac{\ell}{2}, y \bullet \mathbf{n}(t) = 0, |y| < \varepsilon \right\}$$

where ℓ is the length and $\mathbf{n}(t)$ the direction of the rod. The mass density in B is assumed to be constant and equal to

$$\varrho := \frac{m}{L^3(B_t)} = \frac{m}{\ell \pi \varepsilon^2}, \quad m > 0,$$

und v ist wie in (II6.8) gegeben. Wir betrachten nun den Limes $\varepsilon \rightarrow 0$, das heißt die Stange wird zur Strecke der Länge ℓ ,

$$\begin{aligned} [\varrho \mathcal{X}_B] &\longrightarrow m\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \langle \zeta, \mu \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \zeta(t, x_{cen}(t) + sn(t)) ds dt, \quad (\text{II6.11}) \\ t \mapsto A(t) &\text{ has a limit as } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

and therefore also v in (II6.8). For the angular momentum \mathcal{J} this means

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= [(x - \xi) \wedge (v - \dot{\xi}) \varrho \mathcal{X}_B] \\ &= [(x - \xi) \wedge (v_{cen} - \dot{\xi}) \varrho \mathcal{X}_B] + [(x - \xi) \wedge (A(x - x_{cen})) \varrho \mathcal{X}_B] \quad (\text{II6.12}) \\ &\longrightarrow (x - \xi) \wedge (v_{cen} - \dot{\xi}) m\mu + (x - \xi) \wedge (A(x - x_{cen})) m\mu. \end{aligned}$$

We obtain

6.9 Theorem. If for the stick μ we define

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= \mathcal{L} + \mathcal{S}, \\ \mathcal{L} &:= (x - \xi) \wedge (v_{cen} - \dot{\xi}) m\mu, \\ \mathcal{S} &:= (x - \xi) \wedge (A(x - x_{cen})) m\mu, \end{aligned}$$

then the differential equations become

$$\begin{aligned}\partial_t(m\mu) + \operatorname{div}(vm\mu) &= 0, \\ v &= v_{cen} + A(x - x_{cen}), \\ \partial_t(vm\mu) + \operatorname{div}(v v^T m\mu) &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{f} \circ Y &= (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*)m\mu + Q\mathbf{f}^*, \\ \partial_t \mathcal{J} + \operatorname{div}(v \mathcal{J}) &= (x - \xi) \wedge (\mathbf{f}^{SP} - \ddot{\xi})m\mu,\end{aligned}$$

where $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{SP}m\mu$ and \mathbf{f}^{SP} as in 6.7.

Beweis. That $\mathcal{J} = \mathcal{L} + \mathcal{S}$ is true in the limit follows from (II6.12). Since the mass and momentum equation follows (II6.9), where \mathbf{f}^{SP} has a limit and

$$[\mathbf{f}] = \mathbf{f}^{SP}[\varrho \mathcal{X}_B] \longrightarrow \mathbf{f}^{SP}m\mu$$

and we define in the limit $\mathbf{f} := \mathbf{f}^{SP}m\mu$. In the angular momentum we obtain with the notation of the previous proof

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{J}_{kl} + \operatorname{div}(v \mathcal{J}_{kl}) + [(x - \xi)_l \varrho (\mathbf{f}^{SP} - \ddot{\xi})_k \mathcal{X}_B] \\ \longrightarrow \partial_t \mathcal{J}_{kl} + \operatorname{div}(v \mathcal{J}_{kl}) + (x - \xi)_l (\mathbf{f}^{SP} - \ddot{\xi})_k m\mu.\end{aligned}$$

Thus the result is shown. \square

Hence for the stick we have an angular momentum $\mathcal{J} = \mathcal{L} + \mathcal{S}$, where \mathcal{S} is the spin. If the observer $t \mapsto \xi(t)$ is located at the center $t \mapsto x_{cen}(t)$ of the stick this spin has a familiar structure.

6.10 Lemma. If $\xi = x_{cen}$ then for the spin \mathcal{S} in 6.9

$$\mathcal{S} = \mathbf{n} \wedge A\mathbf{n} \left(\frac{m\ell^2}{12} \boldsymbol{\mu}_{x_{cen}} + m\ell^3 \boldsymbol{\lambda}_\ell \right) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Here the measure $\boldsymbol{\mu}_{x_{cen}}$ is defined as in I.2.8 and $\boldsymbol{\lambda}_\ell$ is “bounded distribution” in ℓ as $\ell \rightarrow 0$. In detail

$$\begin{aligned}\langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_{x_{cen}} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} &:= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, x_{cen}(t)) dt, \\ \langle \zeta, \boldsymbol{\lambda}_\ell \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} &:= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\ell^4} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (\zeta(t, x_{cen}(t) + s\mathbf{n}(t)) - \zeta(t, x_{cen}(t))) s^2 ds dt.\end{aligned}$$

Beweis that $\boldsymbol{\lambda}_\ell$ is bounded. For real values test functions $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, if $\operatorname{supp} \zeta \subset [-R, R] \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}& \left| \langle \zeta, \boldsymbol{\lambda}_\ell \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\ell^4} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} |\zeta(t, x_{cen}(t) + s\mathbf{n}(t)) - \zeta(t, x_{cen}(t))| s^2 ds dt \\ & \leq \|D\zeta\|_{C^0} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{\ell^4} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} |s|^3 ds dt \leq \frac{R}{16} \|D\zeta\|_{C^0},\end{aligned}$$

which says that λ_ℓ are locally bounded distributions in ℓ . \square

Beweis. For every test function ζ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^{3 \times 3})$, with $\zeta(t, x)$ being antisymmetric for all (t, x) ,

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \mathcal{S} \rangle &= \langle \zeta, (x - \xi) \wedge (A(x - x_{cen})) m\mu \rangle \\ &= \langle \zeta, (x - x_{cen}) \wedge (A(x - x_{cen})) m\mu \rangle \quad (x - x_{cen} = sn) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} m\zeta(t, x_{cen}(t) + sn(t)) \bullet (n(t) \wedge A(t)n(t)) s^2 ds dt, \end{aligned}$$

and by writing

$$\tilde{\zeta}(t, x) := \zeta(t, x) \bullet (n(t) \wedge A(t)n(t))$$

this is

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} m\tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t) + sn(t)) s^2 ds dt. \quad (\text{II6.13})$$

We split this into two expressions by writing

$$\begin{aligned} &\tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t) + sn(t)) \\ &= \tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t)) + (\tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t) + sn(t)) - \tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t))) \end{aligned}$$

The first term in (II6.13) gives the integral

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} m\tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t)) s^2 ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t)) \underbrace{\left(\frac{m}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} s^2 ds \right)}_{= \frac{m\ell^2}{12}} dt = \left\langle \tilde{\zeta}, \frac{m\ell^2}{12} \mu_{x_{cen}} \right\rangle. \end{aligned}$$

The second term in (II6.13) gives the integral

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} m(\tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t) + sn(t)) - \tilde{\zeta}(t, x_{cen}(t))) s^2 ds dt = \left\langle \tilde{\zeta}, m\ell^3 \lambda_\ell \right\rangle.$$

This is the result. \square

7 Aufgaben

7.1 Gruppeneigenschaft. Zeige: Eine Menge \mathcal{G} von Matrizen hat die Gruppeneigenschaft bzgl. der Matrixmultiplikation genau dann, wenn die zugehörige Menge der Transformationen \mathcal{T} (wie in 1.1) die Gruppeneigenschaft bzgl. der Hintereinanderschaltung hat.

7.2 Antisymmetrie. Sei Q eine zeitabhängige orthogonale Transformation, also $Q Q^T = \text{Id}$. Zeige, dass dann $\dot{Q} Q^T$ antisymmetrisch ist.

Lorentz Transformationen

7.3 Lorentz Transformation. Zeige, dass die Lorentz Transformation $\mathbf{L}_c(V, Q)$ die Determinante 1 hat.

Lösung. Bezüglich der orthonormalen Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V}{|V|} \end{bmatrix}$$

hat die Lorentz Transformation nach (II2.4) die Matrix

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma|V| \\ \frac{1}{|V|} \cdot \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) & \gamma \end{bmatrix},$$

deren Determinante gleich 1 ist. Auf dem zu den beiden Vektoren senkrechten Raum ist die Transformation die Identität (siehe (II2.4)). □

7.4 Einstein's Additionstheorem. In 2.2(3) zeige $Q^T V$ in die Richtung von $\pm v^*$. Dann gilt mit $\bar{v} := Qv^*$

$$v = \frac{V + \bar{v}}{1 + \frac{1}{c^2} V \bullet \bar{v}}.$$

Lösung. Es ist $\mathbf{B}_c(V)Qv^* = Qv^* + (\gamma - 1)\hat{V} \bullet Qv^* \hat{V} = \gamma Qv^*$, wobei $\hat{V} = \frac{V}{|V|}$. □

Objektivität von Differentialgleichungen

7.5 Übung. In the momentum equation of (II3.16) the term $\rho^{\circ} \mathbf{f}$ is an objective vector.

Lösung. The second equation of (II3.16) is $\rho^{\circ} \mathbf{f} = -\text{div}\Pi$. Here \mathbf{f} is a classical force with the rule (II3.18)

$$\mathbf{f} \circ Y = \rho^* (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^*.$$

And $v \circ Y = \dot{X} + Qv^*$ implies, see the computation below,

$$\dot{v} \circ Y = (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\dot{v}^*, \tag{II7.1}$$

so that

$$(\rho^{\circ} \mathbf{f}) \circ Y = Q(\rho^* \dot{v}^* - \mathbf{f}^*),$$

a transformation rule like $\text{div}\Pi$ has. To derive (II7.1) we note that

$$\dot{v} = (\partial_t + v \bullet \nabla_x)v = \partial_t v + (D_x v)v.$$

Taking the derivatives of the transformation rule for $v \circ Y$ (see above) gives

$$\begin{aligned} (\partial_t v) \circ Y + ((D_x v) \circ Y)\dot{X} &= \partial_{t^*}(v \circ Y) \\ &= \dot{X} + \dot{Q}v^* + Q\partial_{t^*}v^*. \end{aligned}$$

Since $\dot{X} = v \circ Y - Qv^*$ (see above) we obtain

$$\begin{aligned}\ddot{X} + \dot{Q}v^* + Q\partial_{t^*}v^* &= (\partial_t v) \circ Y + ((D_x v) \circ Y)(v \circ Y - Qv^*) \\ &= (\partial_t v + v \bullet \nabla_x v) \circ Y - ((D_x v) \circ Y)Qv^* \\ &= \overset{\circ}{v} \circ Y - (\dot{Q} + QD_{x^*}v^*)v^*,\end{aligned}$$

since $((D_x v) \circ Y)Q = \dot{Q} + QD_{x^*}v^*$ (see the derivation of (II4.12) in 4.11), therefore

$$\overset{\circ}{v} \circ Y = \ddot{X} + 2\dot{Q}v^* + Q(\partial_{t^*} + D_{x^*}v^*)v^* = \ddot{X} + 2\dot{Q}v^* + Q\overset{\circ}{v}^*,$$

which is (II7.1). \square

Objektivität von Funktionen

7.6 Konstitutive Beziehung. Sei u ein objektiver Skalar sowie a und b objektive Vektoren. Zeige:

(1) Die Beziehung $u = \hat{u}(a, b)$ ist objektiv, d.h. \hat{u} ist dieselbe Funktion für verschiedene Beobachter, falls

$$\hat{u}(Qa, Qb) = \hat{u}(a, b)$$

für alle Werte von a und b und alle orthogonalen Matrizen Q mit positiver Determinante.

(2) Dies ist erfüllt, falls es eine Funktion \tilde{u} gibt mit

$$\hat{u}(a, b) = \tilde{u}(a \bullet b).$$

7.7 Objektive Gleichung und Ungleichung. Es seien a und b objektive Vektoren. Dann ist

$$a \bullet b \geq 0$$

eine objektive Ungleichung. Ebenso die Gleichung

$$a \bullet b = 1.$$

Lösung. Ist $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ eine Newton'sche Beobachtertransformation, so gilt $a \circ Y = Qa^*$ und $b \circ Y = Qb^*$, also

$$a \bullet b = (Qa^*) \bullet (Qb^*) = a^* \bullet b^*.$$

Also ist $u := a \bullet b$ ein objektiver Skalar, somit $u \geq 0$ dieselbe Ungleichung für alle Beobachter und $u = 1$ dieselbe Gleichung für alle Beobachter. \square

7.8 Substantielle Ableitung. Ist v eine Geschwindigkeit und g ein objektiver Skalar, so ist auch

$$\overset{\circ}{g} := \partial_t g + v \bullet \nabla g$$

ein objektiver Skalar.

7.9 Transformationsformel. Es sei w ein objektiver Vektor und $\overset{\circ}{w}$ definiert wie in 7.8 mit einer Geschwindigkeit v . Zeige: Dann gilt die Transformationsformel

$$\overset{\circ}{w} \circ Y = \dot{Q}w^* + Q\overset{\circ}{w}^*$$

Beachte: $\overset{\circ}{w}$ benötigt v zu Definition, während w^* mit v^* definiert ist.

Lösung. Es gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\partial_{t^*}(w \circ Y) &= (\partial_t w) \circ Y + \sum_i \dot{X}_i (\partial_{x_i} w) \circ Y, \\ \partial_{x_j^*}(w \circ Y) &= \sum_i Q_{ij} (\partial_{x_i} w) \circ Y.\end{aligned}$$

Wegen $w \circ Y = Qw^*$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_{x_j^*}(w \circ Y) &= Q \partial_{x_j^*} w^*, \\ \partial_{t^*}(w \circ Y) &= \dot{Q} w^* + Q \partial_{t^*} w^*,\end{aligned}$$

also wegen $v \circ Y = \dot{X} + Qv^*$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{w} \circ Y &= (\partial_t w + v \bullet \nabla w) \circ Y = (\partial_t w) \circ Y + v \circ Y \bullet (\nabla w) \circ Y \\ &= (\partial_t w) \circ Y + \sum_i (\dot{X}_i + \sum_j Q_{ij} v_j^*) (\partial_{x_i} w) \circ Y \\ &= \partial_{t^*}(w \circ Y) + \sum_j v_j^* \partial_{x_j^*}(w \circ Y) \\ &= \dot{Q} w^* + Q \partial_{t^*} w^* + \sum_j v_j^* Q \partial_{x_j^*} w^* = \dot{Q} w^* + Q \overset{\circ}{w}^*.\end{aligned}$$

□

7.10 Objektiver Vektor. Seien J und q objektive Vektoren mit der konstitutiven Gleichung für beliebige q

$$J = \hat{J}(q).$$

Zeige: Ist \hat{J} objektiv, so folgt

$$\hat{J}(Qq) = Q \hat{J}(q)$$

für alle $q \in \mathbb{R}^n$ und alle orthogonalen Transformationen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Determinante 1.

Lösung. Ist Y die Beobachtertransformation, so gilt

$$J \circ Y = QJ^*, \quad q \circ Y = Qq^*.$$

Da \hat{J} objektiv ist, gilt für beide Beobachter

$$J^*(t^*, x^*) = \hat{J}(q^*(t^*, x^*)), \quad J(t, x) = \hat{J}(q(t, x)),$$

und somit

$$\begin{aligned}Q \hat{J}(q^*) &= QJ^* = J \circ Y \quad (\text{since } J \text{ is an objective vector}) \\ &= \hat{J}(q \circ Y) = \hat{J}(Qq^*) \quad (\text{since } q \text{ is an objective vector}).\end{aligned}$$

Also folgt $\hat{J}(Qq^*) = Q \hat{J}(q^*)$, wobei $q^*(t^*, x^*)$ ein beliebiger Vektor in \mathbb{R}^n ist. □

7.11 Objektiver Tensor. Sei $n \geq 3$ and Π ein objektiver Tensor, der nur von objektiven Skalaren abhängt. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{R}$, so dass

$$\Pi = p \text{Id},$$

und p hängt von jenen objektiven Skalaren ab.

7.12 Objektiver Tensor. Sei S ein objektiver Tensor, q ein objektiver Vektor. Zeige: Die Gleichung

$$S = \hat{S}(q) \text{ mit } \hat{S}(\tilde{q}) := \tilde{q} \tilde{q}^T \text{ für alle } \tilde{q} \in \mathbb{R}^n$$

definiert eine objektive Funktion \hat{S} , d.h. sie ist dieselbe Funktion für alle Beobachter.

7.13 Objektiver Tensor. Sei S ein Tensor. Es gelte, dass Sn für jeden objektiven Vektor n einen objektiven Vektor ergibt. Zeige, dass dann S ein objektiver Tensor ist. *Hinweis: n kann jeden Vektor annehmen.*

7.14 Darstellung bzgl. einer Basis. Es seien $D = (d_{ij})_{ij}$ und $E = (e_{ij})_{ij}$ Matrizen mit

$$d_{ij} = \sum_k \lambda_k e_{ki} e_{kj}, \quad e_k = (e_{ki})_i,$$

wobei $\lambda_k \in \mathbb{R}$ Zahlen seien. Zeige:

(1) Es gilt

$$D = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k e_k^T = E \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} E^T.$$

(2) Sind λ_k objektive Skalare und e_k objektive Vektoren, also $\lambda_k \circ Y = \lambda_k^*$ und $e_k \circ Y = Q e_k^*$, so gelten die Transformationsformeln

$$E \circ Y = Q E^*, \quad D \circ Y = Q D^* Q^T.$$

7.15 Entropie. Es sei η ein objektiver Skalar und es seien (ϱ, v, e) Größen, die sich wie die Dichte, die Geschwindigkeit und die Energie verhalten. Es gelte mit einer objektiven Funktion $\hat{\eta}$

$$\eta = \hat{\eta}(\varrho, v, e)$$

Dann folgt mit einer neuen konstitutiven Funktion $\tilde{\eta}$

$$\eta = \tilde{\eta}(\varrho, \varepsilon), \quad \varepsilon := e - \frac{\varrho}{2} |v|^2.$$

Bemerkung: Es ist also $\hat{\eta}(\varrho, v, e) = \tilde{\eta}(\varrho, e - \frac{\varrho}{2} |v|^2)$.

7.16 Deformationsgradient. Sei η eine objektiver Skalar und F transformiere bei Beobachterwechsel wie der Deformationsgradient, d.h.

$$F \circ Y = Q F^* \text{ für alle orthonormalen } Q \text{ mit Determinante } 1.$$

Es sei

$$\eta = \hat{\eta}(F)$$

mit einer objektiven Funktion $\hat{\eta}$. Zeige dann:

(1) Es ist $\eta'_{,F} F^T$ symmetrisch.

(2) Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\eta = \tilde{\eta}(F^T F)$ mit einer Funktion $\tilde{\eta}$.

Beachte: Es ist $\eta'_{,F} F^T = (\sum_k \eta'_{,F_{ik}} F_{jk})_{ij}$.

III Energie und Entropie

Entropieprinzip im Wandel der Zeit

Als wesentlicher Beitrag zur Kontinuumsphysik wird das Entropieprinzip gesehen, wir geben hier einen kurzen historischen Überblick. Der Beginn der Thermodynamik wird in dem Paper [99] von Sadi Carnot 1824 gesehen, das Émile Clapeyron 1834 in [102] und Rudolf Clausius 1850 in [103] (siehe die Beiträge in [100]) aufgegriffen haben, ebenso William Thomson (Lord Kelvin) in seinem Paper 1848 [121].

Das Entropieprinzip wurde also im 19. Jahrhundert von Rudolf Clausius formuliert und die Anwendung war bei der Entwicklung und Optimierung von Maschinen¹, d.h. bei der Übertragung von Wärme auf Bewegung, siehe die Maschinen in [<http://www.animatedengines.com>]. Die Wärme wurde in Kohleöfen produziert und später durch flüssige fossile Brennstoffe teilweise ersetzt. Diese Grundlagen der Thermodynamik werden auch heute in einer axiomatischen Weise formuliert und als “Hauptsätze der Thermodynamik” den Studenten vermittelt. Hier ein Beispiel:

[MIT, Lecture on Thermodynamics (Spakovszky, Fall 2008)]:

Zeroth Law. There exists for every thermodynamic system in equilibrium a property called temperature. Equality of temperature is a necessary and sufficient condition for thermal equilibrium.

First Law. There exists for every thermodynamic system a property called the energy. The change of energy of a system is equal to the mechanical work done on the system in an adiabatic process. In a non-adiabatic process, the change in energy is equal to the heat added to the system minus the mechanical work done by the system.

Second Law. There exists for every thermodynamic system in equilibrium an extensive scalar property called the entropy, S , such that in an infinitesimal reversible change of state of the system, $dS = dQ/T$, where T is the absolute temperature and dQ is the amount of heat received by the system. The entropy of a thermally insulated system cannot decrease and is constant if and only if all processes are reversible.

¹ nach Jahrhunderten mit Windkraft (Mühlen) und Wasserkraft (durch Ausnutzung der Höhendifferenz mittels Schaufelrädern)

Es ist wichtig, die historische Einordnung der vorkommenden Begriffe zu verstehen, da nur so die Leistung des Prinzips verständlich ist.

Referenzen: Zur Historie siehe I.Müller [11, Grundzüge der Thermodynamik] und Hutter [8, Fluid- und Thermodynamik], insbesondere der Abschnitt [8, 6.1 Grundsätzliches sowie geschichtliche Bemerkungen]. See also [Wikipedia: Second Law of Thermodynamics] oder als ältere Version [133]. Für interessierte Leser geben wir noch an Truesdell [96].

Das “Nullte Gesetz der Thermodynamik” besagt, dass es überhaupt eine Temperatur gibt, die für das physikalische Verhalten des Systems von Bedeutung ist, und dass diese mit der Energie und Entropie in Zusammenhang steht. Die Entropie aus heutiger Sicht wird in Abschnitt 1 und die Energie in Abschnitt 2 behandelt. Man sollte aber nicht vergessen, dass dies damit verbunden ist, dass die Temperatur eine physikalische Meßgröße ist, d.h. es gibt “Thermometer”, siehe dazu 6.1 und 6.2. Diese Temperatur ist die historische Grundlage für das Entropieprinzip.

Das “Erste Gesetz der Thermodynamik” postuliert, dass wir das System von Erhaltungssätzen, gemeint ist hier die Massen- und Impulsbilanz, durch eine Erhaltungsgleichung für die totale Energie

$$\partial_t e + \operatorname{div} \tilde{q} = \tilde{g}$$

abschließen, wobei wir hier meistens nur den Fall von glatten Funktionen diskutieren. Es ist, was die Energie des Systems betrifft, e die **Energiedichte**, also die “totale Energie(dichte)” oder die “gesamte Energie(dichte)”, das Vektorfeld \tilde{q} der zugehörige **Energiefluss** und \tilde{g} die **Energieproduktion**. Diese Größen sind Funktionen von (t, x) und werden in Abschnitt 2 studiert. Der Energiefluss \tilde{q} enthält die Wärme, die dem System zugefügt wird, also den Wärmefluss. Die Energie(dichte) e enthält die kinetische Energie, die wir schon in II.3.13 studiert hatten.

Das “Zweite Gesetz der Thermodynamik” postuliert die Existenz einer Größe **Entropie**. Die Eigenschaft, dass “the entropy of a thermally insulated system cannot decrease”, ist in obigem Text nicht quantifiziert, deswegen entnehmen wir deren weitere Eigenschaften dem Buch von De Groot & Mazur [6, Chapter III] (see also Prigogine & Defay [91, Chapter III]):

[De Groot & Mazur (1962), Chapter III page 20]:

“According to the principles of thermodynamics one can introduce for any macroscopic system a state function S , the entropy of the system, which has the following properties.”

“The variation of the entropy dS may be written as the sum of two terms”

- (1) $dS = d_e S + d_i S$,
- (2) $d_i S \geq 0$ (“The Second Law of Thermodynamics”),
- (4) $d_e S = \frac{dQ}{T}$ (“Theorem of Carnot-Clausius”),

(III.0.1)

“where $d_e S$ is the entropy supplied to the system by its surroundings, and $d_i S$ the entropy produced inside the system.”

After a remark, with reference to the next pages of the book, it is said:

[De Groot & Mazur (1962), Chapter III page 21]:

“We may remark at this point that thermodynamics in the customary sense is concerned with the study of the reversible transformations for which the equality (2) holds. In thermodynamics of irreversible processes, however, one of the important objectives is to relate the quantity $d_i S$, the entropy production, to the various irreversible phenomena which may occur inside the system. Before calculating the entropy production in terms of quantities which characterize the irreversible phenomena, we shall rewrite (1) and (2) in a form which is more suitable for the description of systems in which the densities of the extensive properties (such as mass and energy ...) are continuous functions of space coordinates. Let us write”

$$(6) \quad S = \int_V \varrho s \, dL^n, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \varrho s \, dL^n,$$

$$(7) \quad \frac{d_e S}{dt} = - \int_{\partial V} J_{s,tot} \bullet \nu_V \, dH^{n-1},$$

$$(8) \quad \frac{d_i S}{dt} = \int_V \sigma \, dL^n,$$

“where s is the entropy per unit mass, $J_{s,tot}$ the total energy flow per unit area and unit time, and σ the entropy source strength or entropy production per unit volume and unit time.” (The notations of measures are changed compared with the original and one has to set $n = 3$.)

Here V is the test volume and ν_V the outer unit normal on ∂V . It is meant, that the equation

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho s \, dL^n = - \int_{\partial V} J_{s,tot} \bullet \nu \, dH^{n-1} + \int_V \sigma \, dL^n$$

holds. The text continues as follows:

[De Groot & Mazur (1962), Chapter III page 22]:

“With (6), (7) and (8), formula (1) may be rewritten, using also Gauss’ theorem, in the form”

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\varrho s) + \operatorname{div} J_{s,tot} - \sigma \right) dL^n = 0.$$

“From this relation it follows, since (1) and (2) must hold for an arbitrary volume V , that”

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div} J_{s,tot} = \sigma,$$

$$(11) \quad \sigma \geq 0.$$

“These two formulae are the local forms of (1) and (2), i.e. the local mathematical expression for the second law of thermodynamics.”

Soweit der geschichtliche Überblick. Die Kenntnis des Entropieprinzips hat sich also im Laufe der Entwicklung sehr verfeinert. Deshalb geht man heutzutage davon aus, dass das “Zweite Gesetz der Thermodynamik” in dieser lokalen Version erfüllt ist, das heißt es gilt

$$\partial_t \eta + \operatorname{div} \psi = \sigma \geq 0, \quad (\text{III0.2})$$

wobei wir also η setzen für die **Entropie** (in obiger Schreibweise ist $\eta = \rho s$ und s bezeichnet die “spezifische Entropie”, d.h. die Entropie pro Masseneinheit) und ψ für den **Entropiefluss** (in obiger Notation $J_{s,tot}$). Die **Entropieproduktion** ist nach wie vor σ , also wie bei DeGroot & Mazur. Somit ist klar, wie sich das Entropieprinzip in einer Differentialungleichung manifestiert. An dieser Stelle ist es wichtig zu sagen, dass es für das Weitere wesentlich ist, dass die Größen Entropie und Entropiefluss in ihrer speziellen Gestalt nicht von vorneherein gegeben sind, so wie es noch bei dem Theorem von Carnot-Clausius (siehe dazu (III0.1)) der Fall ist, es ist vielmehr so, dass diese Größen sich aus dem Zusammenhang erschließen. Sie ergeben sich also aus der speziellen physikalischen Situation, also insbesondere aus den konstitutiven Gleichungen, die also noch postuliert werden.

Mathematisch äquivalente Versionen des Entropieprinzips

Wir führen noch den umgekehrten Schluss aus, der also zeigt, dass das klassische Entropieprinzip mit Testvolumen äquivalent zu (III0.2) ist. Wenn $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Testvolumen ist, so definiere bezüglich V

$$S(t) := \int_V \eta(t, x) \, dL^3(x).$$

Dann folgt unter Benutzung von (III0.2), da V ein festes Gebiet ist, für das der Gauß'sche Satz gilt,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(t) &= \int_V \partial_t \eta(t, x) \, dL^3(x) = \int_V (-\operatorname{div} \psi(t, x) + \sigma(t, x)) \, dL^3(x) \\ &= - \int_{\partial V} \psi(t, x) \bullet \nu_V(x) \, dH^2(x) + \int_V \sigma(t, x) \, dL^3(x), \end{aligned}$$

also

$$\boxed{\frac{d}{dt}S(t) + \int_{\partial V} \psi(t, x) \bullet \nu_V(x) dH^2(x) = \int_V \sigma(t, x) dL^3(x) \geq 0,} \quad (\text{III0.3})$$

oder, für mathematisches Interesse,

$$\frac{d}{dt}(-S(t)) + \int_V \underbrace{\sigma(t, x)}_{\geq 0} dL^3(x) = \int_{\partial V} \psi(t, x) \bullet \nu_V(x) dH^2(x).$$

Da dies für alle V gilt, ist diese Aussage äquivalent zu (III0.2). Also ist die Zeitableitung der Entropie in V plus dem, was über den Rand von V hinausfließt (bzw. minus dem, was hereinfließt), positiv (nichtnegativ).

Referenzen: Das Entropieprinzip findet sich, hier als Beispiel, in DeGroot & Mazur [6, Chapter III Entropy law and entropy balance], in I.Müller [87, 5 Entropy principles], und in Wilmanski [15, 6 Entropy principle]. Weiter sei die neuere Literatur Hutter & Wang [9, 17 Thermodynamics-Fundamentals, 18 Thermodynamics-Field Formulation] empfohlen. Wegen der weiten Verbreitung sei auch auf die historischen Anmerkungen in der statistischen Physik [85, Kap. II Die thermodynamischen Größen] hingewiesen. In der mathematischen Literatur sei Feireisl [39, 1.3.3 The second law of thermodynamics] und auch Feireisl & Novotný [40, Chap. 2 Weak Solutions, A Priori Estimates] genannt.

Die Ungleichung (III0.2) ist die Entropieungleichung, die wir im Folgenden betrachten werden, und es ist diese Ungleichung, die unangefochten gilt. Sie hat immer ihre Gültigkeit, solange man gewisse Grundlagen nicht verlässt.

Die Entropie in Grenzsituationen

Jedoch kann diese Entropieungleichung, wenn man einen Limes durchführt, zu einer Gestalt führen, die von (III0.2) abweicht. Das kann ganz verschiedene Gründe haben:

- Wenn der Limes eine Distribution ist kann man im einfachsten Fall davon ausgehen, dass (III0.2) dieselbe Form $\partial_t H + \text{div}_x \Psi \geq 0$, aber in dem Raum $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ (siehe Abschnitt 6), annimmt, nur dass H und Ψ Distributionen sind, was z.B. Terme auf Flächen oder Linien usw. enthält.
- Wenn man eine dünne Schicht gegen eine Fläche konvergieren lässt, kann sich das Entropieprinzip (III0.2) aufsplitten. Es kann sich zum Beispiel eine eigene Entropieungleichung auf der Fläche formen, und diese ist von den Entropieungleichungen in der Umgebung abgekoppelt. Dies ist z.B. in Alt & Witterstein [20] bei der Phasenfeldbehandlung der Fall, wobei der isotherme Fall behandelt wird.

- Bei der Wärmestrahlung tritt der Effekt auf, dass es das Entropieprinzip mit einer zusätzlichen Entropieproduktion geben muss, siehe z.B. in Greve [5, 6 Entropieprinzip, S.222] oder auch Hutter & Jöhnk [47, 2.3.5 Entropy Balance]. Dies lässt sich mit der Entropiegleichung (III0.2) für den allgemeinen relativistischen Fall erklären, wobei der nichtrelativistische Limes $c \rightarrow \infty$ durchgeführt werden muss.

Dies sind nur drei wichtige Gründe.

1 Entropiegleichung

Was ist Entropie? Die Entropie η ist eine Größe, die sich für zwei Beobachter, die durch eine Koordinatentransformation $(t, x) = Y(t^*, x^*)$ definiert sind, mit $\eta \circ Y = \eta^*$ transformiert. Die Entropie ist also ein objektiver Skalar. Darüberhinaus gilt für sie das

1.1 Entropieprinzip. Ist \mathcal{P} eine Klasse von physikalischen Prozessen, so sagt das Entropieprinzip, dass für jeden Prozess in \mathcal{P} Größen η , die **Entropie**, und ψ , den **Entropiefluss**, existieren, so dass gilt

$$\sigma := \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \geq 0 \quad (\text{III.1.1})$$

in dem Gebiet $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, in dem der Prozess definiert ist. Hier ist σ die **Entropieproduktion**.² Von der Differentialgleichung $\partial_t \eta + \operatorname{div} \psi = \sigma$ verlangen wir, dass sie eine skalare Gleichung ist. Diese Gleichung heißt auch Entropiegleichung oder Entropieidentität. Siehe auch Abb. 1. **Wichtig:** Die Entropie im Ganzen, also (η, ψ) , hängt natürlich von dem Prozess \mathcal{P} ab, wie, das sei hier offen, das muss das entsprechende System, was \mathcal{P} definiert, zeigen.

1.3.1.1 Entropy principle The entropy principle reflects the experience that thermodynamic processes are dissipative and irreversible. In later chapters it will be shown how this experience leads to the concept of entropy and to the entropy inequality. Here, the entropy principle is stated in four parts in an axiomatic manner:

- (a) there exists an additive objective scalar quantity, the entropy;
- (b) the specific entropy and the entropy flux are given by constitutive equations;
- (c) the entropy production is non-negative for all thermodynamic processes;
- (d) the temperature is continuous across an ideal wall.

Abb. 1: Aus I.Müller [87, Sec. 1.3], according '(d)' see 6.1

Die Eigenschaft, dass die Entropieidentität eine skalare Gleichung ist, ist durch die Entropiegleichung $\sigma \geq 0$ motiviert, denn diese Ungleichung muss für alle Beobachter gelten (siehe die folgende Aussage und II.4.4).

1.2 Eigenschaft. Nach II.3.1 ist (III.1.1) eine skalare Gleichung, falls

$$\begin{aligned} \eta \circ Y &= \eta^* , \\ \psi \circ Y &= \eta^* \dot{X} + Q\psi^* , \\ \sigma \circ Y &= \sigma^* , \end{aligned}$$

² Die Notation σ stammt aus dem Buch von DeGroot & Mazur [6]. Sie kollidiert hier nicht mit der Notation S für den Stresstensor.

wobei Y die Beobachtertransformation ist. Das heißt insbesondere, dass η ein objektiver Skalar ist. Da auch σ ein objektiver Skalar ist, ist die Ungleichung $\sigma \geq 0$ objektiv.

Bemerkung: Dass die Entropie mathematisch nichttrivial (z.B. nicht null) ist, ist in der Definition nicht gesagt, es gilt aber, dass die gemeinte Entropie die physikalische Entropie mit all ihren physikalischen Eigenschaften ist. Was diese Eigenschaften sind und was sie bedeuten wird Inhalt der folgenden Abschnitte sein.

Die Entropiegleichung ist also objektiv, wenn sich in ihrer schwachen Version

$$\int_{\mathcal{U}} (\partial_t \zeta \eta + \nabla \zeta \bullet \psi + \zeta \sigma) \, dL^{n+1} = 0 \text{ für } \zeta \in C_0^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \quad (\text{III.1.2})$$

die Testfunktionen ζ mit $\zeta \circ Y = \zeta^*$ transformieren, wobei Y die Beobachtertransformation ist, siehe auch Abschnitt 6. Die Entropiegleichung heißt dann

$$\int_{\mathcal{U}} \zeta \sigma \, dL^{n+1} \geq 0 \text{ für } \zeta \in C_0^\infty(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \text{ mit } \zeta \geq 0. \quad (\text{III.1.3})$$

Dies sagt, dass das Gleichungssystem und die konstitutiven Gesetze irgendwie sein können, nur dass am Ende die Entropiegleichung als skalare Differentialungleichung existieren muss. Auf der anderen Seite ist natürlich klar, dass eine Entropiegleichung für die Klasse \mathcal{P} nur erfüllt ist, wenn das Gleichungssystem und die konstitutiven Gesetze, welche \mathcal{P} charakterisieren, beim Beweis der Entropiegleichung benutzt werden. (Auch aus diesem Grund ist eine mathematisch genaue Definition schwierig.)

Entropieprinzip in der Gastheorie

Es ist die Aufgabe, in konkreten Beispielen die Entropieproduktion σ zu berechnen und deren Positivität in Voraussetzungen an die konstitutiven Gleichungen umzumünzen. Das heißt, dass für konkrete Materialien die konstitutiven Beziehungen so gewählt werden müssen, dass das Entropieprinzip gilt, wobei seinerseits die Entropiegleichung $\sigma \geq 0$ die spezielle Kenntnis der Entropie bzw. des Entropieflusses verlangt. Die Entropie geht also in die konstitutiven Funktionen ein, und gehört somit zur Beschreibung eines konkreten Materials. Wir tun dies hier als Beispiel an einem Spezialfall, wenn auch an einem äußerst wichtigen.

1.3 Beispiel aus der Gastheorie. Die Menge der physikalischen Prozesse \mathcal{P} sei bestimmt durch Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) &= -p \operatorname{div} v + g, \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

wobei ϱ , ε , p und g objektive Skalare seien, sowie v eine Geschwindigkeit und q ein objektiver Vektor sei. Weiter möge für Prozesse in \mathcal{P} das Entropieprinzip

$$\sigma = \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \geq 0$$

gelten, wobei die konstitutiven Bedingungen noch genannt werden.

Behauptung: Dieses Prinzip ist für \mathcal{P} erfüllt, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \eta &= \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon), \quad p = \widehat{p}(\varrho, \varepsilon), \\ \eta &= \varrho \eta'_{\varrho} + (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} \quad (\text{Gibbs Relation}), \\ \psi &= \eta v + \eta'_{\varepsilon} q \quad (\text{Clausius-Duhem Fluss}), \\ \sigma &= \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q + \eta'_{\varepsilon} g \geq 0 \quad (\text{Residualungleichung}). \end{aligned}$$

Die Darstellung von (η, ψ) hat die allgemein verlangte objektive Eigenschaft (siehe 1.2). *Zum Gas:* Die Differentialgleichungen (III.1.4) sind die Massenerhaltung und die Gleichung für die innere Energie. Dies gilt für ein ideales Gas, d.h. für Flüssigkeiten ohne Viskosität (siehe II.3.13 und 2.3), wobei das Energieprinzip sagt, dass $g = 0$ gesetzt wird.

b

Beweis. Es folgt, wenn $\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ und $\psi = \eta v + \psi_0$ ist,

$$\begin{aligned} \sigma &= \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi = \partial_t \eta + v \bullet \nabla \eta + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 \\ &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0, \end{aligned}$$

wenn $\overset{\circ}{h} := (\partial_t + v \bullet \nabla) h$ ³ für jede Funktion h ist. Da $\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ folgt

$$\overset{\circ}{\eta} = \eta'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon}.$$

Nun folgt aus den Differentialgleichungen für ϱ und ε

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varrho} + \varrho \operatorname{div} v &= 0, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + (\varepsilon + p) \operatorname{div} v + \operatorname{div} q &= g, \end{aligned}$$

also erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 = \eta'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 \\ &= (\eta - \eta'_{\varrho} \varrho - \eta'_{\varepsilon} (\varepsilon + p)) \operatorname{div} v + \eta'_{\varepsilon} g - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q + \operatorname{div} \psi_0 \\ &= (\eta - \eta'_{\varrho} \varrho - \eta'_{\varepsilon} (\varepsilon + p)) \operatorname{div} v + \eta'_{\varepsilon} g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q + \operatorname{div} (\psi_0 - \eta'_{\varepsilon} q). \end{aligned}$$

Die Wahl von ψ lässt den letzten Term verschwinden, und der erste $\operatorname{div} v$ -Term verschwindet, wenn der Druck p gemäß der Gibbs-Relation gewählt wird. Daraus folgt die Behauptung. \square

³ Wir bevorzugen $\overset{\circ}{h} := \partial_{(1,v)} h = \partial_t h + v \bullet \nabla h$ als Abkürzung. Siehe auch die Fußnote zur Notation in II.3.8.

Konsequenzen aus dem Entropieprinzip

Wann ist also das Entropieprinzip im konkreten Fall erfüllt? Dann, wenn der Druck p durch die Gibbs-Relation gegeben ist und wenn für den Wärmefluss q der zweite Hauptsatz gilt. Also sind die beiden Größen durch konstitutive Gleichungen an die neue Funktion η gebunden. Zusätzlich ist $g = 0$, das heißt die Energieerhaltung ist erfüllt. Wir setzen $\eta'_{\varepsilon} \neq 0$ voraus. Dann heißt dies, dass der Druck p durch

$$p = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}}(\eta - \varrho\eta'_{\varrho} - \varepsilon\eta'_{\varepsilon}) \quad (\text{III.1.5})$$

gegeben ist (in Aufgabe 7.1 wird η durch (p, ε) ausgedrückt). Der Wärmefluss q ist, zum Beispiel, durch das Fourier'sche Gesetz gegeben

$$q = \hat{q}(\varrho, \varepsilon, \nabla\eta'_{\varepsilon}) = \hat{c}(\varrho, \varepsilon, |\nabla\eta'_{\varepsilon}|)\nabla\eta'_{\varepsilon} \quad (\text{III.1.6})$$

mit einem Skalar $c = \hat{c}(\varrho, \varepsilon, |\nabla\eta'_{\varepsilon}|) \geq 0$,

was von Joseph Fourier im frühen 19. Jahrhundert aufgestellt wurde, siehe [[Wikipedia: Joseph Fourier](#)] und [106] (es sei auch auf (III.1.12) verwiesen, wo das Fourier'sche Gesetz mit der Temperatur geschrieben ist). Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, so gilt das Entropieprinzip, denn

$$\sigma = \nabla\eta'_{\varepsilon} \bullet q = c|\nabla\eta'_{\varepsilon}|^2 \geq 0.$$

Das Entropieprinzip gilt auch, wenn ein nicht isotropes Material betrachtet wird, zum Beispiel wenn $q = M\nabla\eta'_{\varepsilon}$ mit einer positiv semidefiniten Matrix M , d.h.

$$\sigma = \nabla\eta'_{\varepsilon} \bullet q = \nabla\eta'_{\varepsilon} \bullet M\nabla\eta'_{\varepsilon} \geq 0.$$

Dabei ist q nach wie vor ein objektiver Vektor, wenn M eine objektive Matrix ist (siehe II.4.9).

Es ist also eine Gleichung und eine Ungleichung, die das Entropieprinzip ausmacht. Beide Bedingungen sind gekoppelt durch die Entropiefunktion η . Die Ungleichung ist $\sigma = \nabla\eta'_{\varepsilon} \bullet q \geq 0$, die wir Residualungleichung nennen. Es gibt auch Sätze, die bei gewissen konstitutiven Funktionen für ψ sagen, wie Π und q auszusehen haben, wenn die Entropieungleichung erfüllt ist. Solche hinreichenden Bedingungen finden sich zum Beispiel in [112] und [19, Section 15].

Empirische Temperatur

Die gemessene Temperatur (siehe z.B. Abb. 3 and 6.1) war historisch weit vor der theoretisch fundierten Temperatur in Gebrauch. Im 19. Jahrhundert

hat William Thomson (Lord Kelvin) den Zusammenhang mit der absoluten Temperatur hergestellt. Heutzutage wird die zu messende Temperatur mit der theoretischen Temperatur, siehe die Gleichung (III.1.7) bzw. 1.6, identifiziert. Mit dem Zusammenhang von empirischer Temperatur und theoretischer Temperatur haben sich Physiker allgemein auseinandergesetzt, wobei besonders zu empfehlen sei Hutter & Wang [9, 17.2.5 Empirical Temperature, Gas Temperature and Temperature Scales]. Weiter siehe auch I.Müller [87, 1.3.2.4 Determination of Λ^ε], sowie Truesdell [96, 11H. Critique: Empirical and Absolute Temperatures],

Temperatur θ und innere Energie ε als Differentialformen

Wir stellen nun den Zusammenhang mit der etwas älteren Literatur her, in der das Entropieprinzip auf Differentialformen basierte. Dies hat nur eine beschränkte Gültigkeit, da es das Entropieprinzip nur in speziellen Situationen beschreibt, so wie oben in 1.3 bei der Beschreibung von Gasen. Wir lösen uns jetzt von den idealen Gasen und behandeln nur die Gibbs Relation.

1.4 Gibbs Relation. Es seien $p = \hat{p}(\varrho, \varepsilon)$ und $\eta = \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ mit $\eta'_{\varepsilon} > 0$. Definiere dazu

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}} \quad \text{die absolute Temperatur,} \\ f &= \varepsilon - \theta\eta \quad \text{die Helmholtz-Energie} \\ &\quad \text{(innere freie Energie).} \end{aligned} \tag{III.1.7}$$

Wenn wir weiter mit oberem Index “sp” die zugehörigen spezifischen Größen in einem Gebiet, in dem $\varrho > 0$ ist, bezeichnen,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{sp}} &:= \frac{\varepsilon}{\varrho}, & p^{\text{sp}} &:= \frac{p}{\varrho}, & \eta^{\text{sp}} &:= \frac{\eta}{\varrho}, & f^{\text{sp}} &:= \frac{f}{\varrho}, \\ v^{\text{sp}} &:= \frac{1}{\varrho} \quad \text{das spezifische Volumen,} \end{aligned}$$

dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\eta = \varrho\eta'_{\varrho} + (\varepsilon + p)\eta'_{\varepsilon}$ (Gibbs Relation in 1.3).
- (2) $\eta^{\text{sp}}{}'_{\varrho} + (\varepsilon^{\text{sp}} + p^{\text{sp}})\eta^{\text{sp}}{}'_{\varepsilon} = 0$.
- (3) $\theta d\eta^{\text{sp}} = d\varepsilon^{\text{sp}} + p dv^{\text{sp}}$ (vergleiche die Einleitung zum Kapitel).
- (4) $df^{\text{sp}} = -\eta^{\text{sp}} d\theta - p dv^{\text{sp}}$.
- (5) $d(\varepsilon^{\text{sp}} + p^{\text{sp}}) = \theta d\eta^{\text{sp}} + v^{\text{sp}} dp$ ($\varepsilon^{\text{sp}} + p^{\text{sp}}$ ist die **Enthalpie**).

(6) $d(f^{\text{SP}} + p^{\text{SP}}) = -\eta^{\text{SP}} d\theta + v^{\text{SP}} dp$ ($f^{\text{SP}} + p^{\text{SP}}$ ist die **freie Enthalpie**).

Die freie Enthalpie wird auch **Gibbs-Energie** genannt.

In den Aussagen 1.4(3)–1.4(6) handelt es sich um Identitäten im Raum der Differentialformen mit (ϱ, ε) als unabhängige Variable. Hat $\eta'_{\varepsilon\varepsilon}$ ein Vorzeichen, in der Regel negativ, so können auch (ϱ, θ) als unabhängige Variablen gewählt werden (vgl. 1.5 unten). Mit $f = \hat{f}(\varrho, \theta)$ folgt dann aus 1.4(4)⁴ (siehe auch die letzte Aussage in 1.6 unten)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f^{\text{SP}} = -\eta^{\text{SP}}, \quad \frac{\partial}{\partial \varrho} f^{\text{SP}} = -p \frac{\partial}{\partial \varrho} v^{\text{SP}} = \frac{p}{\varrho^2}. \quad (\text{III.1.8})$$

oder mit f ausgedrückt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} f = -\eta, \quad \varrho^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{f}{\varrho} \right) = p.} \quad (\text{III.1.9})$$

Beweis (1) \Leftrightarrow (2). Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \eta^{\text{SP}} + (\varepsilon^{\text{SP}} + p^{\text{SP}}) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \eta^{\text{SP}} = \frac{1}{\varrho^2} \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \eta - \eta + (\varepsilon + p) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \eta \right)$$

und damit (2) äquivalent zu (1). \square

Beweis (3) \Leftrightarrow (1). Aussage (3) kann geschrieben werden als

$$d\eta^{\text{SP}} - \eta'_{\varepsilon} d\varepsilon^{\text{SP}} - \eta'_{\varepsilon} p d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0.$$

Es ist für jede Funktion $h = \hat{h}(\varrho, \varepsilon)$

$$dh = h'_{\varrho} d\varrho + h'_{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Wir sortieren nach der ϱ - und ε -Ableitung. Die ε -Ableitung ist gleich

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \eta^{\text{SP}} - \eta'_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon^{\text{SP}} = 0,$$

was allgemein richtig ist, und die ϱ -Ableitung ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varrho} \eta^{\text{SP}} - \eta'_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varepsilon^{\text{SP}} - \eta'_{\varepsilon} p \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\varrho} &= \frac{\partial}{\partial \varrho} \eta + \eta'_{\varepsilon} \frac{\varepsilon + p}{\varrho^2} \\ &= \frac{1}{\varrho^2} \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \eta - \eta + \eta'_{\varepsilon} (\varepsilon + p) \right), \end{aligned}$$

was wiederum die linke Seite von (1) ist. Daher ist (3) äquivalent zu (1). \square

⁴ Die Formel ist dieselbe für die Variablen (ϱ, ε) wie für die Variablen (ϱ, θ)

Beweis (4) ⇔ (3). Wegen $f^{\text{SP}} = \varepsilon^{\text{SP}} - \theta \eta^{\text{SP}}$ ist

$$df^{\text{SP}} = d\varepsilon^{\text{SP}} - d(\theta \eta^{\text{SP}}) = d\varepsilon^{\text{SP}} - \theta d\eta^{\text{SP}} - \eta^{\text{SP}} d\theta,$$

und daher mit der Aussage (4)

$$d\varepsilon^{\text{SP}} - \theta d\eta^{\text{SP}} = df^{\text{SP}} + \eta^{\text{SP}} d\theta = -p dv^{\text{SP}},$$

was Aussage (3) ist. □

Beweis (3) ⇔ (5). Die Aussage (5) ist

$$\theta d\eta^{\text{SP}} = d(\varepsilon^{\text{SP}} + p^{\text{SP}}) - v^{\text{SP}} dp = d\varepsilon^{\text{SP}} + d(pv^{\text{SP}}) - v^{\text{SP}} dp = d\varepsilon^{\text{SP}} + p dv^{\text{SP}},$$

was (3) ist. □

Beweis (4) ⇔ (6). Die Aussage (6) ist

$$\begin{aligned} df^{\text{SP}} &= -dp^{\text{SP}} - \eta^{\text{SP}} d\theta + v^{\text{SP}} dp \\ &= -d(v^{\text{SP}} p) - \eta^{\text{SP}} d\theta + v^{\text{SP}} dp = -\eta^{\text{SP}} d\theta - p dv^{\text{SP}}, \end{aligned}$$

was (4) ist. □

Wenn sich die Parameter ändern, ändern sich auch die Aussagen dieses Satzes, insbesondere dann, wenn die Entropie von Gradienten abhängt, siehe dazu Abschnitt IV.11. Aus diesem Grund machen wir keinen Gebrauch von Differentialformen. Die Definition der absoluten Temperatur θ in (III.1.7) benötigte nur, dass neben der Abhängigkeit von ϱ die Entropie als Funktion der inneren Energie gegeben ist, wobei $\eta'_{\varepsilon} > 0$ vorausgesetzt wird, was eine Standardvoraussetzung für die Entropie darstellt.

Referenzen: Zu dualen Variablen in Zusammenhang mit der Gibbs-Gleichung siehe Hutter [8, 6.9 Zustandsgleichungen]. Zur inversen absoluten Temperatur siehe die Legendre-Fenchel Transformation und deren mathematische Behandlung.

Temperatur θ als duale Variable zu ε

Wir führen nun die inverse absolute Temperatur $\beta = \frac{1}{\theta}$ als duale Variable zur inneren Energie ε ein, wobei wir die Abhängigkeit von ϱ nicht hinschreiben. Die duale Funktion von η wird mit φ bezeichnet. Diese Definition ist äquivalent zur Definition von f in 1.4.

1.5 Energie und inverse absolute Temperatur. Es sei η eine Entropie, die eine Funktion von ε und anderen Variablen ist (diese werden hier nicht

geschrieben, sondern als Parameter aufgefasst). Es sei vorausgesetzt, dass $\eta'_{\varepsilon\varepsilon} \neq 0$ (physikalisch ist $\eta'_{\varepsilon\varepsilon} < 0$). Dann kann statt ε auch

$$\beta := \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon) \text{ die } \mathbf{inverse\ absolute\ Temperatur}$$

als unabhängige Variable genommen werden (ein ε -Intervall wird auf ein β -Intervall abgebildet). Definiert man φ als **duale Funktion** zu η , also

$$\eta(\varepsilon) + \varphi(\beta) = \beta\varepsilon \quad \text{für } \beta = \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon), \quad (\text{III.1.10})$$

so gilt

$$\begin{aligned} \beta &= \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon), & \varepsilon &= \varphi'_{\beta}(\beta), \\ \varphi'_{\beta} &= (\eta'_{\varepsilon})^{-1}, & \eta'_{\varepsilon} &= (\varphi'_{\beta})^{-1}, \\ 1 &= \eta'_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon)\varphi'_{\beta\beta}(\beta) \text{ für } \varepsilon \text{ und } \beta \text{ wie oben,} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \eta \text{ gegeben: } & \varphi(\beta) = \varepsilon\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon) - \eta(\varepsilon) \text{ für } \beta = \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon), \\ \varphi \text{ gegeben: } & \eta(\varepsilon) = \beta\varphi'_{\beta}(\beta) - \varphi(\beta) \text{ für } \varepsilon = \varphi'_{\beta}(\beta). \end{aligned}$$

Beachte: Die Funktionen hängen in der Regel noch von anderen Variablen ab, aber so, dass die Betrachtung sich nicht ändert. Das gilt, falls die Variablen

$$(\varepsilon, u_1, \dots, u_N) \quad \text{und} \quad (\beta, u_1, \dots, u_N)$$

sind, und die Transformation mittels

$$\beta = \widehat{\beta}(\varepsilon, u_1, \dots, u_N) \quad \text{und} \quad \varepsilon = \widehat{\varepsilon}(\beta, u_1, \dots, u_N)$$

gegeben ist.

Es sind nicht nur ε und β duale Variablen, auch lässt sich φ aus der Entropie η berechnen und umgekehrt die Entropie η aus φ .

Beweis. Die Gleichung (III.1.10), geschrieben für ε , d.h. $\beta = \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)$, ist

$$\eta(\varepsilon) + \varphi(\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)) = \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)\varepsilon.$$

Die Ableitung nach ε dieser Identität ist

$$\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon) + \varphi'_{\beta}(\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon))\eta'_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon) = \eta'_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon)\varepsilon + \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon),$$

was wegen der Voraussetzung $\eta'_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon) \neq 0$ äquivalent ist zu

$$\varphi'_{\beta}(\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)) = \varepsilon,$$

was

$$\varphi'_{\beta} = (\eta'_{\varepsilon})^{-1}$$

beweist. Die übrigen Aussagen sind unmittelbare Folgerungen und die letzte Aussage folgt, indem wir $\beta = \eta'_{\varepsilon}(\varphi'_{\beta}(\beta))$ nach β ableiten, was ergibt, dass $1 = \eta'_{\varepsilon\varepsilon}(\varphi'_{\beta}(\beta))\varphi'_{\beta\beta}(\beta)$. \square

Dieses Resultat legt die Versuchung nahe, die inverse Temperatur statt der Temperatur selbst zu benutzen, traditionell ist aber eher die Temperatur die Variable, die betrachtet wird. Dass diese physikalische Größe von Bedeutung ist, sieht man daran, dass die Temperatur (siehe 6.1 und Abb. 3) eine Messgröße ist. Aber auch die inverse Temperatur ist ein Lagrange-Parameter, siehe (III4.4). Wir werden nun die absolute Temperatur θ als unabhängige Variable einführen und die innere freie Energie f wird die Rolle von φ übernehmen. Daher lässt sich f aus der Entropie η berechnen und umgekehrt die Entropie η aus der inneren freien Energie f . Dies gilt bei gegebenem ϱ , weshalb ϱ auch in der folgenden Aussage unerwähnt bleibt, also als Parameter aufzufassen ist.

1.6 Absolute Temperatur. In 1.5 werde $\varepsilon \in]\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}[$ auf $\beta \in]0, \infty[$ abgebildet (es ist $\eta'_{\varepsilon} > 0$ und η'_{ε} bildet $]\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}[$ auf $]0, \infty[$ ab, und normalerweise ist $\eta'_{\varepsilon\varepsilon} < 0$, also ist die Abbildung monoton fallend). Dann ist mit φ wie in 1.5

$$\theta := \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)} \text{ die absolute Temperatur,}$$

$$f(\theta) := \theta\varphi\left(\frac{1}{\theta}\right) \text{ die innere freie Energie,}$$

so dass also aus (III1.10)

$$f = \varepsilon - \theta\eta.$$

Es ist

$$0 < \frac{1}{\theta^3} = f'_{\theta\theta}(\theta)\eta'_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon) \quad \text{für } \theta = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)}$$

und es gilt

$$\eta \text{ gegeben: } f(\theta) = \varepsilon - \theta\eta(\varepsilon) \quad \text{für } \theta = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)},$$

$$f \text{ gegeben: } \eta(\varepsilon) = -f'_{\theta}(\theta) \quad \text{für } \varepsilon = f(\theta) - \theta f'_{\theta}(\theta) = -\theta^2 \left(\frac{f}{\theta}\right)'_{\theta}.$$

Bemerkung: In dieser Aussage wird die Gibbs-Relation nicht benutzt.

Beweis. Es folgt alles aus der Identität

$$\eta + \varphi = \beta\varepsilon \tag{III1.11}$$

in 1.5. Aus (III1.11) folgt

$$\eta + \frac{1}{\theta}f = \frac{1}{\theta}\varepsilon$$

und daraus

$$\theta\eta + f = \varepsilon,$$

was zu zeigen war. Weiter gilt

$$\theta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}}$$

und

$$\varepsilon = \varphi'_{\beta} = \left(\frac{f}{\theta}\right)'_{\theta} \theta'_{\beta} = -\theta^2 \left(\frac{f}{\theta}\right)'_{\theta} = f - \theta f'_{\theta}.$$

Daraus folgt mit (III.1.11)

$$\eta = \beta\varepsilon - \varphi = \frac{1}{\theta}(f - \theta f'_{\theta}) - \frac{f}{\theta} = -f'_{\theta}.$$

Die Aussage über die zweiten Ableitungen folgt, indem

$$\eta(\varepsilon) = -f'_{\theta}\left(\frac{1}{\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)}\right)$$

nach ε abgeleitet wird,

$$\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon) = -f'_{\theta\theta}(\theta)\left(\frac{1}{\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)}\right)'_{\varepsilon} = f'_{\theta\theta}(\theta)\frac{\eta'_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon)}{\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon)^2},$$

was die angegebene Formel ergibt. Als Alternative leite die Gleichung

$$\varphi(\beta) = \beta f\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

nach β ab

$$\varphi'_{\beta}(\beta) = f(\theta) + \beta f'_{\theta}(\theta)\theta'_{\beta} = f(\theta) - \theta f'_{\theta}(\theta)$$

und erhalte nach einer weiteren Ableitung

$$\varphi'_{\beta\beta}(\beta) = (f - \theta f'_{\theta})'_{\theta} \theta'_{\beta} = -\theta f'_{\theta\theta}(\theta) \cdot (-\theta^2) = \theta^3 f'_{\theta\theta}(\theta),$$

was nun in die Gleichung $1 = \eta'_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \varphi'_{\beta\beta}$ eingesetzt werde. \square

1.7 Beispiel. Als Beispiel nehmen wir die Entropiefunktion

$$\eta(\varepsilon) = c \log \varepsilon + d \quad \text{für } \varepsilon > 0,$$

wobei c und d noch von ϱ abhängen können. Dann ist

$$(1) \quad \beta = \eta'_{\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{c}{\varepsilon}, \quad \varphi(\beta) = \beta\varepsilon - \eta = c - c \log \varepsilon - d = c\left(1 + \log \frac{\beta}{c}\right) - d.$$

$$(2) \quad \theta = \frac{1}{\beta} = \frac{\varepsilon}{c}, \quad f(\theta) = \varepsilon - \theta\eta = \theta(c - \eta) = \theta(c - d - c \cdot \log(c\theta)).$$

Also ist $\varepsilon = c\theta$. *Hinweis:* In IV.2.5 werden wir c und d in Abhängigkeit von der Dichte ϱ betrachten.

In 1.6 ist also $\varepsilon_{min} = 0$ und $\varepsilon_{max} = \infty$. Die konstitutiven Gleichungen werden üblicherweise in den Variablen (ϱ, θ) angegeben. So lautet das Fourier'sche Gesetz (vgl. (III.1.6)) für den Wärmefluss q

$$q = \hat{q}(\varrho, \theta, \nabla\theta) = -\hat{a}(\varrho, \theta, |\nabla\theta|)\nabla\theta \quad (\text{III.1.12})$$

mit einem Skalar $a = \hat{a}(\varrho, \theta, |\nabla\theta|) \geq 0$,

wobei die Aussage $a \geq 0$ durch die Entropiegleichung begründet ist.

2 Energiegleichung

Was ist Energie? In der Einleitung dieses Kapitels ist klar geworden, dass die Existenz der Energie der Inhalt vom “Ersten Hauptsatz der Thermodynamik” ist. Die totale Energie e , die wir in II.3 schon kennengelernt hatten, hat verschiedene Aspekte, sie ist eine Größe,

- welche die kinetische Energie enthält, $e = e_{\text{int}} + e_{\text{kin}}$, wobei für eine einzelne Flüssigkeit $e_{\text{kin}} = \frac{\rho}{2}|v|^2$ ist und wir $e_{\text{int}} = \varepsilon$ (siehe (III2.6)) für die innere Energie schreiben.
- die von der absoluten Temperatur θ abhängt, und so die Interaktion zwischen Bewegungsenergie und Temperatur beschreibt (siehe 1.4).
- deren Transformationsverhalten das von e_{kin} ist (siehe (III2.3)).
- die nach dem “Ersten Hauptsatz der Thermodynamik” mit ihrer Gleichung das bestehende Massen- und Impuls-Differentialgleichungssystem abschließt, d.h. dass die Masse-Impuls-Bilanz durch eine Gleichung für die Energie ergänzt wird.

Für glatte Funktionen ist die Energiebilanz, also die Energieidentität, gegeben durch die letzte Gleichung des

2.1 Energiesystem (Definition). Im Abschnitt II.3 hatten wir die Energie schon kennengelernt, und zwar hatten wir in II.3.12 das allgemeine System

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}} &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t e + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{g}}\end{aligned}\tag{III2.1}$$

betrachtet und es als **Masse-Impuls-Energiesystem** definiert, falls dieses Gleichungssystem sich mit der Matrix (wir benutzen die Notation aus (III.3))

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dot{X} & Q & 0 \\ \frac{1}{2}|\dot{X}|^2 & \dot{X}^T Q & 1 \end{bmatrix}\tag{III2.2}$$

von Beobachter zu Beobachter transformiert. Hier ist e die **(totale) Energie**, also die gesamte Energie, das Vektorfeld $\tilde{\mathbf{q}}$ der zugehörige **Energiefluss** und $\tilde{\mathbf{g}}$ die gesamte **Energieproduktion**.

Insbesondere transformiert sich die Energie durch die Gleichung

$$e \circ Y = \frac{1}{2}|\dot{X}|^2 \varrho^* + \varrho^* \dot{X} \bullet (Q v^*) + e^*,\tag{III2.3}$$

dieselbe Transformationsregel wie für $e_{\text{kin}} = \frac{\rho}{2}|v|^2$ in (III.24). Die Definition besagt, dass zur Energie eine Dichte ρ und eine Geschwindigkeit v gehört. Wir hatten dann in II.3.12 gezeigt, dass mit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{J}} &= \rho v + \mathbf{J}, \\ \tilde{\Pi} &= \rho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi, \\ \tilde{q} &= \rho e + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v + q,\end{aligned}\tag{III.2.4}$$

sich das allgemeine Masse-Impuls-Energie-System schreiben lässt als

Masse-Impuls-Energie System:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t \rho e + \operatorname{div}(\rho e v + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v + q) &= \tilde{g},\end{aligned}\tag{III.2.5}$$

mit den Transformationsformeln in (III.2.6)
und Darstellungen von $\tilde{\mathbf{f}}$ und \tilde{g} wie in (III.2.7).

Hierbei, siehe (III.3.1),

$$\begin{aligned}e &= \varepsilon + \frac{\rho}{2}|v|^2, \quad \varepsilon \text{ innere Energie,} \\ \rho, \varepsilon, \mathbf{r} &\text{ objektive Skalare,} \\ v &\text{ eine Geschwindigkeit, d.h. } v \circ Y = \dot{X} + Qv^* \\ \mathbf{J}, q &\text{ objektive Vektoren, } \Pi \text{ objektiver Tensor,}\end{aligned}\tag{III.2.6}$$

und für die rechten Seiten in der Impuls- und Energiegleichung, siehe (III.3.2) and (III.3.1),

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}} &= (\mathbf{r} + \mathbf{J} \bullet \nabla)v + \mathbf{f}, \\ \mathbf{f} &\text{ klassische Kraft, d.h. } \mathbf{f} \circ Y = \rho^*(\dot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^*, \\ \tilde{g} &= \frac{\rho}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + v \bullet Dv\mathbf{J} + (Dv)^A \bullet \Pi + g, \\ g &\text{ objektiver Skalar.}\end{aligned}\tag{III.2.7}$$

Natürlich ist der Term $(Dv)^A \bullet \Pi = 0$, falls Π symmetrisch ist (siehe II.3.14). Wegen der Definition der inneren Energie ε ist es wichtig, die Differentialgleichung für die kinetische Energie herzuleiten (analog zu (I.3.32)).

2.2 Lemma. Aus der Massen- und Impulsbilanz in (III.2.5) folgt

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\frac{\rho}{2}|v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2}|v|^2(\rho v + \mathbf{J}) + \Pi^T v \right) \\ = v \bullet \mathbf{f} + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{r} + v \bullet (Dv\mathbf{J}) + Dv \bullet \Pi.\end{aligned}$$

Beweis. Mit $\overset{\circ}{h} := (\partial_t + v \bullet \nabla)h = \partial_{(1,v)}h$ folgt aus der ersten Gleichung von (III.2.5)

$$\overset{\circ}{\varrho} + \varrho \operatorname{div} v = \partial_t \varrho + v \bullet \nabla \varrho + \varrho \operatorname{div} v = \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = \mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J}.$$

Hieraus folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} & \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T) \\ &= \underbrace{(\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v))}_= \mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J}} v + \varrho \underbrace{(\partial_t v + v \bullet \nabla v)}_= \overset{\circ}{v}}, \end{aligned}$$

also wird die zweite Gleichung in (III.2.5) zu⁵

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varrho} v + \operatorname{div} \Pi &= \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \operatorname{div} \Pi \\ &= -(\mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J})v + \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) \\ &= -\mathbf{r}v - Dv \mathbf{J} + \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) \\ &= -\mathbf{r}v - Dv \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}. \end{aligned}$$

(Damit ist auch die zweite Gleichung in 2.3 bewiesen.) Aus dem bisher Gezeigten folgt für die kinetische Energie

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varrho}{2}|v|^2\right)^\circ &= \frac{1}{2}|v|^2 \overset{\circ}{\varrho} + \frac{1}{2}\varrho(|v|^2)^\circ = \frac{1}{2}|v|^2 \overset{\circ}{\varrho} + v \bullet (\varrho \overset{\circ}{v}) \\ &= \frac{1}{2}|v|^2(\mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J} - \varrho \operatorname{div} v) + v \bullet (\mathbf{f} - \operatorname{div} \Pi) \\ &= -\left(\frac{\varrho}{2}|v|^2\right) \operatorname{div} v + \frac{1}{2}|v|^2(\mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J}) + v \bullet \mathbf{f} - v \bullet \operatorname{div} \Pi \\ &= -\left(\frac{\varrho}{2}|v|^2\right) \operatorname{div} v - \operatorname{div}\left(\Pi^T v + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{J}\right) \\ &\quad + v \bullet \mathbf{f} + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{r} + \sum_j v_j \nabla v_j \bullet \mathbf{J} + Dv \bullet \Pi, \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Pi^T v) &= v \bullet \operatorname{div} \Pi + Dv \bullet \Pi, \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{J}\right) &= \frac{1}{2}|v|^2 \operatorname{div} \mathbf{J} + \sum_j v_j \nabla v_j \bullet \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} & \partial_t\left(\frac{\varrho}{2}|v|^2\right) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}|v|^2(\varrho v + \mathbf{J}) + \Pi^T v\right) \\ &= v \bullet \mathbf{f} + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{r} + v \bullet (Dv \mathbf{J}) + Dv \bullet \Pi, \end{aligned}$$

die Behauptung. □

⁵Es ist $v \bullet \nabla v = (v \bullet \nabla)v = \sum_j v_j \partial_{x_j} v = (Dv)v$

Wir leiten jetzt noch eine oft benutzte Darstellung für die Erhaltungsgleichungen in (III2.5) her, und zwar für die Variablen $(\varrho, v, \varepsilon)$.

2.3 Lemma. Das allgemeine Masse-Impuls-Energie System (III2.5) ist äquivalent zu ⁶

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \\ \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) &= -(\operatorname{D}v)^S \bullet \Pi + g.\end{aligned}\tag{III2.8}$$

Dieses System kann auch wie in (III2.10) geschrieben werden.

Wichtig: Die Annahme $g = 0$ ist als **Energieerhaltung** bekannt, sie ist möglich, da g ein objektiver Skalar ist. Ebenso sind alle Terme der Energiegleichung in (III2.10) objektive Skalare, einschließlich $(\operatorname{D}v)^S \bullet \Pi$. Die rechte Seite der Impulserhaltung ist die klassische Kraft \mathbf{f} , welche die Scheinkräfte oder fiktiven Kräfte (*en*: fictitious forces) enthält, die wir mit \mathbf{f}^{fic} bezeichnen. Also ist $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{fic} + \mathbf{f}^{obj}$, wobei \mathbf{f}^{obj} objektive Vektoren, z.B. die Schwerkraft, beinhaltet. Die Annahme, dass \mathbf{f}^{fic} verschwindet, wird als **Inertialsystem** bezeichnet, sie kann daher nur für bestimmte Beobachter richtig sein, siehe (III2.7).

Beweis. Die zweite Gleichung der Behauptung wurde schon im vorigen Beweis gezeigt. Ziehen wir die Gleichung für die kinetische Energie 2.2 von der Energiegleichung ab, so erhalten wir wegen $e = \frac{\varrho}{2}|v|^2 + \varepsilon$

$$\begin{aligned}\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) \\ = \tilde{g} - (v \bullet \mathbf{f} + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{r} + v \bullet (\operatorname{D}v \mathbf{J}) + \operatorname{D}v \bullet \Pi) &= g - (\operatorname{D}v)^S \bullet \Pi,\end{aligned}$$

wobei (III2.7) für \tilde{g} benutzt wurde. Die Gleichungen (III2.7) enthalten auch das Transformationsverhalten von \mathbf{f} und g , also dass \mathbf{f} eine klassische Kraft und g ein objektiver Skalar ist. \square

Es sei bemerkt, dass wir in 1.3 die erste und die dritte Gleichung von (III2.8) im Spezialfall $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{r} = 0$, $\Pi = p \operatorname{Id}$, $g = 0$ dafür genommen hatten, die erste Aussage über die Entropie zu beweisen. Die “thermale Energiegleichung” in (III2.8), d.h. die Energiegleichung für die innere Energie ε , wird häufig gebraucht, weswegen wir sie hergeleitet haben. Wir verlangen nun vom System (III2.5), was also äquivalent zu (III2.8) ist, dass das Entropieprinzip erfüllt ist. Es gilt Folgendes

2.4 Theorem. Für Lösungen von (III2.5) ist das Entropieprinzip erfüllt mit

$$\eta = \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon), \quad \psi = \eta v + \eta'_{\varrho} \mathbf{J} + \eta'_{\varepsilon} q,$$

⁶ Das innere Produkt von Matrizen ist $M \bullet N := \sum_{ij} M_{ij} N_{ij} = M \bullet N$ und das von Vektoren $v \bullet w := \sum_i v_i w_i$.

wenn in den Differentialgleichungen (es sei $\eta'_{\varepsilon} > 0$)

$$\Pi = p\text{Id} - S, \quad \eta = \varrho\eta'_{\varrho} - (\varepsilon + p)\eta'_{\varepsilon},$$

gilt und folgende Residualungleichung

$$\sigma = \eta'_{\varepsilon}(\text{D}v)^{\text{S}} : S + \eta'_{\varrho}\mathbf{r} + \nabla\eta'_{\varrho}\bullet\mathbf{J} + \eta'_{\varepsilon}g + \nabla\eta'_{\varepsilon}\bullet q \geq 0 \quad (\text{III2.9})$$

übrigbleibt. *Bemerkung:* Die Gibbs-Relation ergibt p als Funktion von (ϱ, ε) .

Der Tensor S ist hier als $S := p\text{Id} - \Pi$ definiert, er darf nicht mit dem Tensor aus der Elastizitätstheorie verwechselt werden, für diesen ist in II.5.3 der Zusammenhang mit Π dargestellt.

Beweis. Das Differentialgleichungssystem (III2.5) ist äquivalent zu dem System in 2.3, was sich mit $\overset{\circ}{h} = \partial_t h + v\bullet\nabla h$ für jede Funktion h auch schreiben lässt als

$$\begin{array}{l} \overset{\circ}{\varrho} + \varrho \operatorname{div} v + \operatorname{div} \mathbf{J} = \mathbf{r}, \\ \varrho \overset{\circ}{v} + \operatorname{div} \Pi = \mathbf{f}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q = g - (\text{D}v)^{\text{S}} : \Pi. \end{array} \quad (\text{III2.10})$$

Nun ist wegen $\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$

$$\overset{\circ}{\eta} = \eta'_{\varrho}\overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\varepsilon}\overset{\circ}{\varepsilon}$$

und daher

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma &= \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi = \partial_t \eta + v\bullet\nabla \eta + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \eta'_{\varrho}\overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\varepsilon}\overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \eta'_{\varrho}(-\varrho \operatorname{div} v - \operatorname{div} \mathbf{J} + \mathbf{r}) + \eta'_{\varepsilon}(-\varepsilon \operatorname{div} v - \operatorname{div} q - (\text{D}v)^{\text{S}} : \Pi + g) \\ &\quad + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= (\text{D}v)^{\text{S}} : ((\eta - \varrho\eta'_{\varrho} - \varepsilon\eta'_{\varepsilon})\text{Id} - \eta'_{\varepsilon}\Pi) \\ &\quad + \eta'_{\varrho}(-\operatorname{div} \mathbf{J} + \mathbf{r}) + \eta'_{\varepsilon}(-\operatorname{div} q + g) + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= (\text{D}v)^{\text{S}} : ((\eta - \varrho\eta'_{\varrho} - \varepsilon\eta'_{\varepsilon})\text{Id} - \eta'_{\varepsilon}\Pi) \\ &\quad + \eta'_{\varrho}\mathbf{r} + \nabla\eta'_{\varrho}\bullet\mathbf{J} + \eta'_{\varepsilon}g + \nabla\eta'_{\varepsilon}\bullet q + \operatorname{div}(\psi - \eta v - \eta'_{\varrho}\mathbf{J} - \eta'_{\varepsilon}q). \end{aligned}$$

Die Wahl von ψ macht den letzten Term zu 0 und die Gibbs-Relation den ersten. Daraus folgt die Aussage des Satzes. \square

Die Residualungleichung $\sigma \geq 0$ enthält fünf Terme, die im einfachsten Fall alle einzeln größer oder gleich 0 gewählt werden können, also z.B.

$$\sigma = \underbrace{\eta'_{\varepsilon} (Dv)^S \bullet S}_{\geq 0} + \underbrace{\eta'_{\varrho} \mathbf{r}}_{=0} + \underbrace{\nabla \eta'_{\varrho} \bullet \mathbf{J}}_{\geq 0} + \underbrace{\eta'_{\varepsilon} g}_{=0} + \underbrace{\nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q}_{\geq 0} \geq 0.$$

Für eine einfache Gleichung eines Gases oder einer Flüssigkeit gibt es keine Massenproduktion und kein Massenverlust, also ist $\mathbf{r} = 0$, und es gilt natürlich die Energieerhaltung, also ist $g = 0$. Außerdem gilt die allgemeine Ungleichung $\frac{1}{\vartheta} = \eta'_{\varepsilon} > 0$ und es sei $\eta = \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ eine konkave Funktion in (ϱ, ε) , eine Standardvoraussetzung (siehe IV.2.5 and Müller & Ruggeri [57, Chap.6 1.2 Universal Principles of the Constitutive Theory]). Dann kann das System (III2.10) mit $\Pi = p\text{Id} - S$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varrho} + \text{div} \mathbf{J} &= -\varrho \text{div} v \quad \text{mit} \quad \nabla \eta'_{\varrho} \bullet \mathbf{J} \geq 0, \\ \varrho \overset{\circ}{v} + \text{div}(p\text{Id} - S) &= \mathbf{f} \quad \text{mit} \quad (Dv)^S \bullet S \geq 0, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + \text{div} q &= (Dv)^S \bullet S - (\varepsilon + p) \text{div} v \quad \text{mit} \quad \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \geq 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt also, daß es sich bei dem System im Prinzip um ein lösbares Differentialgleichungssystem handelt.

Wir werden in Kapitel IV verschiedene konstitutive Gleichungen für die freie Energie und die Entropie kennenlernen. Es wird in allen Fällen die in diesem Abschnitt beschriebene Residualungleichung für σ benutzt werden. Dabei können natürlich verschiedene Terme zusammengefaßt als ≥ 0 ausgewiesen werden. Es ist ja nur verlangt, dass die Lösung die Residualungleichung $\sigma \geq 0$ erfüllen muss. Diese Residualungleichung lautet im Falle $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{J} = 0$, $g = 0$

$$\sigma = \eta'_{\varepsilon} (Dv)^S \bullet S + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \geq 0. \quad (\text{III2.11})$$

Es folgt eine Aussage über konstitutive Gleichungen, welche zur Residualungleichung in (III2.11) beitragen. wobei wir nun (ϱ, v, θ) als unabhängige Variablen nehmen.

2.5 Proposition. Nimm an, der objektive Tensor Π und der objektive Vektor q hängen von $(\varrho, \theta, \nabla \varrho, \nabla \theta, (Dv)^S)$ ab, wobei die Abhängigkeit von $(\nabla \varrho, \nabla \theta, (Dv)^S)$ (affin) linear sei. Weiter sei Π symmetrisch. Dann folgt im Falle $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{J} = 0$ und $g = 0$ für Lösungen von (III2.5) für $n \geq 3$ aus Objektivität und Entropieprinzip, dass

$$\begin{aligned} \Pi &= p\text{Id} - S, \quad p = \hat{p}(\varrho, \theta), \\ S &= 2\hat{a}(\varrho, \theta) (Dv)^S + \hat{b}(\varrho, \theta) \text{div}(v)\text{Id}, \\ q &= -\hat{c}(\varrho, \theta) \nabla \theta \end{aligned}$$

ist mit objektiven Skalaren p , a , b und c . Darüberhinaus gilt

$$a \geq 0, \quad b + \frac{2a}{n} \geq 0, \quad c \geq 0.$$

Dies zeigt, dass unter einer Linearitätsvoraussetzung der Spannungstensor S und der Wärmefluss q keine Kreuzterme aufweisen. Diese Aussage ist zur Vervollständigung der Aussage in II.4.13 gedacht (siehe auch [19, Proposition 11.5]).

Beweis (Objectivity of q). Besides the constitutive equation for q in the formulation of the statement let us assume the more general constitutive relation

$$q = \hat{q}(\varrho, v, \theta, \nabla \varrho, Dv, \nabla \theta).$$

Then, since the function \hat{q} is objective, it follows for another observer

$$q^* = \hat{q}(\varrho^*, v^*, \theta^*, \nabla \varrho^*, Dv^*, \nabla \theta^*).$$

Since $q \circ Y = Qq^*$, we obtain, applying known transformation rules (the rules for ϱ and v and their space derivatives in (II.4.5) and (II.4.13)),

$$\begin{aligned} & \hat{q}(\varrho^*, \dot{X} + Qv^*, \theta^*, Q\nabla \varrho^*, \dot{Q}Q^T + QDv^*Q^T, Q\nabla \theta^*) \\ &= Q\hat{q}(\varrho^*, v^*, \theta^*, \nabla \varrho^*, Dv^*, \nabla \theta^*). \end{aligned}$$

For a given (t^*, x^*) we can choose an observer transformation (the following is analogue to the argumentation in the proof of II.4.11), such that at this given point $Q(t^*) = \text{Id}$, and such that $\dot{X}(t^*)$ is a given vector and $\dot{Q}(t^*)Q^T(t^*)$ a given antisymmetric matrix. This implies that \hat{q} has to be independent of the v -variables and the antisymmetric part of the Dv -variable. Thus with a new constitutive function

$$q = \hat{q}(\varrho, \theta, \nabla \varrho, (Dv)^S, \nabla \theta),$$

and since $(Dv)^S$ is an objective tensor (see the transformation rule in (II.4.14)), the above identity now becomes

$$\begin{aligned} & \hat{q}(\varrho^*, \theta^*, Q\nabla \varrho^*, Q(Dv^*)^S Q^T, Q\nabla \theta^*) \\ &= Q\hat{q}(\varrho^*, \theta^*, \nabla \varrho^*, (Dv^*)^S, \nabla \theta^*). \end{aligned}$$

For zero value of the derivatives, that is for vanishing value of $\nabla \varrho^*(t^*, x^*)$, $(Dv^*)^S(t^*, x^*)$, $\nabla \theta^*(t^*, x^*)$ (for example choose a constant solution) we obtain

$$\hat{q}(\varrho^*, \theta^*, 0, 0, 0) = Q\hat{q}(\varrho^*, \theta^*, 0, 0, 0).$$

Since $Q(t^*)$ can be any orthogonal matrix independent of the values of (ϱ^*, θ^*) , this implies

$$\hat{q}(\varrho^*, \theta^*, 0, 0, 0) = 0. \quad (\text{III.2.12})$$

Using (III.2.12) and since \hat{q} is (affine) linear in the variables $\partial_j \varrho$, $\partial_j \theta$, and $\partial_j v_k + \partial_k v_j$, we have a representation

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}(\varrho, \theta) \partial_j \theta + \sum_{j=1}^n \hat{b}_{ij}(\varrho, \theta) \partial_j \varrho \\ &+ \sum_{k,l=1}^n \hat{c}_{ikl}(\varrho, \theta) (\partial_k v_l + \partial_l v_k) \end{aligned}$$

with coefficients \hat{a}_{ij} , \hat{b}_{ij} , and \hat{c}_{ijk} , where we can assume that $\hat{c}_{ikl} = \hat{c}_{ilk}$ for all $i, k, l = 1, \dots, n$. We know that ϱ , θ are objective scalars, that q , $\nabla \varrho$, $\nabla \theta$ are objective vectors,

and that $(Dv)^S$ is an objective tensor. This information and the identity $q \circ Y = Qq^*$, that is

$$q_i \circ Y = \sum_{\tilde{i}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} \tilde{q}_i^*,$$

implies

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{j}, \tilde{j}=1}^n \hat{a}_{ij}(\varrho^*, \theta^*) Q_{\tilde{j}\tilde{j}} \partial_{\tilde{j}} \theta^* + \sum_{\tilde{j}, \tilde{j}=1}^n \hat{b}_{ij}(\varrho^*, \theta^*) Q_{\tilde{j}\tilde{j}} \partial_{\tilde{j}} \varrho^* \\ & + \sum_{k, l, \tilde{k}, \tilde{l}=1}^n \hat{c}_{ikl}(\varrho^*, \theta^*) Q_{\tilde{k}\tilde{k}} Q_{\tilde{l}\tilde{l}} (\partial_{\tilde{k}} v_{\tilde{l}}^* + \partial_{\tilde{l}} v_{\tilde{k}}^*) \\ = & \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} \hat{a}_{\tilde{i}\tilde{j}}(\varrho^*, \theta^*) \partial_{\tilde{j}} \theta^* + \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} \hat{b}_{\tilde{i}\tilde{j}}(\varrho^*, \theta^*) \partial_{\tilde{j}} \varrho^* \\ & + \sum_{\tilde{i}, \tilde{k}, \tilde{l}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} \hat{c}_{\tilde{i}\tilde{k}\tilde{l}}(\varrho^*, \theta^*) (\partial_{\tilde{k}} v_{\tilde{l}}^* + \partial_{\tilde{l}} v_{\tilde{k}}^*). \end{aligned}$$

Now fix (t^*, x^*) . There is a process $(\varrho^*, v^*, \theta^*)$ with given values and space derivatives at (t^*, x^*) . Thus fixing $\varrho^*(t^*, x^*)$ and $\theta^*(t^*, x^*)$, varying over all spatial derivatives at (t_0^*, x_0^*) , we see that the following identities have to be satisfied at (t_0^*, x_0^*) :

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{j}=1}^n \hat{a}_{ij}(\varrho^*, \theta^*) Q_{\tilde{j}\tilde{j}} &= \sum_{\tilde{i}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} \hat{a}_{\tilde{i}\tilde{j}}(\varrho^*, \theta^*) && \text{for all } i, \tilde{j}, \\ \sum_{\tilde{j}=1}^n \hat{b}_{ij}(\varrho^*, \theta^*) Q_{\tilde{j}\tilde{j}} &= \sum_{\tilde{i}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} \hat{b}_{\tilde{i}\tilde{j}}(\varrho^*, \theta^*) && \text{for all } i, \tilde{j}, \\ \sum_{k, l=1}^n \hat{c}_{ikl}(\varrho^*, \theta^*) Q_{\tilde{k}\tilde{k}} Q_{\tilde{l}\tilde{l}} &= \sum_{\tilde{i}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} \hat{c}_{\tilde{i}\tilde{k}\tilde{l}}(\varrho^*, \theta^*) && \text{for all } i, \tilde{k}, \tilde{l}. \end{aligned}$$

Note, that for the last identity we have used the symmetry of c_{ikl} in k and l . The first identity is equivalent to

$$\hat{a}_{ij}(\varrho^*, \theta^*) = \sum_{\tilde{i}, \tilde{j}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{j}\tilde{j}} \hat{a}_{\tilde{i}\tilde{j}}(\varrho^*, \theta^*) \quad \text{for all } i, j$$

and all orthogonal matrices Q with positive determinant. This says, that (for fixed values of $\varrho^*(t^*, x^*)$ and $\theta^*(t^*, x^*)$) the tensor $(\hat{a}_{ij}(\varrho^*, \theta^*))_{i, j=1, \dots, n}$ behaves like a constant objective tensor, which implies that it is a multiple of the identity (see II.4.14(4)). The same follows for the b -term. The third identity is equivalent to

$$\hat{c}_{ikl}(\varrho^*, \theta^*) = \sum_{\tilde{i}, \tilde{k}, \tilde{l}=1}^n Q_{\tilde{i}\tilde{i}} Q_{\tilde{k}\tilde{k}} Q_{\tilde{l}\tilde{l}} \hat{c}_{\tilde{i}\tilde{k}\tilde{l}}(\varrho^*, \theta^*) \quad \text{for all } i, k, l,$$

and all orthogonal matrices Q with positive determinant. This says, that (for fixed values of $\varrho^*(t^*, x^*)$ and $\theta^*(t^*, x^*)$) the 3-tensor $(\hat{c}_{ikl}(\varrho^*, \theta^*))_{i, k, l=1, \dots, n}$ behaves like a constant objective 3-tensor, which is symmetric in the last two indices. This implies that it has to vanish (see II.4.14(5)). Thus it follows that

$$q_i = \alpha \partial_i \theta + \beta \partial_i \varrho \tag{III.2.13}$$

with two objective scalars α and β depending on (ϱ, θ) . \square

Beweis (Objectivity of Π). For $\hat{\Pi}$ one obtains independence of v and the antisymmetric part of Dv in the same manner as for q . Then

$$\hat{\Pi}(\varrho^*, \theta^*, 0, 0, 0) = Q \hat{\Pi}(\varrho^*, \theta^*, 0, 0, 0) Q^T$$

for all orthogonal matrices Q . This implies that $\hat{\Pi}(\varrho^*, \theta^*, 0, 0, 0)$ (for fixed values of ϱ^* and θ^*) is a constant objective tensor, and therefore, for $n \geq 3$, is a multiple of the identity, that is,

$$\hat{\Pi}(\varrho^*, \theta^*, 0, 0, 0) = \hat{p}(\varrho^*, \theta^*) \text{Id}.$$

Then $\Pi = p\text{Id} - S$ and S has a representation

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{k=1}^n \widehat{a}_{ijk}(\varrho, \theta) \partial_k \theta + \sum_{k=1}^n \widehat{b}_{ijk}(\varrho, \theta) \partial_k \varrho \\ &+ \sum_{k,l=1}^n \widehat{c}_{ijkl}(\varrho, \theta) (\partial_k v_l + \partial_l v_k), \end{aligned}$$

where we can assume that $c_{ijkl} = c_{ijlk}$ for all $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Now Π and then also S is an objective tensor (see II.4.14), that is

$$S_{ij} \circ Y = \sum_{\widetilde{i}, \widetilde{j}=1}^n Q_{\widetilde{i}\widetilde{i}} Q_{\widetilde{j}\widetilde{j}} S_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^*.$$

This leads, with the above notation, to the identities

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ijk} Q_{k\widetilde{k}} &= \sum_{\widetilde{i}, \widetilde{j}=1}^n Q_{\widetilde{i}\widetilde{i}} Q_{\widetilde{j}\widetilde{j}} a_{\widetilde{i}\widetilde{j}\widetilde{k}} && \text{for all } i, j, \widetilde{k}, \\ \sum_{k=1}^n b_{ijk} Q_{k\widetilde{k}} &= \sum_{\widetilde{i}, \widetilde{j}=1}^n Q_{\widetilde{i}\widetilde{i}} Q_{\widetilde{j}\widetilde{j}} b_{\widetilde{i}\widetilde{j}\widetilde{k}} && \text{for all } i, j, \widetilde{k}, \\ \sum_{k,l=1}^n c_{ijkl} Q_{k\widetilde{k}} Q_{l\widetilde{l}} &= \sum_{\widetilde{i}, \widetilde{j}=1}^n Q_{\widetilde{i}\widetilde{i}} Q_{\widetilde{j}\widetilde{j}} c_{\widetilde{i}\widetilde{j}\widetilde{k}\widetilde{l}} && \text{for all } i, j, \widetilde{k}, \widetilde{l}. \end{aligned}$$

Again we rewrite this so that we have Q -terms only on the right-hand side. This gives, that $(a_{ijk})_{i,j,k=1,\dots,n}$ behaves like a constant objective 3-tensor. This implies that it is antisymmetric in each pair of indices (for $n = 3$, for $n \geq 4$ it follows that $a_{ijk} = 0$), hence $a_{ijk} + a_{jik} = 0$. Therefore this term gives no contribution to the symmetric part of S . The same follows for the b -term. The third identity gives that $(c_{ijkl})_{i,j,k,l=1,\dots,n}$ is a constant objective 4-tensor, which is symmetric in the last two indices. Since S is symmetric, which is assumed, this implies that the symmetric part with respect to the first two indices is of the form

$$c_{ijkl} = a(\delta_{k,i}\delta_{l,j} + \delta_{l,i}\delta_{k,j}) + b\delta_{k,l}\delta_{i,j}$$

with two scalars a, b (see II.4.14(6) for this statement). Thus it follows that

$$S_{ij} = a(\partial_i v_j + \partial_j v_i) + b \operatorname{div} v \cdot \delta_{i,j} \quad (\text{III.2.14})$$

with two objective scalars a and b depending on (ϱ, θ) . \square

Beweis (Entropieungleichung). Es gilt im Falle $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{J} = 0$ und $g = 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \sigma &= (\text{D}v)^S \bullet S + \theta \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q = (\text{D}v)^S \bullet S - \frac{1}{\theta} \nabla \theta \bullet q \\ &= 2a |(\text{D}v)^S|^2 + b (\operatorname{div} v)^2 - \frac{\alpha}{\theta} |\nabla \theta|^2 - \frac{\beta}{\theta} \nabla \theta \bullet \nabla \varrho \end{aligned}$$

indem wir die spezielle Darstellungen (III.2.13) und (III.2.14) eingesetzt und die Symmetrie von S ausgenutzt haben. Wir fassen dies jetzt auf als quadratische Gleichung in $((\text{D}v)^S, \nabla \theta, \nabla \varrho)$. Hierzu zeigt man, dass es lokale Lösungen gibt, die an einem Punkte (t_0, x_0) beliebig vorgegebene Werte der Gradienten $(\text{D}v)^S(t_0, x_0)$, $\nabla \theta(t_0, x_0)$ und $\nabla \varrho(t_0, x_0)$ erreichen. Dann ist die quadratische Ungleichung nichtnegativ genau dann, wenn ⁷

$$a \geq 0, \quad b + \frac{2}{n}a \geq 0, \quad \alpha \leq 0, \quad \beta = 0.$$

\square

⁷ Für jede $n \times n$ -Matrix ist $|M|^2 = |M - \frac{1}{n}(\operatorname{trace} M)\text{Id}|^2 + \frac{1}{n}(\operatorname{trace} M)^2$.

3 Mischungen

Wir betrachten eine Mischung von verschiedenen Spezies, so dass, im Allgemeinen, die Anziehungskräfte der Moleküle derselben Spezies sehr verschieden sind von den Anziehungskräften der Moleküle verschiedener Spezies. Unter anderem hängt das davon ab, wie die Moleküle aussehen. Wir betrachten ein Kontinuumsmodell, d.h. wir sind hier an den räumlich weitreichenden Konsequenzen interessiert. Gegeben ist also ein System von Massen, wobei α der Index der Spezies mit der Massendichte $\varrho_\alpha \geq 0$ sei, für die wir die Massenbilanz

$$\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{J}}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \quad (\text{III.3.1})$$

fordern. Dies heißt, dass die einzelnen Massen miteinander mit der Rate \mathbf{r}_α reagieren, und dass sie sich räumlich mit dem Fluss $\tilde{\mathbf{J}}_\alpha$ fortbewegen. Bei jeder dieser Gleichungen handelt es sich wie in II.3.1 um eine skalare Gleichung, d.h. ϱ_α und \mathbf{r}_α sind objektive Skalare und es gilt die Transformationsregel

$$\tilde{\mathbf{J}}_\alpha \circ Y = \varrho_\alpha^* \dot{X} + Q \tilde{\mathbf{J}}_\alpha^*,$$

wobei Y wie immer die Beobachtertransformation sei. Dies ist erfüllt, wenn wir bezüglich $\tilde{\mathbf{J}}_\alpha$ wie in II.3.4 die Aussage machen, dass

$$\tilde{\mathbf{J}}_\alpha = \varrho_\alpha v_\alpha + \mathbf{J}_\alpha,$$

wobei v_α eine Geschwindigkeit und \mathbf{J}_α ein objektiver Vektor ist.

Da sich die Komponenten der Mischung gegenseitig beeinflussen, also gegenseitig Kräfte ausüben, erzwingt dies weitere Aussagen über die Dynamik. So wird die gesamte Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit v transportiert, und die Frage ist, wie ist v zu verstehen? Im Allgemeinen haben wir je nach Materialkomposition die folgenden Optionen.

3.1 Verschiedene Geschwindigkeitsmittel. Mit objektiven Skalaren a_α definiert man

$$v = \sum_\alpha a_\alpha v_\alpha \quad \text{falls} \quad \sum_\alpha a_\alpha = 1. \quad (\text{III.3.2})$$

Dann ist v wie die v_α eine Geschwindigkeit.

(1) *Baryzentrische Geschwindigkeit.* Mit den Konzentrationen (oder Massenanteilen, Massenfraktionen, *en*: mass fractions)

$$c_\alpha := \frac{\varrho_\alpha}{\varrho}, \quad \text{wobei } \varrho := \sum_\beta \varrho_\beta > 0 \text{ die Gesamtmasse ist,}$$

ist das baryzentrische Geschwindigkeitsmittel

$$v = \sum_\alpha c_\alpha v_\alpha.$$

(2) **Mittlere Molargeschwindigkeit.** Mit den Stoffmengenanteilen (oder Molarfraktionen, *en*: molar fractions)

$$n_\alpha := \frac{N_\alpha}{N} \text{ mit } N := \sum_\beta N_\beta > 0, \varrho_\alpha = M_\alpha N_\alpha,$$

wobei $M_\alpha = \text{const}$ die Molarmasse (*en*: molar mass) und N_α die Stoffmengen-
dichte (*en*: molar density) der Spezies α ist, ist das molare Geschwindig-
keitsmittel

$$v = \sum_\alpha n_\alpha v_\alpha.$$

Bemerkung: Diese Variablen finden sich für feste Körper in Abb. **IV18**.

Erklärung: Allgemein bezeichnet man mit **Mol** die Stoffmenge (bei chemi-
schen Reaktionen), d.h. die Menge der Einzelteilchen (Atome, Moleküle,
Ionen, Elektronen, Photonen), siehe [Wikipedia: Mol].

Vergleich mit IV.2.4: Es ist $N_\alpha = \frac{m_\alpha}{V}$ die Stoffmengen-
dichte, wobei (beachte die andere Schreibweise) n die Stoffmenge.

(3) **Geschwindigkeit einer dominierenden Komponente.** Es ist β die
dominierende Spezies und

$$v = \sum_\alpha \delta_{\alpha,\beta} v_\alpha = v_\beta.$$

Bemerkung: Dies erhält man etwa im Limes $\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\beta} \rightarrow 0$ für $\alpha : \alpha \neq \beta$.

In a single fluid often dependencies on the velocity drop out by objectivity,
siehe z.B. **II.4.11**. For mixtures the situation is quite different, since diffe-
rences $v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2}$ of two velocities v_{α_1} and v_{α_2} are objective vectors, as for
example the relative velocities $u_\alpha = v_\alpha - v$ in **(III3.4)** below.

Beweis. Aus **(III3.2)** folgt

$$v \circ Y = \sum_\alpha (a_\alpha \circ Y) v_\alpha \circ Y.$$

Da a_α objektive Skalare sind, d.h.

$$a_\alpha \circ Y = a_\alpha^*, \quad (\text{III3.3})$$

und da v_α Geschwindigkeiten sind, erhalten wir

$$v \circ Y = \sum_\alpha a_\alpha^* (\dot{X} + Q v_\alpha^*) = \sum_\alpha a_\alpha^* \dot{X} + Q \sum_\alpha a_\alpha^* v_\alpha^* = \dot{X} + Q v^*,$$

da die Summe der a_α^* gleich 1 ist, d.h. v ist ebenfalls eine Geschwindigkeit.
(Dass die Summe der a_α gleich 1 ist, ist in allen Beispielen erfüllt.) \square

We shall use various reference velocities, which can all be written as weighted averages of the component velocities \mathbf{v}_k in the following way

$$\mathbf{v}^a = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i, \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i = 1 \right), \quad (24)$$

where a_1, a_2, \dots, a_n are the (normalized) weights. In the following table we list four amongst the most useful choices of weights and corresponding reference velocities and diffusion flows

weights a_i	reference velocity $\mathbf{v}^a = \sum_i a_i \mathbf{v}_i$	diffusion flow $\mathbf{J}^a = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}^a)$
mass fractions c_i	barycentric velocity $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{v}_i$	$\mathbf{J}_i = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})$
molar fractions n_i	mean molar velocity $\mathbf{v}^m = \sum_i n_i \mathbf{v}_i$	$\mathbf{J}_i^m = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}^m)$
$\rho_i v_i$	mean volume velocity $\mathbf{v}^0 = \sum_i \rho_i v_i \mathbf{v}_i$	$\mathbf{J}_i^0 = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}^0)$
δ_{in}	n^{th} component velocity $\mathbf{v}_n = \sum_i \delta_{in} \mathbf{v}_i$	$\mathbf{J}_i^n = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n)$

Abb. 2: Aus DeGroot & Mazur [6, Chap. XI §2]

Bei einem gegebenen Geschwindigkeitsmittel v wird die **Relativbewegung der Spezies α** dann definiert als

$$u_\alpha := v_\alpha - v, \quad (III.4)$$

was wegen $u_\alpha \circ Y = (\dot{X} + Qv_\alpha^*) - (\dot{X} + Qv^*) = Qu_\alpha^*$ ein objektiver Vektor ist, somit auch in vielen konstitutiven Gleichungen auftreten kann.

Referenzen: Es sei hier als Einführung die Darstellungen von I.Müller [11, 7 Mischungen und Mischphasen] sowie Müller & Müller [13, 8 Mixtures, solutions, and alloys] aus angewandter Sicht empfohlen. Die folgende Einteilung von Mischungen findet sich in Hutter & Jöhnk [47, 7 Theory of Mixtures].

Welches Geschwindigkeitsmittel wesentlich ist, hängt von den speziellen Materialien ab, die man beschreiben will. Bei den Mischungen der Klasse I braucht nicht weiter darauf eingegangen zu werden. Betrachten wir Mischungen von der Klasse II, so werden wir im Folgenden von einem baryzentrischen Mittel ausgehen. Es gelten dann die fundamentalen Identitäten

$$\sum_\alpha \varrho_\alpha u_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \sum_\alpha \varrho_\alpha v_\alpha v_\alpha^T = \varrho v v^T + \sum_\alpha \varrho_\alpha u_\alpha u_\alpha^T, \quad (III.5)$$

die Erste ist in (III.8) beschrieben, und die Zweite werden wir in IV.9.1 beweisen. Jetzt zur Unterscheidung von Mischungen, die wir im Folgenden mit I, II, III bezeichnen werden.

Mischung Fall I

Neben den Massengleichungen (III.3.1) mit $u_\alpha = 0$ (definiert in (III.3.4)), aber mit einem beliebigen \mathbf{J}_α -Term, gibt es eine Impulsgleichung für die Geschwindigkeit v und darüberhinaus eine Energiegleichung, d.h.

Mischungen im Fall I:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) &= \mathbf{r}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \dots, m, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v + q) &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

$\varrho := \sum_\alpha \varrho_\alpha$ Gesamtmasse, v Geschwindigkeit,
 $\mathbf{J} := \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha$, $\mathbf{r} := \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha$,
 $e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ Energie, zu $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{g}$ siehe (II.3.32).

(III.6)

Die Massengleichungen sind skalare Gleichungen wie in II.3.1 und damit ist auch die Gleichung für die Gesamtmasse ϱ

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) = \mathbf{r}$$

eine skalare Gleichung, und zusammen mit der Impuls- und Energiegleichung in (III.6) ist sie definiert als Masse-Impuls-Energiegleichung wie in II.3.12. Die zusätzliche Entropiegleichung ist dann eine skalare Gleichung, die zwar nicht zu den Gleichungen des Systems gehört, aber dennoch Bedeutung für die konstitutiven Gleichungen des Systems hat, d.h. sie bestimmt auch, welche Bedingungen an die Terme der Gleichungen zu stellen sind. Wir werden dieses Modell anwenden in Abschnitt IV.6 auf die verschiedenen Wachstumskomponenten eines Knochens (IV.6.1), und in Abschnitt IV.11 auf die Komponenten bei Reaktion-Diffusions Prozessen (IV.11.2), wobei wir einmal als dominierende Komponente einen festen Körper betrachten, und zum anderen die Komponenten einer chemischen Reaktion in (IV.11.21). Außerdem bringen wir ein Beispiel für die Flammenausbreitung in Abschnitt IV.12.

Mischung Fall II

Neben den Massengleichungen (III.3.1), also mit Geschwindigkeiten v_α , setzen wir voraus, dass auch Impulserhaltungen

$$\partial_t(\varrho_\alpha v_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha v_\alpha^T + v_\alpha \mathbf{J}_\alpha^T + \Pi_\alpha) = \tilde{\mathbf{f}}_\alpha \quad (\text{III.3.7})$$

für die einzelnen Spezies⁸ gelten. Die Geschwindigkeit v ist dann als baryzentrische Mittel definiert, also, wenn u_α wie in (III.3.4) definiert ist,

$$\varrho v = \sum_\alpha \varrho_\alpha v_\alpha, \quad \text{was äquivalent zu} \quad \sum_\alpha \varrho_\alpha u_\alpha = 0, \quad (\text{III.3.8})$$

was unmittelbar aus der Definition von ϱ und v folgt:

$$\sum_\alpha \varrho_\alpha u_\alpha = \sum_\alpha \varrho_\alpha (v_\alpha - v) = \sum_\alpha \varrho_\alpha v_\alpha - \left(\sum_\alpha \varrho_\alpha\right)v = 0.$$

Zusätzlich wird nun eine einzige Energiegleichung verlangt, d.h.

Mischungen im Fall II :

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha + \mathbf{J}_\alpha) &= \mathbf{r}_\alpha, \\ \partial_t(\varrho_\alpha v_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha v_\alpha^T + v_\alpha \mathbf{J}_\alpha^T + \Pi_\alpha) &= \tilde{\mathbf{f}}_\alpha \\ &\text{für } \alpha = 1, \dots, m, \\ \partial_t e + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

$\varrho := \sum_\alpha \varrho_\alpha$ Gesamtdichte,
 v Geschwindigkeit als baryzentrisches Mittel,
 $e = \varepsilon_{mix} + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ Energie, $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{g}$ siehe Beispiele
 $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha$ wie in (III.3.2) für jedes α .

(III.3.9)

Die Massen- und Impulsgleichungen sind für jede Spezies α nach Definition eine Masse-Impuls-Gleichung wie in II.3.6. Bilden wir die Masse-Impuls-Gleichung dann für die Gesamtmasse ϱ und das Geschwindigkeitsmittel v , wir werden das in IV.9.1 tun, so ergibt sich zusammen mit der Energiegleichung eine Masse-Impuls-Energiegleichung wie in II.3.12. Die Entropiegleichung ist dann zusätzlich eine skalare Gleichung. Als Beispiel werden wir die technische Fraktionierung in Abschnitt IV.9 betrachten, und die Schichtung von Himmelskörpern in Abschnitt IV.16.

⁸Es ist im Allgemeinen davon auszugehen, dass die Anzahl der Impulserhaltungen kleiner ist als die Zahl, die man für die einzelnen Komponenten braucht. Hier betrachten wir jedoch nur den Fall, dass beide Anzahlen gleich sind.

Mischungen Fall III

In diesem Falle werden auch Energiegleichungen für die einzelnen Spezies angenommen. Die Entropiegleichung bleibt aber nach wie vor eine einzelne skalare Gleichung. Es wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

Die obige Einteilung von Mischungen findet sich in Hutter & Jöhnk [47, 7 Theory of Mixtures]. Es heißt in [47, 7.1, p.255]: “The three just described classes of mixture theories may also occur in a mixed form; all the more, such mixed forms are often applied in practice. For example, the dispersion of a pollutant in the groundwater is formulated by a model which contains elements of classes I and II. The pollutant and the water form together a mixture of class I; the polluted water together with the soil a mixture of class II. All combinations are thinkable, and it lies in the talent and depth of physical understanding of the scientist who develops a model to make the choice appropriate to a given situation.”

Wir werden hier nur entweder eine Mischung der Klasse I oder eine Mischung der Klasse II betrachten.

4 Lagrange Multiplikatoren

Als Ergänzung zum Entropieprinzip sei noch folgende allgemeine Prozedur genannt, die sich auf das Masse-Impuls-Energie System anwenden lässt. Wir betrachten eine Menge \mathcal{P}' , die aus Größen (u^k, q^k, g^k) für $k = 1, \dots, N$ sowie (η, ψ, σ) besteht zwischen denen konstitutive Beziehungen gelten. Es sei eine Klasse von physikalischen Prozessen \mathcal{P} definiert durch Elemente in \mathcal{P}' , die den Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t u^k + \operatorname{div} q^k = g^k \text{ für } k = 1, \dots, N \quad (\text{III.4.1})$$

genügen und ggf. noch weitere Bedingungen erfüllen. Liu & Müller machen für die größere Klasse \mathcal{P}' die folgende Annahme.

4.1 Lagrange Multiplikatoren. Folgendes wird angenommen: Es gibt Multiplikatoren Λ_k , $k = 1, \dots, N$, so dass für die Größen in \mathcal{P}' gilt

$$\partial_t \eta + \operatorname{div} \psi - \sigma = \sum_{k=1}^N \Lambda_k \cdot (\partial_t u^k + \operatorname{div} q^k - g^k). \quad (\text{III.4.2})$$

Bemerkung: Λ_k sind in der Regel Funktionen der Größen in \mathcal{P}' .

4.2 Theorem. Es erfülle \mathcal{P}' die Gleichung in 4.1. Dann ist für physikalische Prozesse in \mathcal{P} die Entropiegleichung für (η, ψ) erfüllt, falls

$$\sigma \geq 0.$$

Bemerkung: Also gilt das Entropieprinzip für \mathcal{P} , falls in \mathcal{P}' gilt

$$\sigma := \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi - \sum_{k=1}^N \Lambda_k \cdot (\partial_t u^k + \operatorname{div} q^k - g^k) \geq 0.$$

Referenzen: Siehe die Arbeiten I. Müller [117], I-Shih Liu [112], und auch im Buch von I. Müller [87, 5.4.3 Rational Thermodynamics with Lagrange multipliers] sowie im Buch von I-Shih Liu [86, 7.3 Method of Lagrange Multipliers]. Ebenfalls sei Wilmanski [15, Theorem in 6.2. Entropy Inequality]) erwähnt. Ich habe in dem Paper [18] von der Lagrange Methode Gebrauch gemacht.

Ingo Müller sagt in seinem Buch [87, 5.4.3.3 Lagrange multipliers]:

“Thus we may think of the field equations as constraints:
The fields that satisfy the entropy inequality are constrained by
the requirement that they must be solutions of the field equations.”

Die klassische Bedeutung von Lagrange-Multiplikatoren ergibt sich aus dem Beitrag [Wikipedia: Lagrange-Multiplikator], worin unter anderem gesagt wird:

“Die Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren in der Physik wird bei der Anwendung in der klassischen Mechanik sichtbar. Hierfür wurden sie von Lagrange eingeführt. . . . Eine physikalische Zwangsbedingung, die die Bewegung einschränkt, erscheint als Nebenbedingung des Extremums. . . . ”

Allerdings lässt sich diese Prozedur nicht anwenden, wenn man distributionelle Erhaltungsgleichungen hat. Aus diesem Grund verzichten wir hier auf diese sehr effiziente Methode. Wir werden sie aber in Situationen, wo sie gebraucht wird, explizit benutzen, so zum Beispiel

- in der Astrophysik, wo die Energiegleichung durch die Entropiegleichung ersetzt wird, siehe [IV.16.12](#).
- bei Phasenübergängen, wobei hier nur die Arbeit von Niezgodka & Sprekels [[58](#), 3.2 Thermomechanical model of dynamical phase transitions] genannt sei.
- beim Beweis des Entropieprinzips für höhere Momente, siehe [REFmultiply...](#)

Referenzen: Als mathematische Literatur verweisen wir auf das Buch [[40](#)] von Feireisl & Novotny. Siehe z.B. [[40](#), 4.1], oder [[40](#), 3.5.5], wo das Masse-Impuls-Entropie System gelöst wird, wobei ein **J**-Term in der Massengleichung proportional zu $-\nabla\varrho$ verwendet wird. In [[40](#), 3.6.6] wird dasselbe System ohne den **J**-Term genannt.

Um zu zeigen, wie effektiv diese Methode von Liu & Müller funktioniert, geben wir hier die Version für das Masse-Impuls-Energie System für Flüssigkeiten ([III2.5](#)) mit $\mathbf{J} = 0$ an:

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= \tilde{g}.\end{aligned}\tag{III4.3}$$

Es sei nun \mathcal{P}' die Menge der Funktionen, für die $e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ und $\eta = \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\eta} &= \eta'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon} \\ &= \left(\eta'_{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \frac{|v|^2}{2}\right) \overset{\circ}{\varrho} - \eta'_{\varepsilon} v \bullet (\overset{\circ}{\varrho} v) + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon},\end{aligned}$$

und daher vermuten wir (es ist $\eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\varrho}$ nach [1.6](#))

$$\Lambda_{\varrho} = \eta'_{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \frac{|v|^2}{2}, \quad \Lambda_v = -\eta'_{\varepsilon} v, \quad \Lambda_e = \eta'_{\varepsilon}.\tag{III4.4}$$

Hierbei seien Λ_{ϱ} , $\Lambda_v := (\Lambda_{v_k})_{k=1, \dots, n}$ und Λ_e die Multiplikatoren. Es gilt mit diesen Multiplikatoren [4.1](#), was im folgenden gezeigt wird.

4.3 Theorem. Mit den Multiplikatoren in (III.4.4) gilt für das System (III.4.3) für alle Funktionen in \mathcal{P}'

$$\begin{aligned}
& \partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v + \eta'_{\varepsilon} q) - \sigma \\
&= \Lambda_{\varrho} \cdot (\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) - \mathbf{r}) \\
&+ \Lambda_v \cdot (\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) - \tilde{\mathbf{f}}) \\
&+ \Lambda_e \cdot (\partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) - \tilde{g})
\end{aligned} \tag{III.4.5}$$

wenn

$$\begin{aligned}
\sigma &:= \eta'_{\varrho} \mathbf{r} + \eta'_{\varepsilon} \left(\frac{|v|^2}{2} \mathbf{r} - v \bullet \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{g} \right) \\
&+ Dv \bullet \left((\eta - \varrho \eta'_{\varrho} - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi \right) + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q.
\end{aligned} \tag{III.4.6}$$

Beweis. Man mache unter Benutzung von (III.4.4) ähnliche Manipulationen wie im Beweis von 2.4. \square

Es sei bemerkt, dass das Entropieprinzip nur die Positivität von σ als Ganzes verlangt. Mit den Definitionen in (II.3.32) ergibt sich $\frac{|v|^2}{2} \mathbf{r} - v \bullet \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{g} = g$ und das Verschwinden des Dv -Terms ergibt die wohlbekannte Darstellung des Drucktensors

$$\Pi = p \operatorname{Id} - S, \quad 0 = \eta - \varrho \eta'_{\varrho} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon}$$

mittels der Gibbs' Relation. Wir sehen also, dass das Entropieprinzip einerseits wohlbekannte konstitutive Gleichungen im System beinhaltet und andererseits in der Residualungleichung

$$\sigma = \eta'_{\varrho} \mathbf{r} + \eta'_{\varepsilon} g + \eta'_{\varepsilon} Dv \bullet S + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \geq 0$$

mündet. Diese Ungleichung wird in der Regel dadurch verifiziert, dass alle Terme einzeln größer oder gleich 0 sind. So wird $\mathbf{r} = 0$ gesetzt, da es sich um die Gesamtmasse handelt, und die Energieerhaltung sagt $g = 0$. Der Stresstensor wird mit $Dv \bullet S \geq 0$ und der Wärmefluss mit $\nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \geq 0$ gewählt. Es sei jedoch betont, dass nur die gesamte Entropieproduktion $\sigma \geq 0$ sein muss (siehe z.B. IV.6.3).

Entropiegleichung ersetzt Energiegleichung

Es sei noch folgende nichttriviale Anwendung genannt, die manchmal benutzt wird. Für Lösungen des Systems (III.4.3) sei die Entropiegleichung $\sigma \geq 0$ erfüllt, wobei σ wie in (III.4.6) definiert ist. Da der Multiplikator

$$\Lambda_e = \eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\theta} > 0$$

in (III.4.4) überall nichtnull ist, folgt daraus, dass die Energieidentität eine Linearkombination der übrigen Differentialgleichungen von (III.4.3) und der Entropiegleichung ist. Also ist (III.4.3) äquivalent zum System

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{r}v + \mathbf{f}, \\ \partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v + \eta'_{,\varepsilon} q) &= \sigma \quad (\text{gegeben in (III.4.6)}).\end{aligned}\tag{III.4.7}$$

Voraussetzung dafür ist, dass σ wie in (III.4.6) in den Termen des Systems (III.4.3) ausgedrückt werden kann. Also kann das Masse-Impuls-Energie System auch geschrieben werden als Masse-Impuls-Entropie System. Man findet die Schreibweise mit Entropieidentität gelegentlich in der Elastizitätstheorie und häufig in der Astrophysik, wobei wir als Beispiel IV.16.12 angeben.

5 Dissipationsungleichung

Was ist freie Energie? Die innere freie Energie f ist eine Größe, die sich aus der inneren Energie und der Entropie berechnet durch die Formel

$$f = \varepsilon - \theta\eta. \quad (\text{III5.1})$$

Diese Formel ist allgemein gültig und hat zwei Interpretationen, und zwar eine mathematische und eine physikalische: Die Gleichung (III5.1) sagt,

- dass $\frac{1}{\theta}$ die duale Variable zu ε ist und $\varphi := \frac{1}{\theta}f$ die duale Funktion zur Entropie η , also $\eta + \varphi = \frac{1}{\theta}\varepsilon$ ist (siehe 1.5).
- dass mit der Gibbs Relation der Druck einerseits durch die innere freie Energie dargestellt werden kann, $p = \varrho f'_{\varrho} - f$, andererseits durch die Entropie, $p = \theta(\eta - \varrho\eta'_{\varrho}) - \varepsilon$ (siehe 1.4(1)).

Die gesamte freie Energie f^{tot} enthält wie die gesamte Energie noch den kinetischen Term, das heißt

$$f^{tot} := f + \frac{\varrho}{2}|v|^2 = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2 - \theta\eta = e - \theta\eta. \quad (\text{III5.2})$$

Wir betrachten nur den Fall einer glatten Größe f in einem Gemisch von Materialien, d.h. es ist hier nicht der Fall von Distributionen berücksichtigt. Die Gleichung (III5.1) hatten wir in 1.6 kennengelernt bei der Einführung der Temperatur.

Wir werden hier am Ende des Paragraphen im isothermen Fall eine Definition bringen, die auf die Dissipationsungleichung zurückgeht. Dazu gehen wir aus von dem allgemeinen Masse-Impuls-Energie-System

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v + q) &= \tilde{g}, \\ \tilde{\mathbf{f}} &= (\mathbf{r} + \mathbf{J} \bullet \nabla)v + \mathbf{f}, \\ \tilde{g} &= \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + v \bullet Dv \mathbf{J} + (Dv)^A \bullet \Pi + g, \end{aligned} \quad (\text{III5.3})$$

wobei sich die rechten Seiten $\tilde{\mathbf{f}}$ und \tilde{g} verhalten wie in (II3.32), d.h. \mathbf{f} ist eine klassische Kraft und g ist ein objektiver Skalar. Das System ist nach 2.3 äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \\ \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) &= -(Dv)^S \bullet \Pi + g. \end{aligned} \quad (\text{III5.4})$$

Wir beweisen

5.1 Dissipationsungleichung. Es gelte die Entropiegleichung in 1.1 für die Entropie η und den Entropiefluß

$$\psi = \underbrace{\eta v + \frac{q}{\theta}}_{\text{Clausius-Duhem}} + \tilde{\psi}.$$

Then the free energy f in (III5.1) satisfies

$$\partial_t f + \operatorname{div}(fv - \theta\tilde{\psi}) + (Dv)^S \bullet \Pi - g + R_\theta = -\theta\sigma \leq 0 \quad (\text{III5.5})$$

where R_θ is defined by

$$R_\theta := \eta(\partial_t + v \bullet \nabla)\theta + \nabla\theta \bullet \left(\frac{1}{\theta}q + \tilde{\psi}\right). \quad (\text{III5.6})$$

Beweis. Die beiden relevanten Gleichungen sind die Energiegleichung von (III5.4) und die Entropieidentität in 1.1

$$\begin{aligned} \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) + (Dv)^S \bullet \Pi - g &= 0, \\ \partial_t \eta + \operatorname{div}\psi &= \sigma \geq 0, \end{aligned}$$

was auch, wenn wir (III2.10)) und die Zerlegung $\psi - \eta v = \frac{1}{\theta}q + \tilde{\psi}$ benutzen, geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div}v + \operatorname{div}q + (Dv)^S \bullet \Pi - g &= 0, \\ \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div}v + \operatorname{div}\left(\frac{1}{\theta}q + \tilde{\psi}\right) &= \sigma \geq 0. \end{aligned}$$

Indem wir die zweite Gleichung mit $\theta \geq 0$ multiplizieren, schreibt sich dies als

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div}v + \operatorname{div}q + (Dv)^S \bullet \Pi - g &= 0, \\ \theta \overset{\circ}{\eta} + \theta \eta \operatorname{div}v + \underbrace{\theta \operatorname{div}\left(\frac{1}{\theta}q\right)}_{\operatorname{div}q + \theta \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q} + \theta \operatorname{div}\tilde{\psi} &= \theta\sigma \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{III5.7})$$

Bei der Differenz dieser Gleichungen fällt nun $\operatorname{div}q$ weg, und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 \geq -\theta\sigma &= \overset{\circ}{\varepsilon} - \theta \overset{\circ}{\eta} + (\varepsilon - \theta\eta) \operatorname{div}v \\ &+ (Dv)^S \bullet \Pi - g - \theta \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q - \theta \operatorname{div}\tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Mit der freien Energie f ist nun wegen $(\theta\eta)^\circ = \theta \overset{\circ}{\eta} + \eta(\partial_t\theta + v \bullet \nabla\theta)$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon} - \theta \overset{\circ}{\eta} + (\varepsilon - \theta\eta) \operatorname{div}v &= \overset{\circ}{f} + \eta(\partial_t\theta + v \bullet \nabla\theta) + f \operatorname{div}v \\ &= \partial_t f + \operatorname{div}(fv) + \eta(\partial_t\theta + v \bullet \nabla\theta), \end{aligned}$$

also folgt wegen $-\theta \operatorname{div} \tilde{\psi} = \operatorname{div}(-\theta \tilde{\psi}) + \nabla \theta \bullet \tilde{\psi}$

$$0 \geq -\theta \sigma = \partial_t f + \operatorname{div}(f v - \theta \tilde{\psi}) + (Dv)^S \bullet \Pi - g + R_\theta,$$

wenn $R_\theta := \eta(\partial_t + v \bullet \nabla) \theta - \theta \nabla \left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q + \nabla \theta \bullet \tilde{\psi}$. \square

The quantity R_θ contains terms with spacetime derivatives of θ .

Referenzen: Siehe z.B. [50, 4.4.3 The Dissipation Inequality] zur Dissipationsungleichung. Die Entropieungleichung findet sich dort in [50, (4.4.15)]. Siehe auch [Wikipedia: Clausius-Duhem inequality], wo die Dissipationsungleichung genannt ist.

Addiert man nun zur Gleichung (III5.5) die Gleichung in 2.2 für die kinetische Energie

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\rho}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |v|^2 (\rho v + \mathbf{J}) + \Pi^T v \right) \\ - \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{r} - v \bullet \mathbf{f} - Dv \bullet (\Pi + v \mathbf{J}^T) = 0, \end{aligned} \quad (\text{III5.8})$$

so erhält man

5.2 Freie Energieungleichung (θ variabel). Sei

$$f = \varepsilon - \theta \eta, \quad \tilde{\psi} = \psi - \eta v - \frac{1}{\theta} q.$$

Ist dann für (η, ψ) das Entropieprinzip erfüllt, so gilt

$$\begin{aligned} \partial_t f^{tot} + \operatorname{div} \left(f^{tot} v + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v - \theta \tilde{\psi} \right) - \tilde{g} \\ + R_\theta = -\theta \sigma \leq 0. \end{aligned}$$

Dabei ist f^{tot} die (gesamte) freie Energie definiert in (III5.2) und \tilde{g} hat die Eigenschaft in (III5.3) und R_θ ist definiert in (III5.6).

Diese Identität ist auch äquivalent zum Entropieprinzip, d.h. zur Entropieungleichung. Das sieht man leicht, wenn die Schlüsse umgekehrt ausgeführt werden. Wir betrachten jetzt den isothermen Limes.

5.3 Hinweis. Lässt man nun $\theta \rightarrow \text{const}$ gehen, so erwartet man, dass $R_\theta \rightarrow 0$. Dies zu zeigen, ist nicht ganz offensichtlich. Beim Limes $\theta \rightarrow \text{const}$ betrachtet man nämlich eine Folge von Lösungen mit $q \rightarrow \infty$. Das Entropieprinzip gibt, dass $\nabla \left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q$ im L^1 -Raum über die Raumzeit ist, was eine natürliche Beschränkung an die Lösungen der Folge ist. Aber es ist nicht klar, dass diese Funktion gegen 0 konvergiert, R_θ enthält aber $-\theta \nabla \left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q$. Man kann diese Schwierigkeit vermeiden, indem man in der Entropieungleichung zusätzlich $-\theta \sigma - \frac{1}{\theta} \nabla \theta \bullet q \leq 0$ voraussetzt (was meistens erfüllt ist).

Im isothermen Limes betrachtet man aufgrund von 5.2

$$\begin{aligned} f^{tot} &= f + \frac{\varrho}{2}|v|^2, & \varphi^{tot} &= f^{tot}v + \frac{1}{2}|v|^2\mathbf{J} + \Pi^T v + \varphi \\ g^{tot} &= \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + v \bullet Dv\mathbf{J} + (Dv)^A \bullet \Pi + g. \end{aligned} \quad (\text{III5.9})$$

Es heißt f^{tot} die **(totale) freie Energie** und φ^{tot} der **freie Energiefluss**. Die Größe g^{tot} ist nicht wie bei dem Entropieprinzip gleich Null, im Gegenteil, wenn z.B. eine Kraft \mathbf{f} vorhanden ist, muss sie den Term $v \bullet \mathbf{f}$ enthalten. Nur ein Teil von g^{tot} (in der Formel ist dies g) ist ein objektiver Skalar und kann darum gleich Null sein. Es ist auf diesen Umstand besonderer Wert zu legen. Die rechte Seite der Differentialgleichung in 5.2 ist $\sigma_f := -\theta\sigma$ und damit erscheint darin das Entropieprinzip und deshalb formuliert man die

5.4 Freie Energieungleichung ($\theta = \text{const}$). Für alle physikalischen Prozesse in \mathcal{P} , welche isotherm sind, gibt es eine **(totale) freie Energie** f^{tot} und einen zugehörigen Fluß φ^{tot} , so dass

$$\sigma_f := \partial_t f^{tot} + \text{div} \varphi^{tot} - g^{tot} \leq 0.$$

Hierbei ist die Funktion g^{tot} auf der linken Seite so zu wählen, dass die linke Seite dieser Ungleichung ein objektiver Skalar ist. Nur dann ist die Ungleichung beobachterunabhängig.

Es ist nun klar, dass die freie Energieungleichung eine Konsequenz des Entropieprinzips ist und zwar im isothermen Falle, d.h. wenn $\theta = \text{const} > 0$ und dann auch kein Wärmefluß in den Gleichungen vorhanden ist. Ansonsten gelten analoge Bemerkungen wie zum Entropieprinzip. Gewöhnlich ist, wenn ϱ die Gesamtmasse ist und v die Gesamtgeschwindigkeit, die freie Energie durch die Formel in (III5.9) gegeben, d.h. durch die innere freie Energie.

5.5 Folgerung. Gehören die Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \text{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \text{div} \Pi &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

zu \mathcal{P} und ist f^{tot} , φ^{tot} , g^{tot} durch (III5.9) gegeben, wobei f ein objektiver Skalar und $\varphi - fv$ ein objektiver Vektor ist, so ist die freie Energieungleichung 5.4 äquivalent zu

$$\sigma_f = \partial_t f + \text{div} \varphi + (Dv)^S \bullet \Pi - g \leq 0.$$

Beweis. Da (III.5.8) gilt, was eine Folgerung der beiden Gleichungen für \mathcal{P} ist, erhält man, indem man dies von der freien Energiegleichung abzieht,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sigma_f = \partial_t \left(f^{tot} - \frac{\rho}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\varphi^{tot} - \frac{1}{2} |v|^2 (\rho v + \mathbf{J}) - \Pi^T v \right) \\ &\quad - g^{tot} + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{r} + v \bullet \mathbf{f} + Dv \bullet (\Pi + v \mathbf{J}^T) \\ &= \partial_t f + \operatorname{div} \varphi + Dv \bullet \Pi - g, \end{aligned}$$

also das Resultat. □

Die innere freie Energie $f = \varepsilon - \theta \eta$ ist wie die innere Energie ε ein objektiver Skalar und damit hat die freie Energie f^{tot} das gleiche Transformationsverhalten wie die Energie e . Im Falle, dass man $\theta = \text{const}$ annimmt, und damit dass die freie Energiegleichung gilt, ist keine Energiegleichung mehr vorhanden, und das ist die notwendige Konsequenz aus der Konstanz der Temperatur. Im nächsten Kapitel sind einige Beispiele auf natürliche Weise isotherm, d.h. $\theta = \text{const}$. Daher werden wir dann statt der Entropiegleichung die freie Energiegleichung anwenden. In vielen Beispielen ist dann die Temperatur, da sie eine Konstante ist, nicht explizit angegeben, oft wird das Beispiel ohne Kenntnis der Temperatur bearbeitet. Das macht es nötig die freie Energiegleichung zu betrachten. Ist aber im Allgemeinen θ variabel, so ist die Energiegleichung für e angesagt, siehe auch IV.3.4. Wir werden zu beiden Fällen im nächsten Kapitel noch Beispiele kennenlernen.

6 Distributionelle Entropie

Das Entropieprinzip hat für Distributionen die folgende Form: Ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (physikalisch ist $n = 3$) der betrachtete Bereich, so existiert für jeden Prozess eine **Entropie** $H \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ und ein **Entropiefluss** $\Psi \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ so dass

$$\Sigma := \partial_t H + \operatorname{div}_x \Psi \geq 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{U}), \quad (\text{III6.1})$$

was heißt

$$\langle \zeta, \partial_t H + \operatorname{div}_x \Psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})} \geq 0 \text{ für alle Testfunktionen } \zeta \geq 0. \quad ^9$$

Diese Formulierung lässt sich anwenden auf den Fall

- dass die Entropie und der Entropiefluss durch eine Funktion η , das heißt $H = [\eta]$, und ein Vektorfeld ψ , das heißt $\Psi = [\psi]$, gegeben sind und beide unstetig sein können, so zum Beispiel am Übergang zwischen zwei Medien.
- dass die Masse reduziert ist auf gewisse sich bewegende Punkte, also auf 1-dimensionale Distributionen in Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und deshalb die Entropie und der Entropiefluss auf den sich bewegenden Punkten konzentriert ist.

Im ersten Fall, also $H = [\eta]$ und $\Psi = [\psi]$, ist das Entropieprinzip (III6.1) äquivalent zu

$$\Sigma := \partial_t [\eta] + \operatorname{div}_x [\psi] \geq 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{U}), \quad (\text{III6.2})$$

was heißt

$$\int_{\mathcal{U}} (\partial_t \zeta \cdot \eta + \nabla \zeta \bullet \psi) \, dL^{n+1} \leq 0 \text{ für alle Testfunktionen } \zeta \geq 0.$$

Wir nehmen an, dass das zugrunde liegende Masse-Impuls-Energie System auch im Distributionsraum $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ geschrieben ist, also

$$\begin{aligned} \partial_t [\rho] + \operatorname{div}[\tilde{\mathbf{J}}] &= [\mathbf{r}], \\ \partial_t [\rho v] + \operatorname{div}[\tilde{\Pi}] &= [\tilde{\mathbf{f}}], \\ \partial_t [e] + \operatorname{div}[\tilde{q}] &= [\tilde{g}]. \end{aligned} \quad (\text{III6.3})$$

Als elementares Beispiel hierfür betrachten wir die Messung der Temperatur, die auf der Tatsache beruht, dass die Temperatur θ die Gleichung $\eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}$ erfüllt. Das heißt, dass die inverse absolute Temperatur ein Multiplikator (siehe dazu Abschnitt 4) ist, weshalb die Temperatur an einem Interface

⁹ Es ist $\langle \zeta, \Sigma \rangle := \langle \zeta, \partial_t H + \operatorname{div}_x \Psi \rangle = -\langle \partial_t \zeta, H \rangle - \langle \nabla \zeta, \Psi \rangle$. Die Aussage lautet mit Quantoren $\forall \zeta \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}) : (\zeta \geq 0 \Rightarrow \langle \zeta, \Sigma \rangle \geq 0)$.

stetig sein sollte (siehe Abb. 1(d)), und in der Tat wird dies die wichtigste Voraussetzung in folgendem Beispiel sein. In 6.1 betrachten wir den Fall einer Lösung mit Geschwindigkeit $v = 0$ (für einen Beobachter). Außerdem seien in der Massenerhaltung keine Reaktion und Diffusion vorhanden, also $\tilde{\mathcal{J}} = 0$ und $\mathbf{r} = 0$. Dann ist $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$, $\tilde{\Pi} = \Pi$, $e = \varepsilon$, $\tilde{q} = q$ und $\tilde{g} = g$. Also wird (III6.3) zu

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho &= 0, \\ \operatorname{div}[\Pi] &= [\mathbf{f}], \\ \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}[q] &= [g].\end{aligned}\tag{III6.4}$$

Wir zeigen

6.1 Thermometer. Es sei $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times (D_o \cup \mathbf{S} \cup D_m)$, wobei $D_o \subset \mathbb{R}^3$ das zu vermessende Gebiet und $D_m \subset \mathbb{R}^3$ die Position des Meßgeräts sei. Wir geben eine Situation vor, in der keine Geschwindigkeit auftritt, also sind (III6.4) die zu betrachteten Gleichungen in $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$, wobei ϱ zeitunabhängig ist und mit beschränkten Funktionen gelte ¹⁰

$$\begin{aligned}[\Pi] &= p_o \operatorname{Id} \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + p_m \operatorname{Id} \mu_{\mathbb{R} \times D_m}, & [\mathbf{f}] &= \mathbf{f}_o \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + \mathbf{f}_m \mu_{\mathbb{R} \times D_m}, \\ [\varepsilon] &= \varepsilon_o \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + \varepsilon_m \mu_{\mathbb{R} \times D_m}, \\ [q] &= q_o \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + q_m \mu_{\mathbb{R} \times D_m}, & [g] &= g_o \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + g_m \mu_{\mathbb{R} \times D_m}.\end{aligned}$$

Außerdem setzen wir die Entropieungleichung (III6.2) voraus, wobei wir die Clausius-Duhem Annahme

$$[\psi] = \frac{q_o}{\theta_o} \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + \frac{q_m}{\theta_m} \mu_{\mathbb{R} \times D_m}$$

machen. Ansonsten beinhaltet der Rand zwischen den Gebieten $\mathbb{R} \times \Gamma$ keine weiteren Phänomene. Dann folgt, dass

$$\theta_o = \theta_m \text{ auf } \mathbb{R} \times \mathbf{S}.$$

Hinweis: Dies besagt, dass die absolute Temperatur im Berührungsbereich \mathbf{S} zwischen dem Gebiet und Messstab gleich ist. Ist die Temperatur im Gebiet höher als im Messstab, so wird $q_o \bullet \nu_{D_o} > 0$ sein, also beeinflusst die Messung die Temperatur im Gebiet. Wartet man lange genug, so wird θ_m im ganzen Messstab ungefähr gleich sein und dann als Messung die Temperatur des Gebietes anzeigen. Es ist dann natürlich $q_o \bullet \nu_{D_o} \approx 0$. *Bemerkung:* Die Darstellung von $[\psi]$ ist die Annahme, dass das Entropieprinzip auf jedem Teilgebiet wie üblich läuft.

Beweis. Zunächst gilt für $H = [\eta]$ und $\Psi = [\psi]$ die Entropieungleichung

$$\Sigma := \partial_t H + \operatorname{div} \Psi \geq 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathcal{U}).\tag{III6.5}$$

¹⁰Es ist $\mu_A(E) := L^4(A \cap E)$ für $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

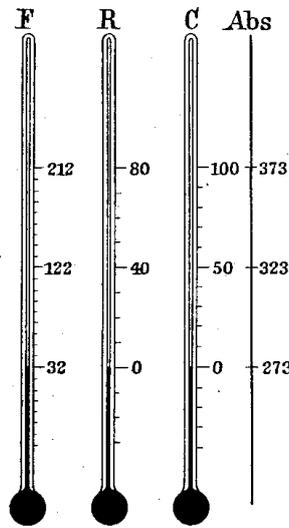


Abb. 485. Die gebräuchlichen Quecksilberthermometer mit ihren Fundamentaltunkten.

Abb. 3: “Die gebräuchlichen Quecksilberthermometer mit ihren Fundamentaltunkten” aus “Grimsehl’s Lehrbuch der Physik”. Es zeigt die Temperatur in Fahrenheit [°F], Réaumur [°Ré], Celsius [°C] und Kelvin [K] (Absolute Temperatur). Es ist $0^{\circ}\text{C} = 273.15\text{ K}$, siehe [\[Wikipedia: Kelvin\]](#).

Die Voraussetzung, dass die Clausius-Duhem Identität außerhalb $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ gilt, bedeutet die Entropieidentitäten

$$\begin{aligned}\partial_t \eta + \operatorname{div} \left(\frac{q_o}{\theta} \right) &= \sigma_o \geq 0 \text{ in } \mathbb{R} \times D_o, \\ \partial_t \eta_m + \operatorname{div} \left(\frac{q_m}{\theta_m} \right) &= \sigma_m \geq 0 \text{ in } \mathbb{R} \times D_m.\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass auf $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ keine Entropie auftritt, bedeutet damit, dass die Ungleichung (III.6.5) gilt mit

$$\begin{aligned}H &= \eta_o \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + \eta_m \mu_{\mathbb{R} \times D_m}, \\ \Psi &= \frac{q_o}{\theta_o} \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + \frac{q_m}{\theta_m} \mu_{\mathbb{R} \times D_m}, \\ \Sigma &= \sigma_o \mu_{\mathbb{R} \times D_o} + \sigma_m \mu_{\mathbb{R} \times D_m}.\end{aligned}$$

Also lauten die distributionellen Differentialgleichungen und die Entropie-

ungleichung (III6.5) für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ und für $j = 1, \dots, 3$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{D_o} (\partial_{x_j} \zeta \cdot p_o + \zeta \mathbf{f}_{oj}) \, dL^3 + \int_{D_m} (\partial_{x_j} \zeta \cdot p_m + \zeta \mathbf{f}_{mj}) \, dL^3 \right) dL^1 &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{D_o} (\partial_t \zeta \cdot \varepsilon_o + \nabla \zeta \bullet q_o) \, dL^3 + \int_{D_m} (\partial_t \zeta \cdot \varepsilon_m + \nabla \zeta \bullet q_m) \, dL^3 \right) dL^1 &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{D_o} (\partial_t \zeta \cdot \eta + \nabla \zeta \bullet \left(\frac{1}{\theta_o} q_o \right) + \zeta \sigma) \, dL^3 \right. \\ &\quad \left. + \int_{D_m} (\partial_t \zeta \cdot \eta_m + \nabla \zeta \bullet \left(\frac{1}{\theta_m} q_m \right) + \zeta \sigma_m) \, dL^3 \right) dL^1 = 0. \end{aligned}$$

Das führt unter anderem zu den folgenden Gleichungen auf dem zeitunabhängigen Rand $\mathbb{R} \times \Gamma$, mit $\mathbf{n} = \nu_{D_o} = -\nu_{D_m}$,

$$\begin{aligned} p_m &= p_o, \\ q_m \bullet \mathbf{n} &= q_o \bullet \mathbf{n}, \\ \left(\frac{1}{\theta_o} q_o - \frac{1}{\theta_m} q_m \right) \bullet \mathbf{n} &= 0. \end{aligned}$$

Da während des Messvorgangs $q_o \bullet \mathbf{n} \neq 0$, folgt daraus

$$\theta_m = \theta_o \text{ auf } \mathbb{R} \times \mathbf{S}.$$

Also muss für die Messung $q_o \bullet \mathbf{n}$ beliebig sein. Das ist die Behauptung. \square

Dieses Resultat ist Anlaß für die folgende Bemerkung.

6.2 Empirische Temperatur. In Hutter & Wang [9, 17.2.5 Empirical Temperature, Gas Temperature and Temperature Scales] : “It is, however, not possible to define the temperature in a direct manner. It must be defined indirectly via the notion of thermodynamic equilibrium. One says: Two systems have the same temperature, if they are in thermal equilibrium with one another.” Es ist wichtig einzusehen, dass die täglich empfundene Temperatur auf diesem Effekt beruht.

Im zweiten Fall wenden wir die distributionellen Masse-Impuls-Energie Gleichung auf kollidierende Massenpunkte an. Zusätzlich zu der Masse-Impuls Gleichung in I.3.1 zur Trajektorie aus I.2.8 leiten wir zunächst die Gleichung für die kinetische Energie ab (siehe auch [19, 7.11]).

6.3 Kinetische Energie eines Massenpunktes. Aus I.3.1 folgt für die Trajektorie $t \rightarrow \xi(t)$ mit Masse $t \rightarrow m(t)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

$$\partial_t \left(\frac{m}{2} |v|^2 \boldsymbol{\mu}_\xi \right) + \operatorname{div} \left(\frac{m}{2} |v|^2 v \boldsymbol{\mu}_\xi \right) = \left(\frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet \mathbf{f} \right) \boldsymbol{\mu}_\xi. \quad (\text{III6.6})$$

Beweis. Wie in I.2.9 sei $t \rightarrow \xi(t)$ die Bewegung eines Massenpunktes mit Masse $t \rightarrow m(t)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} |\dot{\xi}|^2 \right) = \dot{m} |\dot{\xi}|^2 + m \dot{\xi} \bullet \ddot{\xi} = \frac{\mathbf{r}}{2} |\dot{\xi}|^2 + \dot{\xi} \bullet \mathbf{f}$$

und deshalb, da $\dot{\xi}(t) = v(t, \xi(t))$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \zeta, \partial_t \left(\frac{m}{2} |\dot{\xi}|^2 \mu_\xi \right) + \operatorname{div} \left(\frac{m}{2} |\dot{\xi}|^2 v \mu_\xi \right) \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\ &= - \left\langle \partial_t \zeta, \frac{m}{2} |\dot{\xi}|^2 \mu_\xi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} - \left\langle \nabla \zeta, \frac{m}{2} |\dot{\xi}|^2 v \mu_\xi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_t \zeta(t, \xi(t)) + \dot{\xi}(t) \bullet \nabla \zeta(t, \xi(t)) \right) \frac{m(t)}{2} |\dot{\xi}(t)|^2 dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(\zeta(t, \xi(t)) \right) \frac{m(t)}{2} |\dot{\xi}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) \frac{d}{dt} \left(\frac{m(t)}{2} |\dot{\xi}(t)|^2 \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) \left(\frac{\mathbf{r}(t)}{2} |\dot{\xi}(t)|^2 + \dot{\xi}(t) \bullet \mathbf{f}(t) \right) dt \\ &= \left\langle \zeta, \left(\frac{\mathbf{r}}{2} |\dot{\xi}|^2 + \dot{\xi} \bullet \mathbf{f} \right) \mu_\xi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} = \left\langle \zeta, \left(\frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet \mathbf{f} \right) \mu_\xi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir

6.4 Masse-Impuls-Energie Gleichung für Massenpunkt. Ist der Massenpunkt wie in 6.3 gegeben, so sind äquivalent:

(1) Die Distributionsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t (m \mu_\xi) + \operatorname{div} (m v \mu_\xi) &= \mathbf{r} \mu_\xi, \\ \partial_t (m v \mu_\xi) + \operatorname{div} (m v v^T \mu_\xi) &= (\mathbf{r} v + \mathbf{f}) \mu_\xi, \\ \partial_t \left(\left(\varepsilon + \frac{m}{2} |v|^2 \right) \mu_\xi \right) + \operatorname{div} \left(\left(\varepsilon + \frac{m}{2} |v|^2 \right) v \mu_\xi \right) &= \left(\frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet \mathbf{f} \right) \mu_\xi \end{aligned} \quad (\text{III6.7})$$

sind in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ erfüllt.

(2) Es ist $v(t, \xi(t)) = \dot{\xi}(t)$ die Geschwindigkeit, und die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{m} = \mathbf{r}, \quad m \ddot{\xi} = \mathbf{f}, \quad \varepsilon = \text{const} \quad (\text{III6.8})$$

sind erfüllt.

Beweis. Wir nehmen zuerst die Aussage in I.3.1. Dann gehen wir zur Energiegleichung und ziehen die Formel (III6.6) für die kinetische Energie ab. Es bleibt $\partial_t (\varepsilon \mu_\xi) + \operatorname{div} (\varepsilon v \mu_\xi) = 0$. Wie bei der Massenerhaltung in I.2.9 ist dies äquivalent zu $\dot{\varepsilon} = 0$. □

Wir formulieren jetzt die Kollision von z.B. zwei Partikeln, die beim Stoß in eine Wolke von Partikeln zerfallen.

6.5 Kollision von Massenpunkten. Es seien $t \in]-\infty, t_0[\mapsto \xi_-^\alpha(t)$ die Trajektorien vor dem Zusammenstoß und $t \in]t_0, \infty[\mapsto \xi_+^\beta(t)$ die Trajektorien nach dem Zusammenstoß, wobei $\alpha = 1, \dots, \alpha_{max}$ und $\beta = 1, \dots, \beta_{max}$. Der Zusammenstoß ereignet sich zum Raumzeitpunkt (t_0, x_0) . Es mögen die distributionellen Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ¹¹

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v) &= v \bullet \mathbf{f}\end{aligned}$$

gelten, wobei

$$\begin{aligned}\varrho &:= \sum_{\alpha} m_-^{\alpha} \mu_{\xi_-^{\alpha}} + \sum_{\beta} m_+^{\beta} \mu_{\xi_+^{\beta}} \\ \mathbf{f} &:= \sum_{\alpha} \mathbf{f}_-^{\alpha} \mu_{\xi_-^{\alpha}} + \sum_{\beta} \mathbf{f}_+^{\beta} \mu_{\xi_+^{\beta}} \\ e &:= \sum_{\alpha} \left(\varepsilon_-^{\alpha} + \frac{m_-^{\alpha}}{2} |v|^2 \right) \mu_{\xi_-^{\alpha}} + \sum_{\beta} \left(\varepsilon_+^{\beta} + \frac{m_+^{\beta}}{2} |v|^2 \right) \mu_{\xi_+^{\beta}}.\end{aligned}$$

Es folgt: In den Zeitintervallen $]-\infty, t_0[$ und $]t_0, \infty[$ gelten für alle beteiligten Partikel die Gleichungen in 6.4(2) und die Energien sind konstant. Zum Zeitpunkt t_0 ist

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} m_-^{\alpha} &= \sum_{\beta} m_+^{\beta}, \\ \sum_{\alpha} m_-^{\alpha} \dot{\xi}_-^{\alpha} &= \sum_{\beta} m_+^{\beta} \dot{\xi}_+^{\beta}, \\ \sum_{\alpha} \left(\varepsilon_-^{\alpha} + \frac{m_-^{\alpha}}{2} |\dot{\xi}_-^{\alpha}|^2 \right) &= \sum_{\beta} \left(\varepsilon_+^{\beta} + \frac{m_+^{\beta}}{2} |\dot{\xi}_+^{\beta}|^2 \right).\end{aligned}$$

Zur Geschwindigkeit: Die Geschwindigkeit v ist nur an den Punkten (t, x) mit $x = \xi_-^{\alpha}(t)$ für $t < t_0$ und $x = \xi_+^{\beta}(t)$ für $t > t_0$ definiert. Die Multiplikation mit v geschieht also nur in diesen Punkten. Im Beweis ist dann $v(t, \xi_-^{\alpha}(t)) = \dot{\xi}_-^{\alpha}(t)$ für $t < t_0$ und $v(t, \xi_+^{\beta}(t)) = \dot{\xi}_+^{\beta}(t)$ für $t > t_0$.

Beweis. Wenn, wie im Beweis von I.3.2,

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\sum_{\alpha} g_-^{\alpha} \mu_{\xi_-^{\alpha}} + \sum_{\beta} g_+^{\beta} \mu_{\xi_+^{\beta}} \right) + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} g_-^{\alpha} v \mu_{\xi_-^{\alpha}} + \sum_{\beta} g_+^{\beta} v \mu_{\xi_+^{\beta}} \right) \\ = \sum_{\alpha} r_-^{\alpha} \mu_{\xi_-^{\alpha}} + \sum_{\beta} r_+^{\beta} \mu_{\xi_+^{\beta}},\end{aligned}$$

¹¹ Beachte, dass z.B. ϱ eine Distribution ist und dass ϱv diese Distribution mit dem Vektorfeld v multipliziert ist.

erhält man, wie im Beweis von I.3.2, für Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \partial_t \zeta, \left(\sum_{\alpha} g_{-}^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi_{-}^{\alpha}} + \sum_{\beta} g_{+}^{\beta} \boldsymbol{\mu}_{\xi_{+}^{\beta}} \right) \right\rangle \\ &+ \left\langle \nabla \zeta, \left(\sum_{\alpha} g_{-}^{\alpha} v \boldsymbol{\mu}_{\xi_{-}^{\alpha}} + \sum_{\beta} g_{+}^{\beta} v \boldsymbol{\mu}_{\xi_{+}^{\beta}} \right) \right\rangle + \left\langle \zeta, \sum_{\alpha} r_{-}^{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\xi_{-}^{\alpha}} + \sum_{\beta} r_{+}^{\beta} \boldsymbol{\mu}_{\xi_{+}^{\beta}} \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{t_0} \zeta(t, \xi_{-}^{\alpha}(t)) \left(-\frac{d}{dt} (g_{-}^{\alpha}(t, \xi_{-}^{\alpha}(t))) + r_{-}^{\alpha}(t, \xi_{-}^{\alpha}(t)) \right) \\ &+ \sum_{\beta} \int_{t_0}^{\infty} \zeta(t, \xi_{+}^{\beta}(t)) \left(-\frac{d}{dt} (g_{+}^{\beta}(t, \xi_{+}^{\beta}(t))) + r_{+}^{\beta}(t, \xi_{+}^{\beta}(t)) \right) \\ &+ \zeta(t, x_0) \left(\sum_{\alpha} g_{-}^{\alpha}(t, x_0) - \sum_{\beta} g_{+}^{\beta}(t, x_0) \right), \end{aligned}$$

which gives the ODE equations and

$$\sum_{\alpha} g_{-}^{\alpha}(t, x_0) = \sum_{\beta} g_{+}^{\beta}(t, x_0),$$

the identity in the collision point (t_0, x_0) . □

6.6 Beispiele. Wir definieren $v_{-}^{\alpha} := \dot{\xi}_{-}^{\alpha}(t_0)$ und $v_{+}^{\beta} := \dot{\xi}_{+}^{\beta}(t_0)$.

(1) **Elastischer Stoß.** $\beta_{max} = \alpha_{max} = 2$: Diesen Stoß hatten wir schon in I.3.2 kennengelernt. Wenn wir $\varepsilon_{-}^{\alpha} = \varepsilon_{+}^{\beta} = 0$ wählen, lauten die Stoßgesetze

$$\begin{aligned} m_{-}^1 + m_{-}^2 &= m_{+}^1 + m_{+}^2, \\ m_{-}^1 v_{-}^1 + m_{-}^2 v_{-}^2 &= m_{+}^1 v_{+}^1 + m_{+}^2 v_{+}^2, \\ \frac{m_{-}^1}{2} |v_{-}^1|^2 + \frac{m_{-}^2}{2} |v_{-}^2|^2 &= \frac{m_{+}^1}{2} |v_{+}^1|^2 + \frac{m_{+}^2}{2} |v_{+}^2|^2. \end{aligned}$$

Beim elastischen Stoß bleiben die Massen erhalten, es gilt also $m_{+}^1 = m_{-}^1$ sowie $m_{+}^2 = m_{-}^2$. Es gilt für den Stoß ein zweidimensionaler Freiheitsgrad.

(2) **Explosion.** $\alpha_{max} = 1, \beta_{max} > 1$: Wenn wir $v_{+}^{\beta} = v_{-} + u_{+}^{\beta}$ definieren, erhalten wir die Gesetze

$$\begin{aligned} m_{-} &= \sum_{\beta} m_{+}^{\beta}, \quad 0 = \sum_{\beta} m_{+}^{\beta} u_{+}^{\beta}, \\ \varepsilon_{-} &= \sum_{\beta} \left(\varepsilon_{+}^{\beta} + \frac{m_{+}^{\beta}}{2} |u_{+}^{\beta}|^2 \right). \end{aligned}$$

Falls die inneren Energien ε_{+}^{β} nichtnegativ sind, muss der Körper heiß genug sein um zu zersplittern.

(3) **Verschmelzung.** $\alpha_{max} = 2, \beta_{max} = 1$: Zwei Körper kollidieren und ergeben einen gemeinsamen Körper. Bei diesem Prozess gilt die Massenbilanz und die Impulsbilanz

$$m_+ = m_-^1 + m_-^2, \quad v_+ = \frac{m_-^1}{m_+} v_-^1 + \frac{m_-^2}{m_+} v_-^2.$$

Also sind damit die Anfangsbedingungen (m_+, v_+) für den weiteren Weg des vereinten Körpers gegeben. Die Definitionen $u_-^1 := v_-^1 - v_+, u_-^2 := v_-^2 - v_+$ ergeben

$$\varepsilon_+ = \sum_{\alpha} \left(\varepsilon_-^{\alpha} + \frac{m_-^{\alpha}}{2} |u_-^{\alpha}|^2 \right).$$

Diese Formel gibt die Temperatur des verschmelzenen Körpers an. Diese Temperatur wird wesentlich bestimmt von der relativen Geschwindigkeit, mit der die Körper aufeinanderprallen.

In the general case, hence also in all three examples, the definitions

$$\begin{aligned} m &:= \sum_{\alpha} m_-^{\alpha} = \sum_{\beta} m_+^{\beta} \quad (\text{assume } m > 0), \\ v &:= \sum_{\alpha} \frac{m_-^{\alpha}}{m} v_-^{\alpha} = \sum_{\beta} \frac{m_+^{\beta}}{m} v_+^{\beta} \quad (\text{barycentric mean}), \\ u_-^{\alpha} &= v_-^{\alpha} - v, \quad u_+^{\beta} = v_+^{\beta} - v, \end{aligned}$$

at the collision time t_0 lead to

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_-^{\alpha} u_-^{\alpha} &= 0, \quad \sum_{\beta} m_+^{\beta} u_+^{\beta} = 0, \\ \sum_{\alpha} \left(\varepsilon_-^{\alpha} + \frac{m_-^{\alpha}}{2} |u_-^{\alpha}|^2 \right) &= \sum_{\beta} \left(\varepsilon_+^{\beta} + \frac{m_+^{\beta}}{2} |u_+^{\beta}|^2 \right). \end{aligned}$$

7 Aufgaben

Entropie

7.1 Übung. Der Druck sei als Funktion $p = \tilde{p}(\varrho, \theta)$ gegeben, ebenso die innere Energie $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta)$. Es gelte $\varrho \varepsilon'_{\varrho} + \theta p'_{\theta} = \varepsilon + p$. Berechne daraus die Entropie, wenn die Gibbs Relation erfüllt ist. Mache die Probe.

Erinnerung: Die Temperatur θ hängt von der Entropie wie in (III.1.7) ab.

Zeige: Als Funktion $\eta := \tilde{\eta}(\varrho, \theta)$ lautet die Entropie

$$\tilde{\eta}^{\text{SP}}(\varrho, \theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tilde{\varepsilon}'_{\theta}(\varrho_0, \tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} - \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\tilde{p}'_{\theta}(\tilde{\varrho}, \theta)}{\tilde{\varrho}} d\tilde{\varrho} + C,$$

wobei η^{SP} , ε^{SP} , p^{SP} die spezifischen Größen (wie in 1.4) bezeichnen, und ϱ_0 , θ_0 , C sind Konstanten.

Die Gibbs-Relation, eine Folgerung aus dem Entropieprinzip, ist eine differentielle Bedingung an (p, ε, η) . Sie drückt eine Größe durch die anderen aus. In dieser Aufgabe ist (p, ε) gegeben und η wird dadurch ausgedrückt.

Teil 1: Notwendige Bedingung für die Existenz von η . Mit $\eta = \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ sind die beiden gegebenen Gleichungen

$$\theta \eta'_{\varepsilon} = 1, \quad \eta - \varrho \eta'_{\varrho} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} = 0, \quad (\text{III.7.1})$$

wobei $\theta = \hat{\theta}(\varrho, \varepsilon)$ und $p = \hat{p}(\varrho, \varepsilon)$. Mit der spezifischen Entropie

$$\eta^{\text{SP}} := \frac{1}{\varrho} \eta$$

lauten die beiden Gleichungen

$$\eta^{\text{SP}}'_{\varepsilon} = \frac{1}{\varrho} \eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\varrho \theta}, \quad \eta^{\text{SP}}'_{\varrho} = \left(\frac{\eta}{\varrho}\right)'_{\varrho} = -\frac{\varepsilon + p}{\varrho^2 \theta}.$$

Also gibt es η^{SP} genau dann, wenn

$$\left(\frac{1}{\varrho \theta}\right)'_{\varrho} = (\eta^{\text{SP}}'_{\varepsilon})'_{\varrho} = (\eta^{\text{SP}}'_{\varrho})'_{\varepsilon} = -\left(\frac{\varepsilon + p}{\varrho^2 \theta}\right)'_{\varepsilon} \quad (\text{III.7.2})$$

Nun schreiben wir η als Funktion von (ϱ, θ) , also

$$\eta = \hat{\eta}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta)) =: \tilde{\eta}(\varrho, \theta).$$

Wenn wir für beliebige Funktionen h dasselbe tun, also $h = \hat{h}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta)) =: \tilde{h}(\varrho, \theta)$, so gelten die Kettenregeln

$$\tilde{h}'_{\theta} = \hat{h}'_{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}'_{\theta}, \quad \tilde{h}'_{\varrho} = \hat{h}'_{\varrho} + \hat{h}'_{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}'_{\varrho}$$

oder

$$\hat{h}'_{\varepsilon} = \tilde{h}'_{\theta} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}'_{\theta}}, \quad \hat{h}'_{\varrho} = \tilde{h}'_{\varrho} - \tilde{h}'_{\theta} \frac{\tilde{\varepsilon}'_{\varrho}}{\tilde{\varepsilon}'_{\theta}}, \quad (\text{III.7.3})$$

was ergibt

$$\begin{aligned} \hat{h} &:= -\frac{\varepsilon + p}{\varrho^2 \theta} \Rightarrow -\left(\frac{\varepsilon + p}{\varrho^2 \theta}\right)'_{\varepsilon} = -\left(\frac{\tilde{\varepsilon} + \tilde{p}}{\varrho^2 \theta}\right)'_{\theta} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}'_{\theta}} = -\frac{\tilde{p}'_{\theta} \theta - (\tilde{\varepsilon} + \tilde{p})}{\varrho^2 \theta^2 \tilde{\varepsilon}'_{\theta}} - \frac{1}{\varrho^2 \theta}, \\ \hat{h} &:= \frac{1}{\varrho \theta} \Rightarrow \left(\frac{1}{\varrho \theta}\right)'_{\varrho} = \left(\frac{1}{\varrho \theta}\right)'_{\varrho} - \left(\frac{1}{\varrho \theta}\right)'_{\theta} \frac{\tilde{\varepsilon}'_{\varrho}}{\tilde{\varepsilon}'_{\theta}} = -\frac{1}{\varrho^2 \theta} + \frac{1}{\theta^2 \varrho} \frac{\tilde{\varepsilon}'_{\varrho}}{\tilde{\varepsilon}'_{\theta}}. \end{aligned}$$

Dann wird aus (III7.2)

$$\frac{1}{\varrho^2} \tilde{\varepsilon}'_{,\varrho} = -\frac{\tilde{p}'_{,\theta} \theta - (\tilde{\varepsilon} + \tilde{p})}{\varrho^2 \theta^2}$$

das heißt

$$\boxed{\varrho \tilde{\varepsilon}'_{,\varrho} + \theta \tilde{p}'_{,\theta} = \varepsilon + p.} \quad \text{(III7.4)}$$

Also, wenn diese notwendige Bedingung für ε und p erfüllt ist, existiert η^{sp} und damit η , was zu beweisen war. \square

Teil 2: Gibbs Darstellung in (ϱ, θ) . Die Gibbs Relation in (ϱ, ε) , siehe (III7.1), ist

$$\eta - \varrho \eta'_{,\varrho} = (\varepsilon + p) \eta'_{,\varepsilon},$$

wobei die rechte Seite wegen der notwendigen Bedingung (III7.4)

$$= (\varrho \tilde{\varepsilon}'_{,\varrho} + \theta \tilde{p}'_{,\theta}) \eta'_{,\varepsilon} = \varrho \tilde{\varepsilon}'_{,\varrho} \eta'_{,\varepsilon} + \tilde{p}'_{,\theta}$$

ist, und die linke Seite, wenn wir (III7.3) für η benutzen,

$$\begin{aligned} &= \tilde{\eta} - \varrho \left(\tilde{\eta}'_{,\varrho} - \frac{\tilde{\eta}'_{,\theta}}{\tilde{\varepsilon}'_{,\theta}} \tilde{\varepsilon}'_{,\varrho} \right) = \tilde{\eta} - \varrho \tilde{\eta}'_{,\varrho} + \varrho \eta'_{,\varepsilon} \tilde{\varepsilon}'_{,\varrho}. \\ &\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ &\quad \quad \quad = \hat{\eta}'_{,\varepsilon} \end{aligned}$$

Also ist die Gibbs relation äquivalent zu

$$\boxed{\tilde{\eta} - \varrho \tilde{\eta}'_{,\varrho} = \tilde{p}'_{,\theta},}$$

oder in der Schreibweise für die spezifischen Größen

$$\varrho^2 \tilde{\eta}^{\text{sp}}_{,\varrho} + \tilde{p}^{\text{sp}}_{,\theta} = 0, \quad \text{(III7.5)}$$

eine Darstellung, die wir jetzt benutzen werden. \square

Teil 3: Darstellung von η . Indem wir (III7.5) durch ϱ^2 dividieren und in ϱ aufintegrieren, erhalten wir

$$\tilde{\eta}^{\text{sp}}(\varrho, \theta) = - \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\tilde{p}'_{,\theta}(\tilde{\varrho}, \theta)}{\tilde{\varrho}^2} d\tilde{\varrho} + C(\theta)$$

mit einer Konstanten ϱ_0 und einer zu bestimmenden Funktion $\theta \mapsto C(\theta)$. Indem wir diese Identität nach θ differenzieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} &- \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\tilde{p}'_{,\theta\theta}(\tilde{\varrho}, \theta)}{\tilde{\varrho}^2} d\tilde{\varrho} + C'_{,\theta}(\theta) = \tilde{\eta}^{\text{sp}}_{,\theta}(\varrho, \theta) \\ &= \frac{1}{\varrho} \tilde{\eta}'_{,\theta}(\varrho, \theta) = \frac{1}{\varrho} \hat{\eta}'_{,\varepsilon}(\varrho, \varepsilon) \tilde{\varepsilon}'_{,\theta}(\varrho, \theta) = \frac{1}{\varrho \theta} \tilde{\varepsilon}'_{,\theta}(\varrho, \theta) = \frac{1}{\theta} \tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\theta}(\varrho, \theta) \end{aligned}$$

nach (III7.3) für η . Indem wir die notwendige Bedingung (III7.4)

$$\theta \tilde{p}'_{,\theta} - p = \varepsilon - \varrho \tilde{\varepsilon}'_{,\varrho} = -\varrho^2 \tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\varrho}$$

nach θ differenzieren, erhalten wir $\theta \tilde{p}'_{,\theta\theta} = -\varrho^2 \tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\varrho\theta} = -\varrho^2 (\tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\theta})'_{,\varrho}$, also ist

$$C'_{,\theta}(\theta) = - \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{(\tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\theta})'_{,\varrho}(\tilde{\varrho}, \theta)}{\theta} d\tilde{\varrho} + \frac{1}{\theta} \tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\theta}(\varrho, \theta) = \frac{1}{\theta} \tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\theta}(\varrho_0, \theta)$$

und somit

$$C(\theta) = C(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\tilde{\varepsilon}^{\text{sp}}_{,\theta}(\varrho_0, \tilde{\theta})}{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta}.$$

Indem man $C(\theta)$ in obige Formel einsetzt, folgt die Behauptung. \square

7.2 Ideales Gas. Wende 7.1 an auf

$$\varepsilon = c_v \varrho \theta, \quad p + \varepsilon = c_p \varrho \theta,$$

mit $c_p > c_v$. Zeige:

$$\eta = c_v \varrho \log \frac{p}{\varrho^\gamma} + \text{const} \cdot \varrho, \quad \gamma := \frac{c_p}{c_v}.$$

7.3 Lemma. Gegeben sei eine Entropie der Gestalt $\eta = \hat{\eta}(\varepsilon, u_1, \dots, u_N)$ mit beliebigen Größen u_1, \dots, u_N . Es sei $\eta'_{\varepsilon} > 0$ und $\eta'_{\varepsilon\varepsilon} \neq 0$. Sei

$$\theta(\varepsilon, u_1, \dots, u_N) := \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}(\varepsilon, u_1, \dots, u_N)},$$

$$f(\theta, u_1, \dots, u_N) := \varepsilon - \theta \eta(\varepsilon, u_1, \dots, u_N) \text{ für } \theta = \theta(\varepsilon, u_1, \dots, u_N).$$

Dann ist

$$f'_{\theta} = -\eta, \quad f'_{u_i} = -\theta \eta'_{u_i}$$

für $i = 1, \dots, N$ und außerdem gilt

$$f'_{\theta\theta} \eta'_{\varepsilon\varepsilon} = \theta^{-3} > 0.$$

Lösung. Aus $f = \varepsilon - \theta \eta$ folgt, wenn man bezüglich ε ableitet,

$$f'_{\theta} \theta'_{\varepsilon} = 1 - \theta \eta'_{\varepsilon} - \theta'_{\varepsilon} \eta = -\theta'_{\varepsilon} \eta,$$

also

$$f'_{\theta} = -\eta.$$

Die Ableitung bezüglich u_i ergibt

$$f'_{\theta} \theta'_{u_i} + f'_{u_i} = -\theta \eta'_{u_i} - \theta'_{u_i} \eta,$$

also wegen $f'_{\theta} = -\eta$

$$f'_{u_i} = -\theta \eta'_{u_i}.$$

□

Energie

7.4 Energieerhaltung. Sei μ_{ξ} wie in I.3.1 Lösung der Impulsgleichung wie dort. Zeige, dass dann für die kinetische Energie die Gleichung

$$\partial_t \left(\frac{m}{2} |v|^2 \mu_{\xi} \right) + \text{div} \left(\frac{m}{2} |v|^2 v \mu_{\xi} \right) = v \bullet f \mu_{\xi}$$

im Raum der Distributionen gilt.

IV Modellgleichungen

Nachdem wir die wesentlichen Prinzipien eingeführt haben, werden wir nun einige ausgewählte Beispiele angeben, bei denen die Objektivität und das Entropieprinzip bzw. die freie Energieungleichung benutzt werden. Wir werden darüberhinaus einige explizite Lösungen kennenlernen, die einen Einblick in die verschiedenen Anwendungen geben.

1 Ebbe und Flut

Wir untersuchen hier die Auswirkung des Gravitationsfeldes von Erde und Mond auf diese Himmelskörper selbst, und zwar betrachten wir dieses System vom Schwerpunkt aus und interpretieren dies als Inertialsystem. Wir hatten aber in II.3.9 schon darauf hingewiesen, dass der Begriff “Inertialsystem” nur approximativ zu verwenden ist. Wegen der physikalischen Bedeutung dieses Begriffes werden wir hier im Hinweis zu 1.1 darauf eingehen und uns die Frage stellen, was der Beobachter selbst tun kann, um Scheinkräfte nach Möglichkeit auszuschließen. Bei diesem Beispiel der Gravitation wird nur die Massen- und Impulserhaltung benutzt, wobei als zusätzliche Gleichung die Gravitation der beteiligten Körper verwendet wird.

So, we as observer with coordinates (t^*, x^*) see the two celestial bodies (*de*: Himmelskörper) from a certain position, let's say, $B_{\text{Erde}}(t^*) \subset \mathbb{R}^3$ is the domain occupied by the Earth and $B_{\text{Mond}}(t^*) \subset \mathbb{R}^3$ the one occupied by the Moon. The mass densities are $(t^*, x^*) \mapsto \varrho_{\text{Erde}}^*(t^*, x^*)$, which is positive in $B_{\text{Erde}}(t^*)$ and 0 outside $B_{\text{Erde}}(t^*)$, and $(t^*, x^*) \mapsto \varrho_{\text{Mond}}^*(t^*, x^*)$, which is positive in $B_{\text{Mond}}(t^*)$ and 0 outside $B_{\text{Mond}}(t^*)$. The total masses of Earth and Moon are given by

$$M_{\text{Erde}}(t^*) := \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_{\text{Erde}}^*(t^*, x^*) dx^*, \quad M_{\text{Mond}}(t^*) := \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_{\text{Mond}}^*(t^*, x^*) dx^* .$$

(Later in 1.1 we will show that the conservation of mass implies that M_{Erde} and M_{Mond} are constants.) Then

$$(t^*, x^*) \mapsto \varrho_{\text{Erde}}^*(t^*, x^*) + \varrho_{\text{Mond}}^*(t^*, x^*)$$

is the total mass distribution of Earth and Moon. The center of mass of the system (*de*: Schwerpunkt des Systems) we denote by x_0^* , defined by

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\varrho_{\text{Erde}}^*(t^*, x^*) + \varrho_{\text{Mond}}^*(t^*, x^*) \right) (x^* - x_0^*) dx^*. \quad (\text{IV1.1})$$

For this system the mass and momentum equations are in the sense of distributions (we use the formulation for L^∞ -functions)

$$\begin{aligned} \partial_{t^*} [\varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*] + \operatorname{div}_{x^*} [(\varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*)v^*] &= 0, \\ \partial_{t^*} [(\varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*)v^*] + \operatorname{div}_{x^*} [(\varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*)v^* v^{*\top} + \Pi^*] & \\ = [\mathfrak{g}(\varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*)\nabla\phi^*], & \quad (\text{IV1.2}) \\ \operatorname{div}_{x^*} (-[\nabla_{x^*}\phi^*]) = [\varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*], & \end{aligned}$$

where the last equation is the equation for the gravity field ϕ^* . That the gravity of Moon and Earth is the only force term $\mathbf{f}^* := \mathfrak{g}(\varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*)\nabla\phi^*$ means that the coordinate system (t^*, x^*) is supposed to be an inertial one (see the discussion in [II.3.9](#) and the one following [1.1](#)). It then follows (see [Lemma 1.1](#)) that the center of mass satisfies $\ddot{x}_0^* = 0$, and we will then normalize the inertial observer by an uniform motion (*de*: gleichförmige Bewegung) so that $x_0^* = 0$, that is, we let the observer be located at the center of mass.

Andere Effekte wie die Gravitation der Sonne haben wir vernachlässigt, sie ist zu berücksichtigen, wenn Erde, Mond und Sonne ungefähr auf einer Linie positioniert sind, und dann ist dies Ursache für eine Springflut (*en*: spring tide). Der wesentliche Grund für Ebbe und Flut ist also die Schwerkraft dieser beiden Himmelskörper selbst. Und daraus ergibt sich in Konsequenz, dass die hauptsächliche Ursache eine Kombination von Fliehkraft (*en*: centrifugal force) und Anziehungskraft (*de*: attractive force). (Hierzu siehe [Abb. 1](#), [\[Wikipedia: Tide\]](#), [\[Wikipedia: Marée\]](#), sowie [\[136\]](#).) Both forces are in fact related to each other, which is in some sense obvious since in the equations [\(IV1.2\)](#) there is only the \mathfrak{g} -term. We mention that we do not consider any varying temperature, the movement we treat is purely mechanical.

To come out with argumentations which are simpler, that is, they contain only the main effects, we make some special assumptions. We assume that Earth and Moon are both approximated by balls $B_{\text{Erde}}(t^*) = B_{R_{\text{Erde}}}(x_{\text{Erde}}^*(t^*))$ and $B_{\text{Mond}}(t^*) = B_{R_{\text{Mond}}}(x_{\text{Mond}}^*(t^*))$, where the mass densities $\varrho_{\text{Erde}}^*(t^*, \bullet)$ and $\varrho_{\text{Mond}}^*(t^*, \bullet)$ are constant in $B_{\text{Erde}}(t^*)$ resp. $B_{\text{Mond}}(t^*)$. Further it is assumed that v^* and Π^* is located in $B_{\text{Erde}}(t^*)$ resp. $B_{\text{Mond}}(t^*)$, where the bodies are rotating around themselves. It is shown in [16.5](#) that a rotation changes the shape of a celestial body. These rotations results for the Earth in a small change by around 3% of the ball, so we do not consider it here (or, which is not realistic, we assume that there is no rotation). Also we assume that the distance between Earth and Moon is constant. Indeed, the movement of them is like a Kepler ellipse (as in [I.3.3](#)), the distance

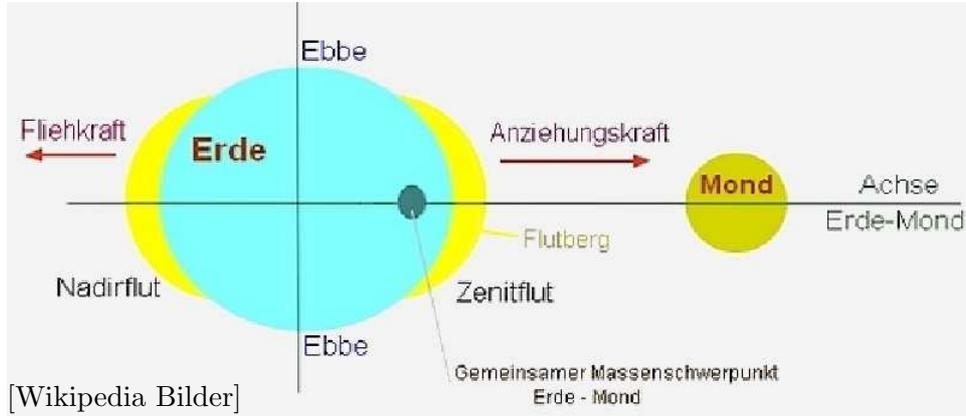


Abb. 1: Ebbe und Flut (beachte, dass die Erdachse geneigt ist)

varies between 356.400 km (perigee, *de*: Perigäum, Erdnähe) and 406.700 km (apogee, *de*: Apogäum, Erdferne), see [Wikipedia: Moon], but this difference in distance is only about 1.3%. To make things concrete, here is a list of constants:

$$\begin{aligned}
 R_{\text{Erde}} &= 6371.0 \text{ km} \text{ (this is the mean radius),} \\
 M_{\text{Erde}} &= 5.97219 \cdot 10^{24} \text{ kg,} \\
 R_{\text{Mond}} &= 1737.10 \text{ km} = 0.273 R_{\text{Erde}}, \\
 M_{\text{Mond}} &= 7.3457 \cdot 10^{22} \text{ kg} = 0.012300 M_{\text{Erde}}, \\
 |x_{\text{Erde}}^* - x_{\text{Mond}}^*| &= 384.402 \cdot 10^3 \text{ km (mean semi-major axis).}
 \end{aligned}$$

The potential ϕ^* can be split into $\phi^* = \phi_{\text{Erde}}^* + \phi_{\text{Mond}}^*$ with

$$\text{div}(-[\nabla\phi_{\text{Erde}}^*]) = [\varrho_{\text{Erde}}^*], \quad \text{div}(-[\nabla\phi_{\text{Mond}}^*]) = [\varrho_{\text{Mond}}^*]. \quad (\text{IV1.3})$$

First we show

1.1 Lemma. Under the assumptions above the equations (IV1.2) imply that the centers x_{Erde}^* and x_{Mond}^* fulfill the differential equations

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_{\text{Erde}}^* &= \mathfrak{g}\nabla\phi_{\text{Mond}}^*(\bullet, x_{\text{Erde}}^*), \\
 \ddot{x}_{\text{Mond}}^* &= \mathfrak{g}\nabla\phi_{\text{Erde}}^*(\bullet, x_{\text{Mond}}^*).
 \end{aligned}$$

The observer can be chosen so that $x_0^* = 0$ and then (IV1.1) reads

$$0 = M_{\text{Erde}}x_{\text{Erde}}^*(t^*) + M_{\text{Mond}}x_{\text{Mond}}^*(t^*), \quad (\text{IV1.4})$$

where M_{Erde} and M_{Mond} turn out to be constants.

Hinweis: Diese Wahl des Beobachters steht im Zusammenhang mit der Betrachtung eines “Inertialsystem” und wurde oben schon motiviert. Der hier betrachtete Beobachter wählt folgendes. 1. Position: Schwerpunkt von Erde und Mond. 2. Drehung: Orientierung an fernen Objekten. Er ist im Schwerpunkt von Erde und Mond und nach außen orientiert er sich nach fernen Himmelskörpern (nicht die Planeten und nicht die Sonne).

Beweis. Let $\varrho^* := \varrho_{\text{Erde}}^* + \varrho_{\text{Mond}}^*$ be the total mass. The mass and the momentum equation of (IV1.2) are in the weak sense for $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_{t^*} \eta + v^* \bullet \nabla \eta) \varrho^* d(t^*, x^*) \quad (\text{IV1.5})$$

and for $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_{t^*} \zeta \bullet (\varrho^* v^*) + \text{D}\zeta \bullet (\varrho^* v^* v^{*\text{T}} + \Pi^*)) d(t^*, x^*) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^4} \zeta \bullet (\mathfrak{g} \varrho^* \nabla \phi^*) d(t^*, x^*). \end{aligned} \quad (\text{IV1.6})$$

First we treat the mass equation. Let us look at the Earth, that is, we only consider test functions η with support in a neighbourhood of $B_{\text{Erde}}^*(t^*)$. Translating this to the center of the Earth

$$\begin{aligned} B_{R_{\text{Erde}}}(0) &= \{y \in \mathbb{R}^3; y + x_{\text{Erde}}^*(t^*) \in B_{\text{Erde}}^*(t^*)\}, \\ \tilde{\eta}(t^*, y) &:= \eta(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)), \\ \tilde{\varrho}^*(t^*, y) &:= \varrho^*(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)), \\ \tilde{v}^*(t^*, y) &:= v^*(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)), \end{aligned}$$

where $\tilde{\eta}$ has support in a neighbourhood of $\overline{B_{R_{\text{Erde}}}(0)}$. Since $\nabla_y \tilde{\eta} = \nabla_{x^*} \eta$ and $\partial_{t^*} \tilde{\eta} = \partial_{t^*} \eta + \dot{x}_{\text{Erde}}^*(t^*) \bullet \nabla_{x^*} \eta$ the transformed mass equation reads

$$0 = \int_{\mathbb{R}^4} \tilde{\varrho}^* (\partial_{t^*} \tilde{\eta} + (\tilde{v}^* - \dot{x}_{\text{Erde}}^*(t^*)) \bullet \nabla \tilde{\eta}) d(t^*, y).$$

We now choose $\tilde{\eta}(t^*, y) = b(t^*) \varphi(y)$ where $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ and $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ with $\varphi(y) = 1$ for $y \in B_{R_{\text{Erde}}}(0)$ and support in a neighbourhood of $B_{R_{\text{Erde}}}(0)$. With this the integral becomes since $\tilde{\varrho}^*$ vanishes outside $B_{R_{\text{Erde}}}(0)$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^4} \tilde{\varrho}^* \partial_{t^*} \tilde{\eta} d(t^*, y) = \int_{\mathbb{R}} b'(t^*) \underbrace{\int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \varrho^*(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)) dy}_{= M_{\text{Erde}}(t^*)} dt^*.$$

Since b is an arbitrary test function, it follows that M_{Erde} is constant. Next we choose $\tilde{\eta}(t^*, y) = a(t^*) \psi(y)$ with $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ and $\psi(y) = y$ for $y \in$

$B_{R_{\text{Erde}}}(0)$ and support in a neighbourhood of $B_{R_{\text{Erde}}}(0)$. Then the integral becomes

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^4} \tilde{\varrho}^* (\partial_{t^*} \tilde{\eta} + (\tilde{v}^* - \dot{x}_{\text{Erde}}^*) \bullet \nabla \tilde{\eta}) \, d(t^*, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \varrho_{\text{Erde}}^* (a'(t^*) \bullet y + (\tilde{v}^*(t^*, y) - \dot{x}_{\text{Erde}}^*(t^*)) \bullet a(t^*)) \, dy \, dt^* \\
&= \int_{\mathbb{R}} a'(t^*) \bullet \underbrace{\int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \varrho_{\text{Erde}}^* y \, dy}_{=0} \, dt^* \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} a(t^*) \bullet \left(\int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \varrho_{\text{Erde}}^* (\tilde{v}^*(t^*, y) - \dot{x}_{\text{Erde}}^*(t^*)) \, dy \right) \, dt^* \\
&= \int_{\mathbb{R}} a(t^*) \bullet \left(\frac{M_{\text{Erde}}}{L^3(B_{R_{\text{Erde}}}(0))} \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} (\tilde{v}^*(t^*, y) - \dot{x}_{\text{Erde}}^*(t^*)) \, dy \right) \, dt^* \\
&= M_{\text{Erde}} \int_{\mathbb{R}} a(t^*) \bullet \left(\frac{3}{4\pi R_{\text{Erde}}^3} \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(t^*)} v^*(t^*, x^*) \, dx^* - \dot{x}_{\text{Erde}}^*(t^*) \right) \, dt^*.
\end{aligned}$$

Since a is arbitrary we conclude

$$\dot{x}_{\text{Erde}}^*(t^*) = v_{\text{Erde}}^*(t^*) := \frac{3}{4\pi R_{\text{Erde}}^3} \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(t^*)} v^*(t^*, x^*) \, dx^*. \quad (\text{IV1.7})$$

Similar we obtain by looking at the Moon that M_{Mond} is constant and

$$\dot{x}_{\text{Mond}}^*(t^*) = v_{\text{Mond}}^*(t^*) := \frac{3}{4\pi R_{\text{Mond}}^3} \int_{B_{R_{\text{Mond}}}(t^*)} v^*(t^*, x^*) \, dx^*.$$

In these integrals an arbitrary rotation of Earth and Moon is included, because we assume that these bodies are spherically symmetric (but on the other hand a rotation leads to an ellipsoidal shape as shown by Newton, see 16.5).

We now come to the second and third equation of (IV1.2), the conservation of momentum paired with the gravitational law. According to the support of the Earth we write

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}(t^*, y) &:= \zeta(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)), \\
\tilde{\phi}^*(t^*, y) &:= \phi^*(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)), \\
\tilde{v}^*(t^*, y) &:= v^*(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)), \\
\tilde{\Pi}^*(t^*, y) &:= \Pi^*(t^*, y + x_{\text{Erde}}^*(t^*)),
\end{aligned}$$

where $\tilde{\zeta}$ has support in a neighbourhood of $B_{R_{\text{Erde}}}(0)$. Since $\Pi^* = \Pi_{\text{Erde}}^* + \Pi_{\text{Mond}}^*$, where Π_{Erde}^* concentrates on the Earth and Π_{Mond}^* on the Moon, we

obtain for the momentum equation

$$0 = \int_{\mathbb{R} \times B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \left(\partial_{t^*} \tilde{\zeta} \bullet (\varrho_{\text{Erde}}^* \tilde{v}^*) + D\tilde{\zeta} \bullet \left(\varrho_{\text{Erde}}^* \tilde{v}^* (\tilde{v}^* - \dot{x}_{\text{Erde}}^*)^T + \tilde{\Pi}_{\text{Erde}}^* \right) \right) d(t^*, y) + \int_{\mathbb{R} \times B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \tilde{\zeta} \bullet (\mathfrak{g} \varrho_{\text{Erde}}^* \nabla \tilde{\phi}^*) d(t^*, y).$$

Choose now $\tilde{\zeta}(t^*, y) := \psi(y)b(t^*)$ with $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ and $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ with support in a neighbourhood of $B_{R_{\text{Erde}}}(0)$ and $\psi(y) = 1$ for y in the closure of $B_{R_{\text{Erde}}}(0)$. With this the integral becomes (the term with $D\tilde{\zeta}$ vanishes)

$$0 = \int_{\mathbb{R}} b'(t^*) \bullet \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \varrho_{\text{Erde}}^* \tilde{v}^* dy dt^* + \int_{\mathbb{R}} b(t^*) \bullet \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \mathfrak{g} \varrho_{\text{Erde}}^* \nabla \tilde{\phi}^* dy dt^* \quad (\text{now do partial integration in } t^*) \\ = \int_{\mathbb{R}} b(t^*) \bullet \left(- \frac{d}{dt^*} \left(\int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \varrho_{\text{Erde}}^* \tilde{v}^* dy \right) + \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \mathfrak{g} \varrho_{\text{Erde}}^* \nabla \tilde{\phi}^* dy \right) dt^*.$$

Since b is an arbitrary test function we obtain

$$\frac{d}{dt^*} \left(\int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \varrho_{\text{Erde}}^* \tilde{v}^* dy \right) = \int_{B_{R_{\text{Erde}}}(0)} \mathfrak{g} \varrho_{\text{Erde}}^* \nabla \tilde{\phi}^* dy$$

or in the original coordinates

$$\frac{d}{dt^*} \left(\int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} \varrho_{\text{Erde}}^* v^* dx 1^* \right) = \int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} \mathfrak{g} \varrho_{\text{Erde}}^* \nabla \phi^* dx^*.$$

Using (IV.1.7) we remark that

$$\int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} \varrho_{\text{Erde}}^* v^* dx^* = \frac{3M_{\text{Erde}}}{4\pi R_{\text{Erde}}^3} \int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} v^* dx^* = M_{\text{Erde}} \dot{x}_{\text{Erde}}^*,$$

and we obtain

$$(M_{\text{Erde}} \dot{x}_{\text{Erde}}^*) \cdot = \int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} \mathfrak{g} \varrho_{\text{Erde}}^* \nabla \phi^* dx^* \\ = \frac{3\mathfrak{g}M_{\text{Erde}}}{4\pi R_{\text{Erde}}^3} \left(\underbrace{\int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} \nabla \phi_{\text{Erde}}^* dx^*}_{= 0 \text{ (siehe Text)}} + \int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} \nabla \phi_{\text{Mond}}^* dx^* \right).$$

Since $\nabla \phi_{\text{Erde}}^*(t^*, x^*) = C(x_{\text{Erde}}^*(t^*) - x^*)$ with a constant C by (I2.21), the first integral vanishes. Since $x^* \mapsto \phi_{\text{Mond}}^*(t^*, x^*)$ is harmonic in $B_{\text{Erde}}(t^*)$

hence also the components of $x^* \mapsto \nabla \phi_{\text{Mond}}^*(t^*, x^*)$ are harmonic, we conclude from the mean value property of harmonic functions

$$\frac{3}{4\pi R_{\text{Erde}}^3} \int_{B_{\text{Erde}}(t^*)} \nabla \phi_{\text{Mond}}^*(t^*, x^*) \, dx^* = \nabla \phi_{\text{Mond}}^*(t^*, x_{\text{Erde}}^*(t^*)).$$

Therefore

$$(M_{\text{Erde}} \dot{x}_{\text{Erde}}^*) \cdot (t^*) = \mathfrak{g} M_{\text{Erde}} \nabla \phi_{\text{Mond}}^*(t^*, x_{\text{Erde}}^*(t^*)).$$

In the same way it follows near the Moon

$$(M_{\text{Mond}} \dot{x}_{\text{Mond}}^*) \cdot (t^*) = \mathfrak{g} M_{\text{Mond}} \nabla \phi_{\text{Erde}}^*(t^*, x_{\text{Mond}}^*(t^*)),$$

and the sum of both terms is

$$\begin{aligned} & \mathfrak{g} (M_{\text{Erde}} \nabla \phi_{\text{Mond}}^*(t^*, x_{\text{Erde}}^*(t^*)) + M_{\text{Mond}} \nabla \phi_{\text{Erde}}^*(t^*, x_{\text{Mond}}^*(t^*))) \\ &= \mathfrak{g} M_{\text{Erde}} M_{\text{Mond}} \left(\frac{x_{\text{Mond}}^*(t^*) - x_{\text{Erde}}^*(t^*)}{4\pi D^3} + \frac{x_{\text{Erde}}^*(t^*) - x_{\text{Mond}}^*(t^*)}{4\pi D^3} \right) = 0, \end{aligned}$$

thus $\ddot{x}_0^* = 0$. Hence without producing a fictitious force the observer can be chosen so that $x_0^* = 0$. \square

Thus the two centers perform a movement in a two dimensional plane, which we called to be the (x_1^*, x_2^*) -plane. Since we assume a constant distance between Moon and Earth, $x_{\text{Mond}}^*(t^*) - x_{\text{Erde}}^*(t^*)$ moves on a circular line in the (x_1^*, x_2^*) -plane. This means that the eccentricity 0.0549 of the Moon is set to be zero.

1.2 Lemma. For a circular movement of $x_{\text{Mond}}^*(t^*) - x_{\text{Erde}}^*(t^*)$ in the (x_1^*, x_2^*) -plane we consider different variables with the transformation

$$\begin{aligned} t &= t^*, \quad x = Q(t^*)x^*, \\ Q(t^*) &= \begin{bmatrix} \cos(\omega t^*) & \sin(\omega t^*) & 0 \\ -\sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{IV1.8}$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{D^3}, \quad M := M_{\text{Erde}} + M_{\text{Mond}},$$

where D is the (constant) distance between Moon and Earth. Then

$$x_{\text{Erde}} := Q(t^*)x_{\text{Erde}}^*(t^*), \quad x_{\text{Mond}} := Q(t^*)x_{\text{Mond}}^*(t^*)$$

are constant vectors with

$$0 = M_{\text{Erde}}x_{\text{Erde}} + M_{\text{Mond}}x_{\text{Mond}}, \quad D := |x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|.$$

We can choose the coordinates so, that both points x_{Erde} and x_{Mond} lie on the x_1 -axis with negative value of x_{Erde} and positive value of x_{Mond} .

Beweis. From (IV1.4) it follows that

$$\frac{M}{M_{\text{Erde}}}x_{\text{Mond}}^*(t^*) = x_{\text{Mond}}^*(t^*) - x_{\text{Erde}}^*(t^*) = -\frac{M}{M_{\text{Mond}}}x_{\text{Erde}}^*(t^*). \quad (\text{IV1.9})$$

The differential equations for the motions of Earth and Moon are

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\text{Erde}}^* &= \mathfrak{g}\nabla\phi_{\text{Mond}}^*(\bullet, x_{\text{Erde}}^*) = GM_{\text{Mond}}\frac{x_{\text{Mond}}^* - x_{\text{Erde}}^*}{|x_{\text{Mond}}^* - x_{\text{Erde}}^*|^3} \\ &= \frac{GM_{\text{Mond}}}{D^3}(x_{\text{Mond}}^* - x_{\text{Erde}}^*) = -\frac{GM_{\text{Mond}}}{D^3}\frac{M}{M_{\text{Mond}}}x_{\text{Erde}}^*, \end{aligned}$$

hence

$$\ddot{x}_{\text{Erde}}^* = -\frac{GM}{D^3}x_{\text{Erde}}^*.$$

Similarly

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\text{Mond}}^* &= \mathfrak{g}\nabla\phi_{\text{Erde}}^*(\bullet, x_{\text{Mond}}^*) = GM_{\text{Mond}}\frac{x_{\text{Erde}}^* - x_{\text{Mond}}^*}{|x_{\text{Erde}}^* - x_{\text{Mond}}^*|^3} \\ &= \frac{GM_{\text{Mond}}}{D^3}(x_{\text{Erde}}^* - x_{\text{Mond}}^*) = -\frac{GM_{\text{Erde}}}{D^3}\frac{M}{M_{\text{Erde}}}x_{\text{Mond}}^*, \end{aligned}$$

hence

$$\ddot{x}_{\text{Mond}}^* = -\frac{GM}{D^3}x_{\text{Mond}}^*.$$

Since $D = |x_{\text{Erde}}^* - x_{\text{Mond}}^*|$ by assumption is constant,

$$\omega := \sqrt{\frac{GM}{D^3}}$$

defines a constant ω and the differential equations are satisfied for

$$\begin{aligned} x_{\text{Erde}}^*(t^*) &= Q^*x_{\text{Erde}}, \quad x_{\text{Mond}}^*(t^*) = Q^*x_{\text{Mond}}, \\ Q^* &= \begin{bmatrix} \cos(\omega t^*) & -\sin(\omega t^*) & 0 \\ \sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

with constant vectors x_{Erde} and x_{Mond} if the coordinate x_3^* is chosen appropriately. In fact, $\ddot{x}_{\text{Erde}}^* = -\omega^2x_{\text{Erde}}^*$ and $\ddot{x}_{\text{Mond}}^* = -\omega^2x_{\text{Mond}}^*$. If we let

$$Q(t^*) := Q^{*-1}$$

we have proved the assertion and $|x_{\text{Erde}}^* - x_{\text{Mond}}^*| = |x_{\text{Erde}} - x_{\text{Mond}}|$. \square

Thus in the new coordinates we turn with the same speed as the Moon surrounds the Earth, it is a period of approximately 27.3 days,

$$\omega_{\text{Mond}} = \frac{2\pi}{P_{\text{Mond}}}, \quad P_{\text{Mond}} = 27.321582 \text{ d} \quad (\text{“sidereal period”}).$$

However our ω is defined in a different way,

$$\omega = \frac{(GM)^{\frac{1}{2}}}{D^{\frac{3}{2}}} \text{ with } G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2},$$

$$M = M_{\text{Erde}} + M_{\text{Mond}} = 5.97219 \cdot 10^{24} \cdot (1 + 0.0123) kg,$$

$$D := |x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}| = 384399 km = 3.84399 \cdot 10^8 m,$$

so that

$$\omega = \frac{(6.67384 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97219 \cdot 10^{24} \cdot (1 + 0.0123))^{\frac{1}{2}}}{(3.84399 \cdot 10^8)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{s}$$

$$= \sqrt{\frac{6.67384 \cdot 5.97219 \cdot 1.0123}{(3.84399)^3 \cdot 10^{11}}} \frac{1}{s} = \frac{1}{3.7520 \cdot 10^5 s} = \frac{2\pi}{27.285 d} \approx \omega_{\text{Mond}}.$$

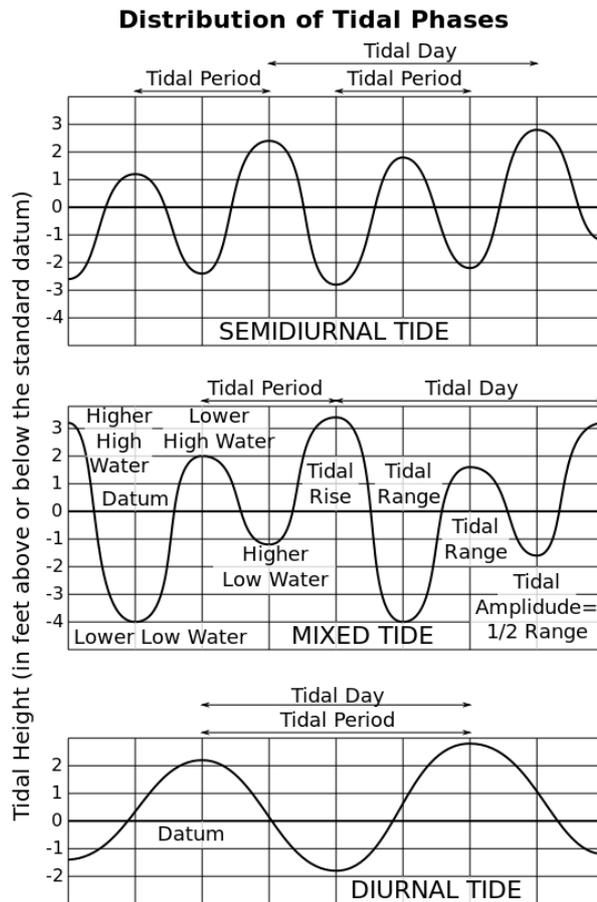


Abb. 2: Zeitlicher Ablauf von Ebbe und Flut (von Wikipedia).

Let us now focus again on the momentum equation near the Earth, which tells us more about the tidal period. In particular, it answers the question of

two high tides during a tidal day, which is due to a combination of centrifugal force and force of attraction, both induced by gravity.

1.3 Theorem. Let $d_{\text{Erde}} < 0 < d_{\text{Mond}}$, where $x_{\text{Erde}} = d_{\text{Erde}}\mathbf{e}_1$ and $x_{\text{Mond}} = d_{\text{Mond}}\mathbf{e}_1$, hence $M_{\text{Erde}}d_{\text{Erde}} + M_{\text{Mond}}d_{\text{Mond}} = 0$. Then the momentum equation in (IV1.2) near the Earth $B_{R_{\text{Erde}}}(x_{\text{Erde}})$ becomes

$$\begin{aligned}\partial_t(\varrho_{\text{Erde}}v) + \operatorname{div}_x(\varrho_{\text{Erde}}vv^{\text{T}} + \Pi_{\text{Erde}}) &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{f}_{\text{tide}} + \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Erde}} + 2\omega\varrho_{\text{Erde}}(-v_2, v_1, 0), \\ \mathbf{f}_{\text{tide}} &= \omega^2\varrho_{\text{Erde}}(x_1, x_2, 0) + \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Mond}}, \\ \omega^2 &= \frac{GM}{D^3}, \quad M = M_{\text{Erde}} + M_{\text{Mond}}, \quad D = d_{\text{Mond}} - d_{\text{Erde}},\end{aligned}$$

where \mathbf{f}_{tide} is the force induced by the gravity between Moon and Earth.

Remark: The explicit form of \mathbf{f}_{tide} will be shown in 1.4.

Beweis. The momentum equation in (IV1.2) in a neighbourhood of the Earth reads

$$\partial_{t^*}(\varrho_{\text{Erde}}^*v^*) + \operatorname{div}_{x^*}(\varrho_{\text{Erde}}^*v^*v^{*\text{T}} + \Pi_{\text{Erde}}^*) = \mathbf{f}^* := \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}^*\nabla\phi^*,$$

where $\phi^* = \phi_{\text{Erde}}^* + \phi_{\text{Mond}}^*$ is the gravity potential of Earth and Moon. We transform the coordinates to $(t, x) = Y(t^*, x^*) = (t^*, Q(t^*)x^*)$, where $Q(t^*)$ is defined in 1.2. Then the transformed momentum equation is

$$\partial_t(\varrho_{\text{Erde}}v) + \operatorname{div}_x(\varrho_{\text{Erde}}vv^{\text{T}} + \Pi_{\text{Erde}}) = \mathbf{f},$$

where the quantities are given by

$$\begin{aligned}\varrho \circ Y &= \varrho^*, \quad \phi \circ Y = \phi^*, \\ v \circ Y &= \dot{X} + Qv^*, \quad \Pi \circ Y = Q\Pi^*Q^{\text{T}},\end{aligned}$$

and where \mathbf{f} is given by (not writing arguments)

$$\begin{aligned}\mathbf{f} \circ Y &= \varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) + Q\mathbf{f}^*, \\ \varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*) &= \varrho^*(\ddot{X} + 2\dot{Q}Q^{\text{T}}(v - \dot{X})) \\ &= \varrho((\ddot{Q} - 2\dot{Q}Q^{\text{T}}\dot{Q})x^* + 2\dot{Q}Q^{\text{T}}v) \\ &= \varrho((\ddot{Q}Q^{\text{T}} - 2(\dot{Q}Q^{\text{T}})^2)x + 2\dot{Q}Q^{\text{T}}v), \\ Q\mathbf{f}^* &= \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}^*Q\nabla\phi^* = \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi \\ &= \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Erde}} + \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Mond}}.\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \varrho_{\text{Erde}}((\ddot{Q}Q^{\text{T}} - 2(\dot{Q}Q^{\text{T}})^2)x + 2\dot{Q}Q^{\text{T}}v) \\ &\quad + \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Erde}} + \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Mond}} \\ &= \mathbf{f}_{\text{tide}} + 2\varrho_{\text{Erde}}\dot{Q}Q^{\text{T}}v + \mathfrak{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Erde}},\end{aligned}$$

where

$$\mathbf{f}_{tide} := \varrho_{\text{Erde}}(\ddot{Q}Q^T - 2(\dot{Q}Q^T)^2)x + \mathbf{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Mond}}.$$

Since $t^* \mapsto Q(t^*)$ is given, we compute

$$\begin{aligned} \ddot{Q}Q^T - 2(\dot{Q}Q^T)^2 &= \omega^2 I, & 2\dot{Q}Q^T &= 2\omega A, \\ I &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A &:= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ Ix &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, & Av &= \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Therefore we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}_{tide} + 2\omega\varrho_{\text{Erde}}(-v_2, v_1, 0) + \mathbf{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Erde}}, \\ \mathbf{f}_{tide} &= \omega^2\varrho_{\text{Erde}}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{g}\varrho_{\text{Erde}}\nabla\phi_{\text{Mond}}. \end{aligned}$$

□

On the surface of the Earth \mathbf{f}_{tide} has besides a term which shows in the direction of the normal two terms, which are directed towards the two vectors $(R_{\text{Erde}}, 0, 0)$ and $(-R_{\text{Erde}}, 0, 0)$ in an almost symmetric way.

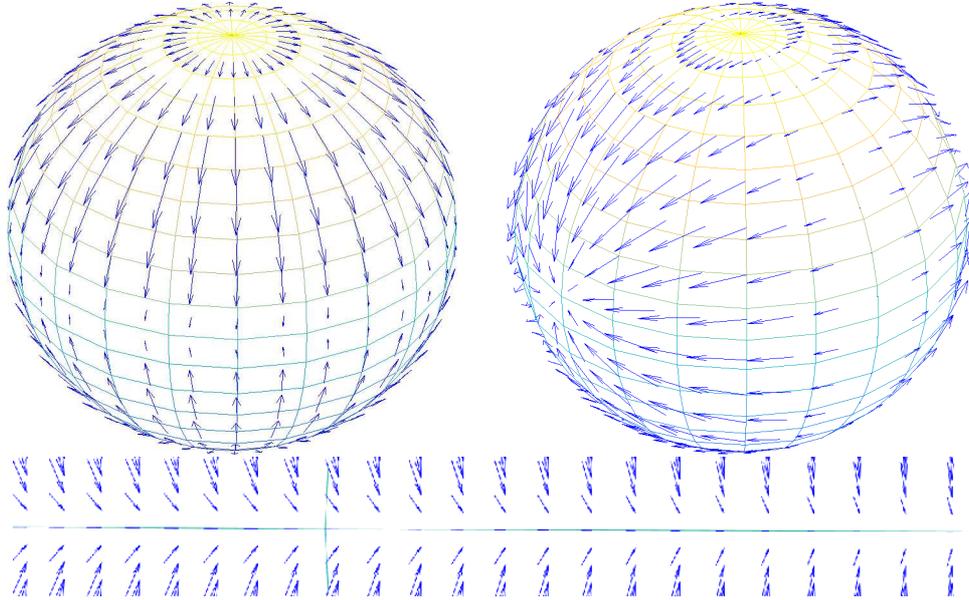


Abb. 3: Kraftbestandteile auf der Erdoberfläche, Darstellung der tangentialen Bestandteile. *Links*: Gesamtes \mathbf{a}_{tide} . *Unten*: Ausschnitt nahe der Ebene der Mondbahn. *Rechts*: Der erste Teil von \mathbf{a}_{tide} .

1.4 Lemma. With $x = x_{\text{Erde}} + R_{\text{Erde}}\xi$ with $|\xi| = 1$ the tidal acceleration \mathbf{a}_{tide} defined by

$$\mathbf{f}_{\text{tide}} = \varrho_{\text{Erde}} \mathbf{a}_{\text{tide}}$$

satisfies the following identity:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{tide}}(x) = & \left(\frac{GM_{\text{Mond}}}{|x_{\text{Mond}} - x|^3} - \frac{GM_{\text{Mond}}}{|x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} \right) \begin{bmatrix} |x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & - \frac{GM R_{\text{Erde}}}{|x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + R_{\text{Erde}} \left(\frac{GM}{|x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} - \frac{GM_{\text{Mond}}}{|x_{\text{Mond}} - x|^3} \right) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis. Writing $x = x_{\text{Erde}} + R_{\text{Erde}}\xi$ with $|\xi| \leq 1$ one obtains

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{tide}} &= \frac{\mathbf{f}_{\text{tide}}}{\varrho_{\text{Erde}}} = \omega^2(x_1, x_2, 0) + \mathfrak{g} \nabla \phi_{\text{Mond}} \\ &= \frac{GM}{|x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3}(x_1, x_2, 0) + \frac{GM_{\text{Mond}}}{|x_{\text{Mond}} - x|^3}(x_{\text{Mond}} - x), \end{aligned}$$

hence

$$\frac{\mathbf{a}_{\text{tide}}}{GM_{\text{Mond}}} = \frac{M}{M_{\text{Mond}} |x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{|x_{\text{Mond}} - x|^3} \begin{bmatrix} d_{\text{Mond}} - x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

Since

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{\text{Erde}} + R_{\text{Erde}}\xi_1 \\ R_{\text{Erde}}\xi_2 \\ R_{\text{Erde}}\xi_3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad -\frac{M}{M_{\text{Mond}}} d_{\text{Erde}} = d_{\text{Mond}} - d_{\text{Erde}}$$

by (IV1.9), this is

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{M_{\text{Mond}} |x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} \begin{bmatrix} d_{\text{Erde}} + R_{\text{Erde}}\xi_1 \\ R_{\text{Erde}}\xi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{|x_{\text{Mond}} - x|^3} \begin{bmatrix} d_{\text{Mond}} - d_{\text{Erde}} - R_{\text{Erde}}\xi_1 \\ -R_{\text{Erde}}\xi_2 \\ -R_{\text{Erde}}\xi_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{|x_{\text{Mond}} - x|^3} - \frac{1}{|x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} \right) \begin{bmatrix} d_{\text{Mond}} - d_{\text{Erde}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &- \frac{M}{M_{\text{Mond}} |x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{\text{Erde}}\xi_3 \end{bmatrix} \\ &+ \left(\frac{M}{M_{\text{Mond}} |x_{\text{Mond}} - x_{\text{Erde}}|^3} - \frac{1}{|x_{\text{Mond}} - x|^3} \right) \begin{bmatrix} R_{\text{Erde}}\xi_1 \\ R_{\text{Erde}}\xi_2 \\ R_{\text{Erde}}\xi_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

In Abbildung Abb. 3 ist die tangentielle Kraft gezeigt. Der Anteil der normal zur Oberfläche wirkenden Kraft ist auf der Erdoberfläche nicht vom Gravitationsfeld der Erde zu unterscheiden, er ist vielmehr von dieser abzuziehen (was eine Störung der Erdanziehung von der Größe $\leq 10^{-4} \frac{m}{s^2}$ bedeutet, siehe hierzu das Ende von Abschnitt I.4).

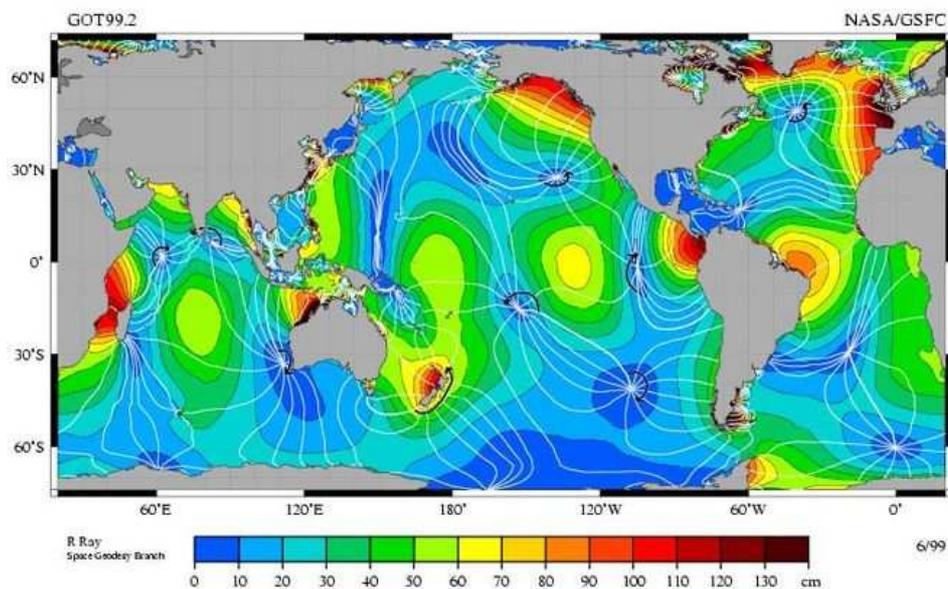


Abb. 4: Ebbe und Flut mit Land-Wasser Verteilung.

Bei der Auswirkung der Gezeiten auf den Meeresspiegel ist zu berücksichtigen, dass die Erde pro Tag eine Drehung um die eigene Achse macht, wobei die Erdachse nicht senkrecht auf der Verbindung Erde-Mond (in Abb. 1 gezeigt) steht, sondern gegenüber der Bahn des Mondes geneigt ist. Deshalb ist der Einfluß nicht einfach zu berechnen, zumal auch die Landverteilung in der Realität zur Höhe des Meeresspiegels beiträgt (siehe Abb. 4). Die Erdrotation hat auch zur Folge, dass in jedem auch inneren Punkt der Erde der Abstand vom Mond innerhalb eines Tages variiert und somit die Kraft auf den betreffenden Punkt nicht konstant ist. Das hat wiederum zur Konsequenz, dass die Erde permanent etwas “durchgeknetet” wird und dadurch Wärme entsteht.

2 Flüssigkeitsgleichung

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen für eine Flüssigkeit oder Gas, d.h. die Gleichungen für Masse, Impuls und Energie behandelt. Wir hatten diese Gleichungen schon in (III.2.5) betrachtet und sie hatten für

$$\mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{r} = 0, \quad \Pi \text{ symmetrisch}, \quad g = 0 \quad (\text{IV.2.1})$$

(diese spezielle Struktur ist möglich aufgrund der Objektivität dieser Größen) folgende Gestalt:

Masse-Impuls-Energie System:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= v \bullet \mathbf{f} \end{aligned}$$

(IV.2.2)

ϱ Masse, v Geschwindigkeit, ϱv Impuls,
 ε innere Energie, $e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ gesamte Energie,
 Π Drucktensor, q Wärmefluss, \mathbf{f} Kraft.

Es sind hier $(\varrho, v, \varepsilon)$ die gesuchten Variablen, und für Π und q setzen wir konstitutive Gleichungen an (wegen der vorausgesetzten Symmetrie von Π muss gelten $\Pi^T = \Pi$), die Beschränkungen unterworfen sind aufgrund des Entropieprinzips, welches wir in III.2.4 betrachtet hatten. Dieses Entropieprinzip hat einerseits Gleichungen und andererseits auch eine residuale Ungleichung zur Folge. Und es besteht die Möglichkeit alles mit Hilfe der Temperatur (siehe III.1.4 bzw. III.1.6)

$$\theta = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}(\varrho, \varepsilon)}, \quad \eta'_{\varepsilon}(\varrho, \varepsilon) > 0$$

statt ε auszudrücken. Es sind also statt $(\varrho, v, \varepsilon)$ nun (ϱ, v, θ) die unbekanntenen Variablen. Wir setzen die Bijektivität dieser Transformation voraus. Außerdem definieren wir die innere freie Energie f in den neuen Variablen (ϱ, θ) durch (siehe ebenfalls III.1.4 bzw. III.1.6)

$$f = \varepsilon - \theta \eta, \quad (\text{IV.2.3})$$

genauer, da $f = \hat{f}(\varrho, \theta)$,

$$\hat{f}(\varrho, \theta) = \varepsilon - \theta \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon) \quad \text{für} \quad \theta \hat{\eta}'_{\varepsilon}(\varrho, \varepsilon) = 1. \quad (\text{IV.2.4})$$

Da $\eta = -f'_{\theta}$ (siehe 2.1 unten) schreiben wir ε in den neuen Koordinaten

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta) = \hat{f}(\varrho, \theta) - \theta \hat{f}'_{\theta}(\varrho, \theta),$$

und für die Gibbs Relation (siehe 2.1 unten) ebenfalls in den neuen Koordinaten

$$p = \hat{p}(\varrho, \theta) = \varrho \hat{f}'_{\varrho}(\varrho, \theta) - \hat{f}(\varrho, \theta).$$

Zur Vollständigkeit zeigen wir die benutzten Gleichungen mit einer Äquivalenz.

2.1 Gibbs Relation. Es sei $\eta = \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ sowie $f = \hat{f}(\varrho, \theta)$ mit $\theta > 0$. Es gelte (IV2.3), wobei die Variablen ε und θ voneinander abhängen. Dann sind die Gleichungen

$$\eta - \varrho \eta'_{\varrho} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} = 0, \quad \theta \eta'_{\varepsilon} = 1 \quad (\text{IV2.5})$$

äquivalent zu

$$p = \varrho f'_{\varrho} - f, \quad \varepsilon = f - \theta f'_{\theta}. \quad (\text{IV2.6})$$

Hierbei gilt neben (IV2.3)

$$f'_{\theta} = -\eta, \quad f'_{\varrho} = -\theta \eta'_{\varrho}.$$

Erläuterung: Die Annahme an ε und θ bedeutet $\theta = \hat{\theta}(\varrho, \varepsilon)$ und $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta)$, wobei $\theta \mapsto \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta)$ die Umkehrabbildung von $\varepsilon \mapsto \hat{\theta}(\varrho, \varepsilon)$ ist.

Beweis (IV2.5) \Rightarrow (IV2.6). Wir schreiben zunächst die Gleichung (IV2.5) für η mit Hilfe von $\eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}$ um

$$\theta(\eta - \varrho \eta'_{\varrho}) - (\varepsilon + p) = 0$$

oder

$$p = \theta(\eta - \varrho \eta'_{\varrho}) - \varepsilon = -\varrho \theta \eta'_{\varrho} - f$$

wobei wir die Definition von f benutzt haben, aus der auch

$$\varepsilon = f + \theta \eta \quad (\text{IV2.7})$$

folgt. Wir haben also in den Gleichungen für p und ε nur noch

$$\eta = -f'_{\theta}, \quad \theta \eta'_{\varrho} = -f'_{\varrho} \quad (\text{IV2.8})$$

einzusetzen. Diese beiden Gleichungen erhalten wir, wenn wir die Definition (IV2.7) von f

$$\hat{f}(\varrho, \theta) = \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta) - \theta \hat{\eta}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta))$$

ableiten, denn dann gilt

$$\begin{aligned} f'_{\theta} &= \varepsilon'_{\theta} - \theta \eta'_{\varepsilon} \varepsilon'_{\theta} - \eta = (1 - \theta \eta'_{\varepsilon}) \varepsilon'_{\theta} - \eta = -\eta, \\ f'_{\varrho} &= \varepsilon'_{\varrho} - \theta \eta'_{\varrho} - \theta \eta'_{\varepsilon} \varepsilon'_{\varrho} = (1 - \theta \eta'_{\varepsilon}) \varepsilon'_{\varrho} - \theta \eta'_{\varrho} = -\theta \eta'_{\varrho}, \end{aligned}$$

also die beiden Gleichungen (IV2.8). \square

Beweis (IV2.6) ⇒ (IV2.5). Wir benutzen die Gleichung für die freie Energie und die Gleichung für ε

$$\theta\eta = \varepsilon - f = -\theta f'_{\theta}$$

um $\eta = -f'_{\theta}$ zu erhalten. Dann schreiben wir die Gleichung für die freie Energie in der Form, indem wir $\theta = \widehat{\theta}(\varrho, \varepsilon)$ schreiben,

$$f(\varrho, \widehat{\theta}(\varrho, \varepsilon)) = \varepsilon - \widehat{\theta}(\varrho, \varepsilon)\eta(\varrho, \varepsilon)$$

und berechnen die Ableitung nach ε

$$f'_{\theta}\theta'_{\varepsilon} = 1 - \theta'_{\varepsilon}\eta - \theta\eta'_{\varepsilon},$$

was wegen $\eta = -f'_{\theta}$ die Identität $1 = \theta\eta'_{\varepsilon}$ ergibt. Bilden wir die Ableitung nach ϱ

$$f'_{\varrho} + f'_{\theta}\theta'_{\varrho} = -\theta'_{\varrho}\eta - \theta\eta'_{\varrho},$$

so erhalten wir analog $f'_{\varrho} = -\theta\eta'_{\varrho}$. Die Darstellung von p ergibt darum wieder unter Benutzung der Gleichung für die freie Energie

$$p = \varrho f'_{\varrho} - f = \varrho f'_{\varrho} + \theta\eta - \varepsilon = \theta(\eta - \varrho\eta'_{\varrho}) - \varepsilon.$$

Also haben wir gezeigt

$$\theta\eta'_{\varepsilon} = 1, \quad \theta(\eta - \varrho\eta'_{\varrho}) - (p + \varepsilon) = 0,$$

was zu beweisen war. \square

Die Gibbs'sche Relation in 2.1 folgt aus dem Entropieprinzip. Dieses Prinzip ist wesentlich gerade für Flüssigkeitsgleichungen und motiviert uns, dass wir diesen wichtigen Fall nochmal formulieren, d.h. eine Version von III.2.4 ist die folgende

2.2 Entropietheorem. Für das System (IV2.2) ist die Entropieungleichung

$$\sigma := \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \geq 0$$

erfüllt, wenn $f = \widehat{f}(\varrho, \theta)$ mit $\theta > 0$ und

$$\Pi = p\operatorname{Id} - S, \quad S \text{ symmetrisch,}$$

$$p = \varrho f'_{\varrho} - f, \quad \varepsilon = f - \theta f'_{\theta},$$

und wenn für die Entropie inklusive Fluss und Produktion gilt

$$\eta = -f'_{\theta}, \quad \psi = \eta v + \frac{1}{\theta} q,$$

$$\sigma = \frac{1}{\theta} Dv \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q \geq 0. \quad (\text{IV2.9})$$

Bemerkungen: Es gehört (IV2.3) wieder zu den Voraussetzungen. Der Stresstensor S ist symmetrisch wegen der allgemeinen Voraussetzungen (IV2.1).

Es sei bemerkt, dass die Darstellung $\Pi = p\text{Id} - S$ sozusagen nur aus dem Entropieprinzip folgert. Der Spannungstensor S ist definiert in der Residualungleichung für σ , siehe (IV2.10), und hat daher nur die Ungleichung (IV2.9) zu erfüllen. Bei dieser Prozedur fiel die Definition des Druckes p in der Gibbs Relation (IV2.5) ab.

Beweis (mit ε -Variabler). Es ist (wie im Beweis von III.1.3)

$$\begin{aligned}\sigma &= \partial_t \eta + \text{div} \psi \quad (\text{wenn } \psi = \eta v + \psi_0 \text{ ist}) \\ &= \partial_t \eta + v \bullet \nabla \eta + \eta \text{div} v + \text{div} \psi_0 \\ &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \text{div} v + \text{div} \psi_0 \quad (\text{wenn } \overset{\circ}{h} := (\partial_t + v \bullet \nabla) h \text{ ist}).\end{aligned}$$

Wir nehmen an (siehe auch III.1.6), dass (ϱ, ε) unabhängige Variablen sind, und dass $\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ ist. Dann gilt

$$\overset{\circ}{\eta} = \eta'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon},$$

und da aus den Differentialgleichungen für ϱ und ε folgt (siehe III.2.3)

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varrho} + \varrho \text{div} v &= 0, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \text{div} v + \text{div} q &= -Dv \bullet \Pi,\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \text{div} v + \text{div} \psi_0 = \eta'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \text{div} v + \text{div} \psi_0 \\ &= Dv \bullet \left((\eta - \eta'_{\varrho} \varrho - \eta'_{\varepsilon} \varepsilon) \text{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi \right) - \eta'_{\varepsilon} \text{div} q + \text{div} \psi_0 \\ &= Dv \bullet \widetilde{S} + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q + \text{div}(\psi_0 - \eta'_{\varepsilon} q),\end{aligned}$$

wenn

$$\widetilde{S} := (\eta - \eta'_{\varrho} \varrho - \eta'_{\varepsilon} \varepsilon) \text{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi, \quad (\text{IV2.10})$$

und wenn $\psi_0 = \eta'_{\varepsilon} q$. Wenn also

$$\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon), \quad \psi = \eta v + \eta'_{\varepsilon} q,$$

so ist das Entropieprinzip $\sigma \geq 0$ erfüllt, falls

$$\sigma = Dv \bullet \widetilde{S} + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \geq 0.$$

Aus 2.1 folgt nun mit der Darstellung von Π , dass

$$\theta = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}}, \quad \eta'_{\varepsilon} > 0, \quad \eta - \varrho \eta'_{\varrho} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} = 0,$$

so dass also

$$\widetilde{S} := \eta'_{\varepsilon} (p \text{Id} - \Pi) = \eta'_{\varepsilon} S = \frac{1}{\theta} S,$$

was zu zeigen war. \square

Der nun folgende Beweis argumentiert nur mit der Variablen θ .

Beweis (mit θ -Variabler). Es gilt zunächst wie im ersten Beweis

$$\begin{aligned}\sigma &= \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \quad (\text{wenn } \psi = \eta v + \psi_0 \text{ ist}) \\ &= \partial_t \eta + v \bullet \nabla \eta + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 \\ &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 \quad (\text{wenn } \overset{\circ}{h} := (\partial_t + v \bullet \nabla) h \text{ ist}).\end{aligned}$$

Die Darstellung $\eta = -f'_{\theta}$ bedeutet $\eta = \tilde{\eta}(\varrho, \theta) := -f'_{\theta}(\varrho, \theta)$, weshalb nun

$$\overset{\circ}{\eta} = \eta'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \eta'_{\theta} \overset{\circ}{\theta}.$$

Aus den Differentialgleichungen für ϱ und ε folgt wieder

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varrho} + \varrho \operatorname{div} v &= 0, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q &= -Dv \bullet \Pi.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(\varrho, \theta) := f(\varrho, \theta) - \theta f'_{\theta}(\varrho, \theta)$ ist jetzt

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \varepsilon'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \varepsilon'_{\theta} \overset{\circ}{\theta}$$

und wegen $\eta = \tilde{\eta}(\varrho, \theta) := -f'_{\theta}(\varrho, \theta)$ ist daher

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\eta} &= \eta'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho} + \frac{\eta'_{\theta}}{\varepsilon'_{\theta}} (\overset{\circ}{\varepsilon} - \varepsilon'_{\varrho} \overset{\circ}{\varrho}) \\ &= \left(\eta'_{\varrho} - \varepsilon'_{\varrho} \frac{\eta'_{\theta}}{\varepsilon'_{\theta}} \right) \overset{\circ}{\varrho} + \frac{\eta'_{\theta}}{\varepsilon'_{\theta}} \overset{\circ}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\eta'_{\varrho} &= -f'_{\theta\varrho}, \quad \eta'_{\theta} = -f'_{\theta\theta}, \\ \varepsilon'_{\varrho} &= f'_{\varrho} - \theta f'_{\theta\varrho}, \quad \varepsilon'_{\theta} = -\theta f'_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\overset{\circ}{\eta} = -\frac{f'_{\varrho}}{\theta} \overset{\circ}{\varrho} + \frac{1}{\theta} \overset{\circ}{\varepsilon}$$

und es folgt wie im obigen Beweis

$$\begin{aligned}\sigma &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 = -\frac{f'_{\varrho}}{\theta} \overset{\circ}{\varrho} + \frac{1}{\theta} \overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 \\ &= Dv \bullet \left(\left(\eta + \frac{f'_{\varrho}\varrho}{\theta} - \frac{1}{\theta} \varepsilon \right) \operatorname{Id} - \frac{1}{\theta} \Pi \right) - \frac{1}{\theta} \operatorname{div} q + \operatorname{div} \psi_0 \\ &= \frac{1}{\theta} Dv \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q + \operatorname{div} (\psi_0 - \frac{1}{\theta} q) \\ &= \frac{1}{\theta} Dv \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q,\end{aligned}$$

falls

$$\begin{aligned}\Pi &= p \operatorname{Id} - S, \quad \psi_0 = \frac{1}{\theta} q, \\ \frac{p}{\theta} &= \eta + \frac{f'_{\varrho}\varrho}{\theta} - \frac{1}{\theta} \varepsilon,\end{aligned}$$

wobei die letzte Identität gleich

$$p = \theta \eta + f'_{\varrho}\varrho - \varepsilon = f'_{\varrho}\varrho - f$$

ist. *Hinweis:* Es sei bemerkt, dass wir verschiedene Abhängigkeiten in der Entropie

$$\eta = \hat{\eta}(\varrho, \varepsilon) = \tilde{\eta}(\varrho, \theta)$$

hatten, also ist $\eta'_{\varrho} = \widehat{\eta}'_{\varrho}(\varrho, \varepsilon)$ von $\eta'_{\varrho} = \widetilde{\eta}'_{\varrho}(\varrho, \theta)$ verschieden (eigentlich müssten diese Ableitungen mit $\widehat{\eta}'_{\varrho}$ und $\widetilde{\eta}'_{\varrho}$ bezeichnet werden), obwohl wir beides in verschiedenem Zusammenhang gleich bezeichnet hatten. In der Physikk-literatur sorgt die folgende Definition für eine eindeutige Interpretation:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\right)_{\varepsilon} := \widehat{\eta}'_{\varrho} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\right)_{\theta} := \widetilde{\eta}'_{\varrho}.$$

Es werden als Index die Variablen genannt, die konstant gehalten werden. Dies definiert in eindeutiger Weise das Koordinatensystem (das sind diese Variablen plus die Variable, bezüglich der die Ableitung genommen wird). \square

Wir haben also gezeigt, dass das Entropieprinzip für Lösungen von (IV2.2) erfüllt ist, falls in den Differentialgleichungen

$$\Pi = p\text{Id} - S, \quad p = \varrho f'_{\varrho} - f, \quad \varepsilon = f - \theta f'_{\theta} \quad (\text{IV2.11})$$

gilt, und für die Entropieproduktion

$$\sigma = \frac{1}{\theta} \text{D}v \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q \geq 0 \quad (\text{IV2.12})$$

erfüllt ist. Es bleibt also in (IV2.12) der Stresstensor S und der Wärmefluss q so zu wählen, dass $\sigma \geq 0$, was zum Beispiel erfüllt ist, wenn

$$\text{D}v \bullet S \geq 0, \quad \nabla \left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q \geq 0. \quad (\text{IV2.13})$$

Der einfachste Fall ist dabei, siehe III.2.5, dass

Linearer Stresstensor:

$$S = 2\widehat{a}(\varrho, \theta) (\text{D}v)^S + \widehat{b}(\varrho, \theta) \text{div}(v)\text{Id},$$

$$a \geq 0, \quad b + \frac{2a}{n} \geq 0$$

Lineare Wärmeleitung:

$$q = -\widehat{c}(\varrho, \theta) \nabla \theta, \quad c \geq 0$$

(IV2.14)

a Scherviskosität,

$b + \frac{2}{n}a$ Volumenviskosität,

c Wärmeleitfähigkeit.

Mit dieser Wahl von S und q lauten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 & \textbf{Flüssigkeitsgleichungen:} \\
 & \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0, \\
 & \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + p \operatorname{Id} - S) = \mathbf{f}, \\
 & \partial_t e + \operatorname{div}((e + p)v - Sv + q) = v \bullet \mathbf{f}
 \end{aligned} \tag{IV2.15}$$

$$\begin{aligned}
 p &= \varrho f'_{\varrho} - f, \quad e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2, \quad \varepsilon = f - \theta f'_{\theta}, \\
 f &= \widehat{f}(\varrho, \theta), \quad S \text{ und } q \text{ erfüllen (IV2.14)}.
 \end{aligned}$$

Oder anders geschrieben, mit $\overset{\circ}{h} = \partial_t h + v \bullet \nabla h$ für jede Funktion h , wenn wir die Gleichung III.2.2 für die kinetische Energie benutzen,

$$\begin{aligned}
 & \textbf{Flüssigkeitsgleichungen:} \\
 & \overset{\circ}{\varrho} + \varrho \operatorname{div} v = 0, \\
 & \varrho \overset{\circ}{v} + \nabla p - \operatorname{div} S = \mathbf{f}, \\
 & \overset{\circ}{\varepsilon} + (\varepsilon + p) \operatorname{div} v + \operatorname{div} q = Dv \bullet S
 \end{aligned} \tag{IV2.16}$$

$$\begin{aligned}
 p &= \varrho f'_{\varrho} - f \text{ Druck,} \quad \varepsilon = f - \theta f'_{\theta} \text{ innere Energie,} \\
 f &= \widehat{f}(\varrho, \theta) \text{ innere freie Energie,} \\
 S \text{ und } q &\text{ erfüllen (IV2.14).}
 \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass $\overset{\circ}{v} = \partial_t v + v \bullet \nabla v$ ein quadratischer Term in v ist.

2.3 Lemma. Beweise die Aussagen (IV2.15) und (IV2.16).

Beweis (IV2.15). Siehe den obigen Text. □

Beweis (IV2.16). Siehe III.2.3. Wir wiederholen: Für die kinetische Energie haben wir nach III.2.2 für Lösungen der Massen- und Impulserhaltung

$$\partial_t \left(\frac{\varrho}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\varrho}{2} |v|^2 v + \Pi^T v \right) = v \bullet \mathbf{f} + Dv \bullet \Pi. \tag{IV2.17}$$

Ziehen wir dies von der Energiegleichung für $e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ ab, so erhalten wir

$$\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) = -(Dv)^S \bullet \Pi$$

und da $\overset{\circ}{\varepsilon} = \partial_t \varepsilon + v \bullet \nabla \varepsilon$

$$\overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q = -(Dv)^S \bullet \Pi.$$

Wegen $\Pi = p\text{Id} - S$ wird diese Gleichung zu

$$\overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q = -p \operatorname{div} v + (Dv)^S \bullet S.$$

Die Symmetrie von S gibt $(Dv)^S \bullet S = Dv \bullet S$. Das ist die Behauptung. \square

Im allgemeinen Fall kann im Einklang mit dem Entropieprinzip der Stress-tensor auch nichtlinear von $(Dv)^S$ abhängen, so etwa in der Rheologie, siehe [[Wikipedia: Rheologie](#)] (*en*: [[Wikipedia: Rheology](#)]). Siehe auch das Dirichlet-Problem in Abschnitt 3.

Ideale Gase

Die Wahl der Entropie η bzw. der freien Energie f ist entscheidend für die Art der Flüssigkeit oder des Gases, welches wir in Betracht ziehen wollen. Der bekannteste Fall ist das "Ideale Gasgesetz" (siehe [[Wikipedia: Ideal gas](#)]), welches wir als mikroskopische Gleichung verstehen wollen:

$$\boxed{\begin{aligned} PV = mRT, \quad p = P, \quad \varrho = \frac{m}{V}, \quad \theta = T, \\ U = c_V T, \quad U = \varepsilon^{\text{sp}} = \frac{\varepsilon}{\varrho}, \quad R = c_P - c_V > 0, \end{aligned}} \quad (\text{IV2.18})$$

wobei c_V und c_P positive Konstanten sind. Die Konstante R ist die spezifische Gaskonstante, wobei wir folgende Bemerkung machen.

2.4 Gaskonstante. Die *universelle Gaskonstante* \mathcal{R} ist, siehe [125],

$$\mathcal{R} = 8.314472 \frac{J}{K \cdot mol} \quad [J = Pa \cdot m^3, Pa = \frac{kg}{m \cdot s^2}].$$

Die in dem Gasgesetz vorkommende *spezifische Gaskonstante* R ist

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mathcal{R}}{M} \left[\frac{m^2}{K \cdot s^2} \right], \quad M \text{ molare Masse (Molmasse),} \\ M &= \frac{m}{n}, \quad m [kg] \text{ Masse, } n [mol] \text{ Stoffmenge.} \end{aligned}$$

Aus [[Wikipedia: Molare Masse](#)], siehe auch [[Wikipedia: Mittlere Molmasse](#)]: "Der Zahlenwert der molaren Masse einer chemischen Verbindung ergibt sich durch die Summe der mittleren Atommassen der an der Verbindung beteiligten chemischen Elemente von einem Mol (rd. $6 \cdot 10^{23}$) Teilchen bzw. von einem Mol der Strukturelemente der Verbindung."

So ist z.B. die molare Masse von Wasser

$$M_{H_2O} = 2 \cdot M_H + M_O = 2 \cdot 1.00794 \frac{g}{mol} + 15.9994 \frac{g}{mol} = 18.01528 \frac{g}{mol},$$

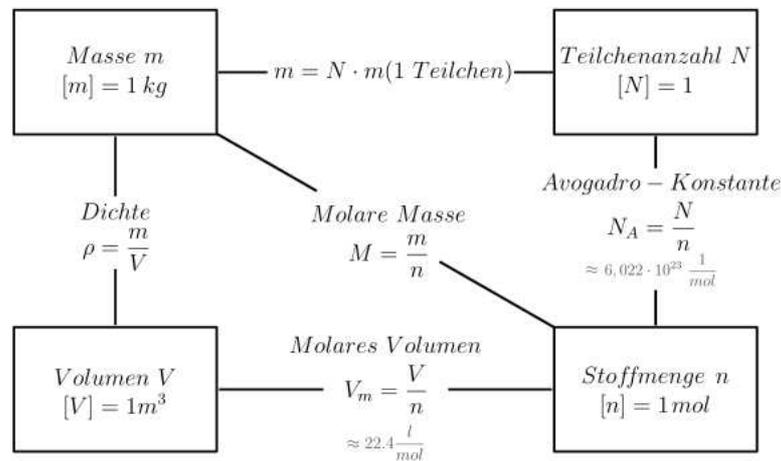


Abb. 5: “Der Zusammenhang zwischen Masse, Stoffmenge, Volumen und Teilchenanzahl” von Johannes Schneider aus [Wikipedia: Molare Masse]

und die von Luft

$$\begin{aligned}
 M_{N_2} &= 28.014 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, & M_{O_2} &= 31.998 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, & M_{Ar} &= 39.948 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \\
 M_{\text{trockeneLuft}} &= 78\% M_{N_2} + 21\% M_{O_2} + 1\% M_{Ar} \\
 &= (0.78 \cdot 28.014 + 0.21 \cdot 31.998 + 0.01 \cdot 39.948) \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 28.97 \frac{\text{g}}{\text{mol}}.
 \end{aligned}$$

Es gilt folgendes

2.5 Lemma. Seien c_V und c_P positive Konstanten und $R = c_P - c_V > 0$. Es gelte die Gibbs Relation, genauer (IV2.5) oder (IV2.6), und für die innere Energie ε sei

$$\varepsilon = \widehat{\varepsilon}(\varrho, \theta) = c_V \theta \varrho.$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) $PV = mRT$.
- (2) $p = \widehat{p}(\varrho, \theta) = R\theta\varrho$.
- (3) $\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon) = c_V \varrho \log \varepsilon - c_P \varrho \log \varrho + c\varrho$ für ein $c \in \mathbb{R}$.
- (4) $f = \widehat{f}(\varrho, \theta) = -c_V \theta \varrho \log \theta + R\theta \varrho \log \varrho + d\varrho\theta$ für ein $d \in \mathbb{R}$.

Es sei noch erwähnt, dass $(\varrho, \varepsilon) \mapsto \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ eine konkave Funktion ist.

Hinweis: Dieses Lemma kann auch mit Hilfe der spezifischen Größen ε^{sp} , η^{sp} und f^{sp} formuliert werden.

Beweis (1) \Leftrightarrow (2). Nach Definition der Größen in (IV2.18). □

Beweis (2) ⇒ (3). Zunächst gilt

$$\eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\theta} = \frac{c_V \varrho}{\varepsilon}.$$

Durch Integration erhält man mit einer Funktion $\varrho \mapsto d(\varrho)$

$$\eta = c_V \varrho \log \varepsilon + d(\varrho).$$

Die Gibbs Relation liefert

$$0 = \varrho \eta'_{\varrho} - \eta + (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} = \varrho d'_{\varrho} - d + (c_V + R) \varrho = \varrho^2 \left(\frac{d}{\varrho} \right)'_{\varrho} + c_P \varrho$$

wegen $c_V + R = c_P$. Also ist für eine Konstante c

$$\frac{d}{\varrho} = -c_P \log \varrho + c.$$

Daraus folgt (3). □

Beweis (2) ⇒ (4). Die Gleichung (IV2.3) ist $\varepsilon = f + \theta \eta = f - \theta f'_{\theta}$, also

$$\left(\frac{f}{\theta} \right)'_{\theta} = \frac{\theta f'_{\theta} - f}{\theta^2} = -\frac{\varepsilon}{\theta^2} = -\frac{c_V \varrho}{\theta}.$$

Außerdem folgt aus der Gibbs Relation

$$\left(\frac{f}{\varrho} \right)'_{\varrho} = \frac{\varrho f'_{\varrho} - f}{\varrho^2} = \frac{p}{\varrho^2} = \frac{R\theta}{\varrho}.$$

Somit gilt

$$\left(\frac{f}{\theta} \right)'_{\theta} = -\frac{c_V \varrho}{\theta}, \quad \left(\frac{f}{\varrho} \right)'_{\varrho} = \frac{R\theta}{\varrho},$$

woraus folgt

$$\frac{f}{\theta} = -c_V \varrho \log \theta + d_1(\varrho), \quad \frac{f}{\varrho} = R\theta \log \varrho + d_2(\theta),$$

also

$$f = R\theta \varrho \log \varrho + d_2(\theta) \varrho = -c_V \theta \varrho \log \theta + d_1(\varrho) \theta.$$

Diese beiden Gleichungen für f schreiben wir als

$$\frac{d_2(\theta)}{\theta} + c_V \log \theta = \frac{d_1(\varrho)}{\varrho} - R \log \varrho = d,$$

wobei d natürlich eine Konstante ist. Wir erhalten

$$d_1(\varrho) = R \varrho \log \varrho + d \varrho, \quad d_2(\theta) = -c_V \theta \log \theta + d \theta,$$

und deshalb

$$f = -c_V \theta \varrho \log \theta + R \theta \varrho \log \varrho + d \varrho \theta.$$

□

Beweis (4) ⇒ (3). Da $\eta = -f'_{\theta}$, erhält man

$$\begin{aligned}\eta &= c_V \varrho (\log \theta + 1) - (c_P - c_V) \varrho \log \varrho - d \varrho \\ &= c_V \varrho (\log (\theta \varrho) + 1) - c_P \varrho \log \varrho - d \varrho \\ &= c_V \varrho \log \varepsilon - c_P \varrho \log \varrho + c_V \varrho (-\log c_V + 1) - d \varrho,\end{aligned}$$

also hat man $c = c_V(1 - \log c_V) - d$ zu wählen. \square

Beweis (3) ⇒ (4). Es ist

$$\begin{aligned}f &= \varepsilon - \theta \eta = \varepsilon - c_V \theta \varrho \log \varepsilon + c_P \theta \varrho \log \varrho - c \theta \varrho \\ &= -c_V \theta \varrho \log \theta + (c_P - c_V) \theta \varrho \log \varrho + c_V \theta \varrho (1 - \log c_V) - c \theta \varrho\end{aligned}$$

also hat man $d = c_V(1 - \log c_V) - c$ zu wählen. \square

Beweis (4) ⇒ (2). By (IV2.6) we have $p = \varrho f'_{\varrho} - f$. Then using f from (4) gives (2). \square

Beweis der Konkavität. Es ist $\eta = c_V \varrho \log \varepsilon - c_P \varrho \log \varrho + c \varrho$, also

$$\begin{aligned}\eta'_{\varrho} &= c_V \log \varepsilon - c_P (\log \varrho + 1) + c, & \eta'_{\varepsilon} &= c_V \frac{\varrho}{\varepsilon}, \\ \eta'_{\varrho \varrho} &= -\frac{c_P}{\varrho}, & \eta'_{\varrho \varepsilon} &= \frac{c_V}{\varepsilon}, & \eta'_{\varepsilon \varepsilon} &= -\frac{c_V \varrho}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Dann ist

$$D^2 \eta = - \begin{bmatrix} \frac{c_P}{\varrho} & -\frac{c_V}{\varepsilon} \\ -\frac{c_V}{\varepsilon} & \frac{c_V \varrho}{\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$

negativ definit, denn

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{c_P}{\varrho} & -\frac{c_V}{\varepsilon} \\ -\frac{c_V}{\varepsilon} & \frac{c_V \varrho}{\varepsilon^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \frac{c_P}{\varrho} z_1^2 - \frac{2c_V}{\varepsilon} z_1 z_2 + \frac{c_V \varrho}{\varepsilon^2} z_2^2 \\ &= \frac{1}{\varrho \varepsilon^2} (c_P \varepsilon^2 z_1^2 - 2c_V \varrho \varepsilon z_1 z_2 + c_V \varrho^2 z_2^2) \\ &= \frac{1}{\varrho \varepsilon^2} (R \varepsilon^2 z_1^2 + c_V (\varrho z_1 - \varepsilon z_2)^2) \geq 0,\end{aligned}$$

da $R = c_P - c_V > 0$. \square

Unter diesen klassischen Gleichungen des idealen Gasgesetzes gilt das

2.6 Theorem. Für das ideale Gasgesetz ist das System (IV2.15) zu nehmen mit

$$\Pi = p \text{Id} - S, \quad p = R \theta \varrho, \quad e = c_V \theta \varrho + \frac{\varrho}{2} |v|^2. \quad (\text{IV2.19})$$

Für S und q wird im Allgemeinen (IV2.12) genommen, was z.B. der Ansatz (IV2.13) und (IV2.14) erfüllt. Unter diesen Voraussetzungen ist das System (IV2.15) äquivalent zu

Ideale Flüssigkeit:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \\ c_V \varrho(\partial_t \theta + v \bullet \nabla \theta) + \operatorname{div} q &= -Dv \bullet \Pi \end{aligned}$$

Unabhängige Variablen:

ϱ Dichte, v Geschwindigkeit, θ Temperatur.

Entropieproduktion:

$$\sigma = \frac{1}{\theta} Dv \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q \geq 0 \text{ siehe (IV2.12),}$$

$$\Pi = p \operatorname{Id} - S, \quad p \text{ siehe (IV2.19).}$$

(IV2.20)

Die letzte Gleichung ist die **Wärmeleitungsgleichung** und die ersten beiden Gleichungen sind das Navier-Stokes System. *Bemerkung:* Das System hängt nicht von den c und d Termen in 2.5 ab.

Beweis. Wir definieren die spezifischen Größen

$$e^{\text{sp}} = \frac{e}{\varrho}, \quad \varepsilon^{\text{sp}} = \frac{\varepsilon}{\varrho},$$

so dass also

$$e^{\text{sp}} = c_V \theta + \frac{|v|^2}{2}, \quad \varepsilon^{\text{sp}} = c_V \theta.$$

Wenn wir von der Energiegleichung die Gleichung für die kinetische Energie (siehe (IV2.17)) abziehen, erhalten wir

$$\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) = -Dv \bullet \Pi.$$

Nun ist wegen der Massenerhaltung

$$\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v) = \varrho(\partial_t \varepsilon^{\text{sp}} + v \bullet \nabla \varepsilon^{\text{sp}}).$$

□

Bei vielen Flüssigkeitsproblemen geht man physikalisch davon aus, dass die Temperatur ungefähr konstant ist, d.h. $\theta \approx \text{const}$, siehe hierzu den Abschnitt 3. Mathematisch wird man dann $\theta = \text{const}$ setzen. Oft ist man jedoch in der Situation, dass nicht explizit gesagt wird, wo die konstante Temperatur auftritt. In dieser Situation ist also das freie Energieprinzip III.5.4 statt des Entropieprinzips III.1.1 zu betrachten, wobei immer zu beachten ist, dass das Entropieprinzip die eigentliche Grundlage ist.

3 Navier-Stokes Gleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir zähe Flüssigkeiten, die in der Physik im kompressiblen Fall mit der generellen Bezeichnung “Navier-Stokes Gleichung” versehen sind. Wir werden in diesem Abschnitt dann aus diesen kompressiblen Gleichungen die “inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen” herleiten. Dabei betrachten wir hier die isotherme Situation, d.h. $\theta = \text{const}$ (beachte die Bemerkung 3.4). Insofern ist dieser Abschnitt keine Darstellung der Navier-Stokes Flüssigkeiten im Allgemeinen. Wenn man statt einer Voraussetzung an θ eine an q macht, d.h. adiabatische Prozesse, also Prozesse mit $q = 0$, betrachtet, so sei auf den Abschnitt über Schallausbreitung 7 und den Abschnitt über Selbstgravitation 16 hingewiesen.

Die Annahmen gegenüber der allgemeinen Darstellung sind folgende:

$$\mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{r} = 0, \quad \Pi \text{ symmetrisch}, \quad \theta = \text{const.}$$

Wir haben es also mit der *Masse-Impuls-Erhaltung* für eine kompressible Flüssigkeit

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \text{div}(\varrho \mathbf{v}) &= 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{v}) + \text{div}(\varrho \mathbf{v} \mathbf{v}^T + \Pi) &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (\text{IV3.1})$$

zu tun, wobei wir die *freie Energieungleichung*, siehe 3.1,

$$\sigma_f := \partial_t f^{\text{tot}} + \text{div} \varphi^{\text{tot}} - g^{\text{tot}} \leq 0 \quad (\text{IV3.2})$$

voraussetzen. Dies ist die Version des Entropieprinzips im isothermen Fall (siehe III.5.4) und sie bestimmt die Struktur des Tensors Π im System. In anderen Worten: Da angenommen wird, dass $\theta = \text{const}$, gibt es keinen Wärmefluß und daher keine Energiegleichung. Man hat daher als Ersatz für die Entropiegleichung eine Ungleichung für die freie Energie. Es zeigt sich, dass die innere freie Energie f das System (IV3.1) wesentlich bestimmt.

3.1 Freie Energieungleichung. Für das System (IV3.1) ist die freie Energieungleichung (IV3.2) erfüllt mit

$$f^{\text{tot}} = f + \frac{\varrho}{2} |\mathbf{v}|^2, \quad \varphi^{\text{tot}} = f^{\text{tot}} \mathbf{v} + \Pi^T \mathbf{v}, \quad g^{\text{tot}} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{f},$$

falls im Differentialgleichungssystem (IV3.1)

$$\Pi = p \text{Id} - S, \quad p = \varrho f'_{\varrho} - f, \quad f = \widehat{f}(\varrho),$$

und wenn die Residualungleichung

$$\sigma_f = -D\mathbf{v} \bullet S \leq 0$$

gilt. *Bemerkung:* Es ist $\sigma_f = -\theta \sigma$, wobei σ die Entropieproduktion ist, siehe den Abschnitt III.5, was aber die Angabe der konstanten Temperatur θ erfordert.

Beweis. Es folgt aus (IV3.1) die Gleichung für die kinetische Energie (siehe III.2.2)

$$\partial_t \left(\frac{\rho}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\rho}{2} |v|^2 v + \Pi^T v \right) = v \bullet \mathbf{f} + \operatorname{Dv} \bullet \Pi. \quad (\text{IV3.3})$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von (IV3.2), so erhalten wir, siehe III.5.5,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sigma_f := \partial_t f^{tot} + \operatorname{div} \varphi^{tot} - g^{tot} \\ &= \partial_t \left(f^{tot} - \frac{\rho}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\varphi^{tot} - \frac{\rho}{2} |v|^2 v - \Pi^T v \right) - g^{tot} + v \bullet \mathbf{f} + \operatorname{Dv} \bullet \Pi \\ &= \partial_t f + \operatorname{div}(fv) + \operatorname{Dv} \bullet \Pi \\ &= (\partial_t + v \bullet \nabla) f + \operatorname{Dv} \bullet (f \operatorname{Id} + \Pi) \\ &= f'_{\rho} (\underbrace{\partial_t + v \bullet \nabla}_{= -\rho \operatorname{div} v}) \rho + \operatorname{Dv} \bullet (f \operatorname{Id} + \Pi) \\ &= \operatorname{Dv} \bullet ((f - \rho f'_{\rho}) \operatorname{Id} + \Pi) = -\operatorname{Dv} \bullet S, \end{aligned}$$

wenn $S := -(f - \rho f'_{\rho}) \operatorname{Id} - \Pi$, oder $p := \rho f'_{\rho} - f$ und $\Pi = p \operatorname{Id} - S$. \square

Also haben wir das folgende System

(Kompressible) Navier-Stokes Gleichung:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

$$\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v v^T + p \operatorname{Id} - S) = \mathbf{f}$$

(IV3.4)

$$p = \rho f'_{\rho} - f \text{ Druck, } S \text{ objektiver Tensor}$$

$$f = \widehat{f}(\rho) \text{ freie Energie } (\theta = \text{const})$$

$$-\sigma_f = \operatorname{Dv} \bullet S \geq 0 \text{ Residualungleichung } (-\sigma_f = \theta \sigma)$$

Es ist $p + f = \rho f'_{\rho}$ die Gibbs Relation (siehe 2.1 bzw. III.1.4, nur hier im isothermen Fall), und diese Gleichung hat die gleiche Struktur wie (III.1.10) für die Temperatur, nur ist hier ρ die Variable statt ε . Also können wir die duale Variable zu ρ bestimmen, welche das chemische Potential μ ist.

3.2 Druck als Funktion des chemischen Potentials. Sei $f = \widehat{f}(\rho)$. Betrachte die Gibbs-Gleichung

$$p + f = \rho f'_{\rho}$$

und definiere das **chemische Potential** durch

$$\mu := f'_{\rho}(\rho). \quad (\text{IV3.5})$$

Setzen wir voraus, dass die freie Energie f eine konvexe Funktion von ϱ ist, also

$$f'_{\varrho\varrho} > 0,$$

so wird das ϱ -Intervall $]0, \infty[$ mit der Definition (IV3.5) auf ein μ -Intervall $]\mu_-, \mu_+[$ abgebildet, und wir können definieren

$$p = \widehat{p}(\mu) := \varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho) \text{ f\u00fcr } \mu = f'_{\varrho}(\varrho).$$

Es folgt

$$p'_{\mu}(\mu) = \varrho \text{ f\u00fcr } \mu = f'_{\varrho}(\varrho).$$

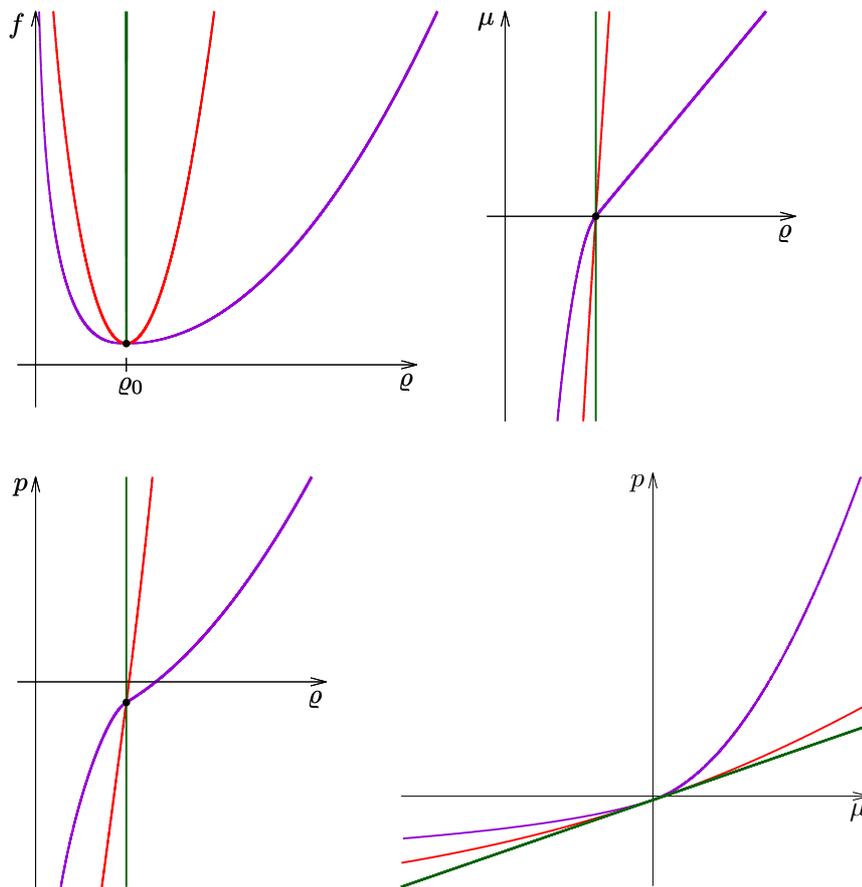


Abb. 6: Der Druck p und das chemische Potential μ .

Beweis. (Vergleiche die Legendre-Fenchel Transformation.) Wir schreiben, wenn $\mu = f'_{\varrho}(\varrho)$ ist, die Gibbs Relation (siehe 2.1) als

$$p(f'_{\varrho}(\varrho)) = p(\mu) = \varrho f'_{\varrho}(\varrho) - f(\varrho)$$

und daher ist die Ableitung nach ϱ

$$p'_{\mu}(f'_{\varrho}(\varrho))f'_{\varrho\varrho}(\varrho) = \varrho f'_{\varrho\varrho}(\varrho)$$

und durch Kürzen von $f'_{\varrho\varrho}(\varrho) > 0$ folgt $p'_{\mu}(\mu) = \varrho$ für $\mu = f'_{\varrho}(\varrho)$. \square

Mehr Information zu chemischen Potentialen findet man in Abschnitt 11.

3.3 Beispiel. Zu gegebenem $\varrho_0 > 0$ definiere die freie Energie durch

$$f = \widehat{f}(\varrho) := \frac{1}{2\delta}|\varrho - \varrho_0|^2, \quad \delta > 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mu &= f'_{\varrho} = \frac{\varrho - \varrho_0}{\delta}, \\ p &= \varrho f'_{\varrho} - f = \varrho\mu - \frac{1}{2\delta}|\varrho - \varrho_0|^2 \\ &= \varrho\mu - \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_0)\mu = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)\mu, \end{aligned}$$

also

$$p = \widehat{p}(\mu) := \frac{1}{2}(\delta\mu + 2\varrho_0)\mu = \left(\frac{\delta\mu}{2} + \varrho_0\right)\mu.$$

In der Grenze $\delta \rightarrow 0$ (oder betrachte ddem Limes $\varrho \rightarrow \varrho_0$) erhält man

$$\varrho = \varrho_0, \quad p = \varrho_0\mu.$$

Während $\varrho = \varrho_0$ eine Konstante ist, ist μ irgend eine Funktion.

Bemerkung: Dieses Beispiel ist physikalisch anwendbar, wenn für die Lösung ein ϱ existiert, das sich um einen konstanten Wert ϱ_0 herumbewegt, siehe Abb. 6, also nur wenig oszilliert.

3.4 Remark. Zum incompressiblen Limes I.Müller [87, Incompressibility] schreibt: "It follows that a vanishing compressibility implies that there is no thermal expansion". Wenn ein physikalischer Prozess variable Temperaturen enthält, muss die Energiegleichung benutzt werden, was den kompressiblen Fall impliziert.

Lassen wir also jetzt $\varrho \rightarrow \varrho_0 = \text{const} > 0$ streben (this is not based on sharp estimates), so ist p als Funktion von μ eine unabhängige Funktion. Dies erlaubt es uns, die Differentialgleichungen in μ zu schreiben und den Fall $\varrho = \text{const}$ zu betrachten. Falls p eine streng monotone Funktion von μ

ist, kann man auch p als unabhängige Variable nehmen. Wir erhalten also die

Inkompressible Navier-Stokes Gleichung:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \\ \partial_t(\varrho_0 v) + \operatorname{div}(\varrho_0 v v^T + p \operatorname{Id} - S) &= \mathbf{f}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \widehat{S}(p, (\operatorname{D}v)^S) \text{ objektiver Tensor,} \\ S \bullet (\operatorname{D}v)^S &\geq 0 \text{ Residualungleichung,} \\ \varrho &= \varrho_0 = \text{const,} \\ v \text{ und } p &\text{ unabhängige Variable.} \end{aligned} \tag{IV3.6}$$

Es wird meistens angenommen, dass gilt (siehe (I3.1))

$$S = 2a(\operatorname{D}v)^S = a(\operatorname{D}v + (\operatorname{D}v)^T), \quad a = \widehat{a}(p, (\operatorname{D}v)^S),$$

also

$$S_{ij} = a(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Ist der skalare Koeffizient konstant, d.h. $a = \text{const}$ (siehe dazu die Aussage in II.4.12 über die Objektivität), so folgt

$$\operatorname{div} S = a\Delta v + a \sum_i (\partial_i \operatorname{div} v) \mathbf{e}_i = a\Delta v.$$

Da $\operatorname{div}(p \operatorname{Id}) = \nabla p$, haben wir dann folgendes System:

Spezielle Navier-Stokes Gleichung:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \\ \varrho_0(\partial_t v + (v \bullet \nabla)v) + \nabla p - a\Delta v &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

mit $\varrho_0 = \text{const} > 0$ und $a = \text{const} > 0$

Es folgt $a \geq 0$ aus der freien Energiegleichung (tritt an die Stelle des Entropieprinzips). Oft wird für den Koeffizienten a auch μ , ν , oder η geschrieben. Die inkompressible Navier-Stokes Gleichung wird normalerweise bei gegebenem $\varrho_0 > 0$ für (v, p) unter der Voraussetzung gelöst, dass die (klassische) Kraft $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$ eine gegebene Funktion ist. Aus der Beobachterunabhängigkeit folgt jedoch (siehe (II3.18)), dass \mathbf{f} eine lineare Funktion von ϱ_0 und $\varrho_0 v$ enthält (wenn Scheinkräfte relevant sind).

Im konkreten Fall gehen wir von einem beschränkten Gebiet aus, was sich mit der Zeit verändern kann und in dem sich die Flüssigkeit befindet. Allgemein betrachten wir die Massen- und Impulserhaltung in der gesamten

Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, wobei die Größen der Impulserhaltung in der Flüssigkeit die bekannten Terme der Navier-Stokes Gleichung sind. Das Außengebiet kann aus folgendem Material bestehen, wobei wir annehmen, dass keinen Massenaustausch mit der Flüssigkeit stattfindet:

- **Fester Körper.** Wir wählen einen Beobachter im Außengebiet, d.h. die Flüssigkeit befindet sich in einem Gebiet $\Omega = \mathbb{R} \times D$, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ fest gewählt sei. Der Außenraum $\mathbb{R}^n \setminus D$ ist der feste Körper. (Für einen beliebigen Beobachter ist dann die Beobachtertransformation anzuwenden.) Die Massenerhaltung für die Flüssigkeit $\operatorname{div}[v\mathcal{X}_D] = 0$ impliziert $v \bullet \nu_D = 0$. Aufgrund der Viskosität ist die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit gleich der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Außenraumes, also gleich 0. Damit gilt $v = 0$ auf ∂D , eine Dirichlet-Bedingung wie in 3.5.
- **Vakuum.** In diesem Fall sind die Massen- und Impulserhaltung in 3.7 im distributionellen Sinne zu lösen, wobei $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ die Menge ist, in der sich die Flüssigkeit zur Zeit t befindet, d.h. es ist

$$\Omega = \{(t, x) ; x \in \Omega_t\}.$$

Hierbei sind die Bedingungen an dem Rand von Ω aus dem distributionellen Masse-Impuls System zu nehmen, z.B. folgt für die Geschwindigkeit $(v - v_{\partial\Omega_t}) \bullet \nu_\Omega = 0$, siehe 3.8. Die Terme im Komplement von Ω , also im Vakuum, sind dabei auf 0 zu setzen. Es ist klar, dass dies für alle Beobachter formuliert ist, nur in der Anfangsbedingung geht der gewählte Beobachter ein.

Dirichlet Problem

Das Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ ist zeitunabhängig und es wird die Dirichlet-Bedingung $v = 0$ auf ∂D angenommen. Diese Bedingung auf dem Rand des Gebietes $\partial D \subset \mathbb{R}^n$ ist für ein festes Medium $\mathbb{R}^n \setminus D$, wie beschrieben, die richtige Wahl der Randbedingung.

Mathematik: Es sei bemerkt, dass die Regularität der Lösung für $n = 3$ gerade im Grenzbereich liegt (für $n = 2$ und $n = 1$ kann sie gezeigt werden). Eine Alternative ist jedoch, die Gleichung

$$\partial_t(\rho_0 v) + \operatorname{div}(\rho_0 v v^T + p \operatorname{Id} - S) = \mathbf{f}$$

mit einem objektiven Tensor $S = \widehat{S}((Dv)^S)$ zu nehmen, wobei (siehe [36] und die physikalische Argumentation in diesem Paper) nach Ladyzhenskaya gesetzt wird

$$S = 2a(Dv)^S, \quad a = \nu_0 + \nu_1 |(Dv)^S|^r \text{ mit } r > 0$$

(in [36] wird $r \geq \frac{1}{5}$ angenommen) mit $\nu_0 > 0$ und $\nu_1 > 0$. Bezüglich dieses Tensors S gibt es a-priori Abschätzungen, die gut genug für eine Existenztheorie sind, und S erfüllt natürlich das Entropieprinzip.

3.5 Problem. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann lautet das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} v &= 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times \partial D, \\ \operatorname{div} v &= 0 \text{ in } \mathbb{R} \times D, \\ \partial_t(\varrho_0 v) + \operatorname{div}(\varrho_0 v v^T + p \operatorname{Id} - S) &= \mathbf{f} \text{ in } \mathbb{R} \times D. \end{aligned}$$

Bemerkung: Hier wird das Zeitintervall der Einfachheit halber mit ganz \mathbb{R} bezeichnet.

Dieses Problem wird mathematisch gelöst im Raum der divergenzfreien Felder.

3.6 Theorem. Das Problem in 3.5 ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0 \text{ in } \mathbb{R} \times D \text{ und } v = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times \partial D, \\ \int_{\mathbb{R}} \int_D \sum_k (\partial_t \zeta_k \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \zeta_k (\varrho_0 v_k v_i - S_{ki}) + \zeta_k \mathbf{f}_k) dx dt &= 0 \\ \text{für alle } \zeta &\in C_0^\infty(\mathbb{R} \times D; \mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{div} \zeta = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times D, \end{aligned}$$

und zu der Tatsache, dass daraus die Existenz des Druckes p folgt, d.h.

$$\partial_k [p] = \mathbf{f}_k^* := [\mathbf{f}_k] - \partial_t [\varrho_0 v_k] - \sum_i \partial_{x_i} [\varrho_0 v_k v_i - S_{ki}]$$

im Raum der Distributionen $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times D; \mathbb{R}^n)$ gilt.

Beweis dass p existiert. Die Existenz von v in der Behauptung impliziert, dass (beachte, dass \mathbf{f}_k^* Distributionen sind)

$$\sum_k \langle \zeta_k, \mathbf{f}_k^* \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times D)} = 0$$

für alle $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times D; \mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times D; \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} \zeta = 0$. Dies ergibt, dass $\partial_l \mathbf{f}_k^* = \partial_k \mathbf{f}_l^*$ in $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R})$ für alle k und l , indem wir als Testfunktion setzen $\zeta = \partial_l \xi \mathbf{e}_k - \partial_k \xi \mathbf{e}_l$ mit einem reellwertigen $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R})$. Daraus folgt die Existenz von p (was in diesem schwachen Sinne nichttrivial ist, siehe [Roger Temam, Navier-Stokes Equations, North-Holland 1977, Proposition I.1.1 and I.1.2], was Resultate in Deny & Lions [J. Deny and J.L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier 5, pp.305-370, 1954] sowie Nečas [J. Nečas, Equation aux dérivées partielles, Presses de l'Université de Montréal, 1965] voraussetzt.). Beides zusammen ergibt 3.5. Ist umgekehrt 3.5 erfüllt, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \sum_k (\partial_t \zeta_k \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \zeta_k (\varrho_0 v_k v_i + p \delta_{k,i} - S_{ki}) + \zeta_k \mathbf{f}_k) dx dt = 0$$

für alle ζ mit $\zeta = 0$ auf $\mathbb{R} \times \partial D$. Daraus folgen die beiden behaupteten Aussagen. \square

Soweit die Darstellung des Dirichlet-Problems.

Neumann Problem

Physikalisch interessanter ist das Problem mit variabler Flüssigkeitsmenge $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es ist

$$\Omega = \{(t, x); x \in \Omega_t\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad \Gamma := \partial\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

mit beschränkten Gebieten Ω_t . Hierbei ist also auch das von der Flüssigkeit okkupierte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gesucht. In der distributionellen Version heißt dies Folgendes.

3.7 Problem. Bestimme bei Anfangsbedingungen die Menge $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und die Geschwindigkeit $v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sowie den Druck $p: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} \partial_t[\varrho_0 \mathcal{X}_\Omega] + \sum_i \partial_{x_i}[\varrho_0 v_i \mathcal{X}_\Omega] &= 0, \\ \partial_t[\varrho_0 v_k \mathcal{X}_\Omega] + \sum_i \partial_{x_i}[(\varrho_0 v_k v_i + p \delta_{ki} - S_{ki}) \mathcal{X}_\Omega] + [\mathbf{f}_k \mathcal{X}_\Omega] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV3.8})$$

für $k = 1, \dots, n$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. *Bemerkung:* Hier wird der Einfachheit halber der ganze Raum \mathbb{R}^n benutzt. Und obwohl Anfangsbedingungen gebraucht werden, ist auch die Zeit auf ganz \mathbb{R} ausgedehnt.

Wenn wir diese Formulierung ausschreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} (\partial_t \xi \varrho_0 + \nabla \xi \bullet (\varrho_0 v)) \, dx \, dt &= 0 \text{ für } \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \\ \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \left(\partial_t \zeta_k \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \zeta_k (\varrho_0 v_k v_i + p \delta_{ki} - S_{ki}) \right. \\ &\quad \left. + \zeta_k \mathbf{f}_k \right) \, dx \, dt = 0 \text{ für } \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (\text{IV3.9})$$

Zu dieser schwachen Version können wir natürlich auch die starke Version aufschreiben, die dann Neumann-Bedingungen auf dem Rande von Ω_t enthalten.

3.8 Starke Version. Das Problem in 3.7 lautet in der starken Version:

$$\begin{aligned} (v - v_\Gamma) \bullet \nu_\Omega &= 0 \text{ auf } \partial\Omega_t, \\ \operatorname{div} v &= 0 \text{ in } \Omega_t, \\ \partial_t(\varrho_0 v) + \operatorname{div}(\varrho_0 v v^\top + p \operatorname{Id} - S) &= \mathbf{f} \text{ in } \Omega_t, \\ \tau \bullet S \nu_\Omega &= 0 \text{ für alle Tangentialfelder } \tau \text{ an } \partial\Omega_t, \\ p &= \nu_\Omega \bullet S \nu_\Omega \text{ auf } \partial\Omega_t. \end{aligned}$$

Definition: Dabei ist $\nu_\Omega \in \mathbb{R}^n$ die äußere Normale an $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$, und $v_\Gamma \in \text{span}\{\nu_\Omega\}$ die Geschwindigkeit, mit der sich $t \mapsto \Omega_t$ in Normalenrichtung $\text{span}\{\nu_\Omega\}$ ausbreitet, siehe I.4.1. Die äußere Normale $n_\Omega \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ an die Raumzeitmenge $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist mit ν_Ω verknüpft durch¹

$$n_\Omega = \frac{(-v_\Gamma \bullet \nu_\Omega, \nu_\Omega)}{\sqrt{1 + |v_\Gamma|^2}} \quad \text{mit } \Gamma = \partial\Omega. \quad (\text{IV3.10})$$

Beweis. Die distributionelle Massenerhaltung

$$\int_\Omega \underbrace{(\partial_t \xi \varrho_0 + \nabla_x \xi \bullet (\varrho_0 v))}_{= \nabla_{(t,x)} \xi \bullet (\varrho_0, \varrho_0 v)} d(t, x) = 0 \quad \text{für } \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$$

ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div}_{(t,x)}(\varrho_0, \varrho_0 v) = \partial_t \varrho_0 + \text{div}_x(\varrho_0 v) = \varrho_0 \text{div}_x v \text{ in } \Omega, \\ 0 &= n_\Omega \bullet (\varrho_0, \varrho_0 v) \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei die Gleichung auf Γ wegen (IV3.10) bedeutet

$$(v - v_\Gamma) \bullet \nu_\Omega = 0,$$

d.h. das ist die Tatsache, dass v tangential (in Zeit und Raum) auf $\partial\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist. Entsprechend folgt für die Impulserhaltung

$$\begin{aligned} \sum_k \int_\Omega \underbrace{(\partial_t \zeta_k \varrho_0 v_k + \nabla_x \zeta_k \bullet (\varrho_0 v_k v + (p\text{Id} - S)^T \mathbf{e}_k))}_{= \nabla_{(t,x)} \zeta_k \bullet (\varrho_0 v_k, \varrho_0 v_k v + (p\text{Id} - S)^T \mathbf{e}_k)} + \zeta_k \mathbf{f}_k d(t, x) = 0 \\ \text{für } \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Dies ergibt für $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{div}_{(t,x)} \bullet (\varrho_0 v_k, \varrho_0 v_k v + (p\text{Id} - S)^T \mathbf{e}_k) - \mathbf{f}_k &= 0 \text{ in } \Omega, \\ 0 &= n_\Omega \bullet (\varrho_0 v_k, \varrho_0 v_k v + (p\text{Id} - S)^T \mathbf{e}_k) \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die erste Identität ist die Differentialgleichung

$$\partial_t(\varrho_0 v_k) + \text{div}_x(\varrho_0 v_k v + (p\text{Id} - S)^T \mathbf{e}_k) = \mathbf{f}_k$$

für $k = 1, \dots, n$, und die zweite Identität ist unter der Berücksichtigung, dass $n_\Omega \bullet (1, v) = 0$ aus der Massenerhaltung ist, $0 = n_\Omega \bullet (0, (p\text{Id} - S)^T \mathbf{e}_k)$, und damit

$$0 = \nu_\Omega \bullet ((p\text{Id} - S)^T \mathbf{e}_k) = ((p\text{Id} - S)\nu_\Omega) \bullet \mathbf{e}_k,$$

d.h. die Behauptung. □

¹Siehe dazu auch das Skript [22]

Mathematik: There is a pioneering work of Solonnikov, see the paper of Shibata & Shimizu [62]. It is based on the identity

$$L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) = J_0(\Omega) \oplus G(\Omega).$$

This is stated in a paper of Ladyzhenskaya & Solonnikov [111, (1.8)]. Another identity, mentioned in [62], is given in (IV3.11) and reads

$$L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) = J(\Omega) \oplus G_0(\Omega).$$

This allows us to write the problem in the space of solenoidal vector fields.

3.9 Lemma. The distributional equations (IV3.8) are equivalent to

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega, \\ & 0 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \left(\partial_t \bar{\zeta}_k \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \bar{\zeta}_k (\varrho_0 v_k v_i - S_{ki}) + \bar{\zeta}_k \mathbf{f}_k \right) dx dt \\ & \text{for } \bar{\zeta} \text{ with } \operatorname{div} \bar{\zeta} = 0 \text{ in } \Omega, \\ & p \nu_{\Omega} = S \nu_{\Omega} \text{ on } \partial \Omega_t, \\ & \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \left(\nabla \xi \bullet (-\nabla p + \operatorname{div} S) + \xi \varrho_0 \sum_{ki} \partial_{x_k} v_i \partial_{x_i} v_k \right) dx dt = 0 \\ & \text{for } \xi \text{ with } \xi = 0 \text{ on } \partial \Omega_t. \end{aligned}$$

These statements are not independent. The two weak equations for v and p are of variational structure. *Hinweis:* According to the \mathbf{f} terms see 3.10. The term $\operatorname{div} \operatorname{div} S$ is zero for the linear case of S .

Beweis. The problem in (IV3.9) consists of the mass equation

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} (\partial_t \xi \varrho_0 + \nabla \xi \bullet (\varrho_0 v)) dx dt = 0$$

for $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ and the momentum equation

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \left(\partial_t \zeta_k \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \zeta_k (\varrho_0 v_k v_i + p \delta_{ki} - S_{ki}) + \zeta_k \mathbf{f}_k \right) dx dt = 0$$

for $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. The mass equation is equivalent to

$$\operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega$$

and $v \bullet \nu_{\Omega} = v_{\Gamma} \bullet \nu_{\Omega}$, where $\Gamma_t := \partial \Omega_t$. That is, the domain occupied by the fluid is defined by the velocity v . Thus v has no constraint on Γ . We therefore use the identity

$$\begin{aligned} L^2(\Omega_t; \mathbb{R}^n) &= J(\Omega_t) \oplus G_0(\Omega_t), \\ J(\Omega_t) &:= \{\zeta; \operatorname{div} \zeta = 0\}, \\ G_0(\Omega_t) &:= \{\nabla \xi; \xi \in W_0^{1,2}(\Omega_t)\} \end{aligned} \tag{IV3.11}$$

to obtain variational formulations for v and p . (This is not the decomposition considered by Ladyzhenskaya & Solonnikov, the decomposition used here is mentioned in Shibata & Shimizu.) In the momentum equation we replace $\zeta(t, x)$ by

$$\begin{aligned}\zeta(t, x) &= \bar{\zeta}(t, x) + \nabla \xi(t, x), \\ \bar{\zeta}(t, \bullet) &\in J(\Omega_t), \quad \nabla \xi(t, \bullet) \in G_0(\Omega_t),\end{aligned}$$

and obtain

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \left(\partial_t (\bar{\zeta}_k + \partial_{x_k} \xi) \varrho_0 v_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \partial_{x_i} (\bar{\zeta}_k + \partial_{x_k} \xi) (\varrho_0 v_k v_i + p \delta_{ki} - S_{ki}) \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\zeta}_k + \partial_{x_k} \xi) \mathbf{f}_k \right) dx dt.\end{aligned}$$

Since we can choose $\xi = 0$ while $\bar{\zeta}$ is arbitrarily, and $\bar{\zeta} = 0$ while ξ is arbitrarily, the momentum equation results in two identities

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \left(\partial_t \bar{\zeta}_k \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \bar{\zeta}_k (\varrho_0 v_k v_i + p \delta_{ki} - S_{ki}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\zeta}_k \mathbf{f}_k \right) dx dt\end{aligned}\tag{IV3.12}$$

for $\bar{\zeta}(t, \bullet) \in J(\Omega_t)$ and

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \left(\partial_t \partial_{x_k} \xi \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \partial_{x_k} \xi (\varrho_0 v_k v_i + p \delta_{ki} - S_{ki}) \right. \\ &\quad \left. + \partial_{x_k} \xi \mathbf{f}_k \right) dx dt\end{aligned}\tag{IV3.13}$$

for ξ with $\nabla \xi(t, \bullet) \in G_0(\Omega_t)$. In equation (IV3.12) we have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_{ki} \partial_{x_i} \bar{\zeta}_k p \delta_{ki} dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \partial_{x_k} \bar{\zeta}_k p dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \bar{\zeta} \cdot p dx dt = 0\end{aligned}$$

therefore this equation reduces to

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \left(\partial_t \bar{\zeta}_k \varrho_0 v_k + \sum_i \partial_{x_i} \bar{\zeta}_k (\varrho_0 v_k v_i - S_{ki}) + \bar{\zeta}_k \mathbf{f}_k \right) dx dt.$$

In the equation (IV3.13) we compute

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_{ki} \partial_{x_i} \partial_{x_k} \xi \cdot p \delta_{ki} dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \Delta \xi \cdot p dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \nabla \xi \bullet \nabla p dx dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_t} \nabla \xi \bullet (p \nu_\Omega) d\mathbf{H}^{n-1}(x) dt,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_{ki} \partial_{x_i} \partial_{x_k} \xi \cdot S_{ki} \, dx \, dt \\
& = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_{ki} \partial_{x_k} \xi \partial_{x_i} S_{ki} \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_t} \sum_k \partial_{x_k} \xi \sum_i S_{ki} \nu_{\Omega} \bullet \mathbf{e}_i \, d\mathbb{H}^{n-1}(x) \, dt \\
& = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \nabla \xi \bullet \operatorname{div} S \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_t} \nabla \xi \bullet (S \nu_{\Omega}) \, d\mathbb{H}^{n-1} x \, dt,
\end{aligned}$$

and since $(v - v_{\Gamma}) \bullet \nu_{\Omega} = 0$ (siehe 3.8)

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k (\partial_t \partial_{x_k} \xi (\varrho_0 v_k) + \sum_i \partial_{x_i} \partial_{x_k} \xi (\varrho_0 v_k v_i)) \, dx \, dt \\
& = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \partial_{x_k} \xi (\partial_t (\varrho_0 v_k) + \sum_i \partial_{x_i} (\varrho_0 v_k v_i)) \, dx \, dt \\
& = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \sum_k \varrho_0 \partial_{x_k} \xi (\partial_t v_k + \sum_i v_i \partial_{x_i} v_k + v_k \underbrace{\operatorname{div} v}_{=0}) \, dx \, dt \\
& = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \varrho_0 \xi \sum_{ki} \partial_{x_k} v_i \partial_{x_i} v_k \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Here we have used that $\xi = 0$ on $\partial\Omega$. Altogether equation (IV3.13) becomes

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \left(\nabla \xi \bullet (-\nabla p + \operatorname{div} S) + \xi \varrho_0 \sum_{ki} \partial_{x_k} v_i \partial_{x_i} v_k \right) \, dx \, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_t} \nabla \xi \bullet (p \nu_{\Omega} - S \nu_{\Omega}) \, d\mathbb{H}^{n-1}(x) \, dt = 0.
\end{aligned}$$

This is equivalent to the boundary condition

$$p \nu_{\Omega} = S \nu_{\Omega}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t} \left(\nabla \xi \bullet (-\nabla p + \operatorname{div} S) + \xi \varrho_0 \sum_{ki} \partial_{x_k} v_i \partial_{x_i} v_k \right) \, dx \, dt = 0.$$

□

The force term has the following property.

3.10 Remark. If we write \mathbf{f} with respect to one of the identities

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega_t; \mathbb{R}^n) &= J_0(\Omega_t) \perp G(\Omega_t), \\
L^2(\Omega_t; \mathbb{R}^n) &= J(\Omega_t) \perp G_0(\Omega_t)
\end{aligned}$$

as

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} + \nabla \varphi$$

and in the same way

$$\zeta = \bar{\zeta} + \nabla \xi$$

we compute in 3.6 resp. 3.9

$$\int_{\Omega_t} \zeta \bullet \mathbf{f} \, dx \, dt = \int_{\Omega_t} \bar{\zeta} \bullet \bar{\mathbf{f}} \, dx \, dt + \int_{\Omega_t} \nabla \xi \bullet \nabla \varphi \, dx \, dt.$$

Please keep in mind that $\bar{\mathbf{f}}$ as well as $\nabla \varphi$ depends on the decomposition, therefore are different functions in each case.

Ist die Kraft gegeben durch Rotation und Schwere, ergibt sich ein weites Feld von Anwendungen, siehe etwa die Existenz einer Lösung in Solonnikov [64], was im nicht viskosen Fall von Newton bewiesen wurde, siehe 16.5.

4 Euler Gleichungen

The temperature dependent fluid equation (IV2.15) with zero viscosity, that is $S = 0$, and with zero thermal conductivity, that is $q = 0$, are the equations in this section. That is, we have a small viscosity or a large Reynolds number, see [Wikipedia: Inviscid flow], or mathematically we let the stress tensor $S \rightarrow 0$ in the momentum equation. Therefore we have the following assumptions with respect to the general equation in (III2.5)

$$\mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{r} = 0, \quad \Pi = p\text{Id}, \quad q = 0, \quad g = 0.$$

Thus the resulting compressible or incompressible Euler equations are limits of the main fluid equations in (IV2.2), and we end up with the

Euler-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \text{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \text{div}(\varrho v v^T + p\text{Id}) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \text{div}((e + p)v) &= v \bullet \mathbf{f} \end{aligned}$$

(IV4.1)

ϱ Masse, v Geschwindigkeit, p Druck,
 ε innere Energie, $e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ gesamte Energie,
 \mathbf{f} (klassische) Kraft.

You can read [Wikipedia: Euler equations] [Euler.equations(Wikipedia).pdf] as an introduction, it is said there: “Historically, only the incompressible equations have been derived by Euler”.

Referenzen: In the **incompressible** case we mainly use the classical book of Acheson [1]. Also a recent publication by Hutter & Wang [8] has an extensive chapter [8, 6 Function-Theoretical Methods Applied to Plane Potential Flows]. For the numerics in the **compressible** case we recommend Kröner [51]. See also the references below.

Incompressible case

Let us consider the incompressible case that is $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$. With this assumption we should keep 3.4 in mind, that is, we have constant temperature $\theta = \text{const}$ (usually in the incompressible equations there is no reference to temperature). And it means that the system has no energy equation, that is, instead of the entropy inequality we require the free energy inequality (for its derivation see section III.5). Also now the pressure p is an independent variable (see 3.2 for details), whereas before it was a function of ϱ and θ (see

(IV4.16) in the compressible case). Hence there is no restriction at all for the pressure. We obtain

<p><i>Inkompressible Euler-Gleichungen:</i></p> $\operatorname{div} v = 0,$ $\varrho_0(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \nabla p = \mathbf{f}$ <hr style="width: 50%; margin: 10px auto;"/> <p>p Druck, v Geschwindigkeit, $\varrho_0 > 0$ konstante Masse, \mathbf{f} Kraft.</p>	(IV4.2)
--	---------

Or equivalently, one can say that this is the (incompressible) Navier-Stokes equation (see section 3) in the limit $S \rightarrow 0$.

References: See Acheson [1, 1.3 Equation of motion of an ideal fluid], [1, 1.4 Vorticity: irrotational flow], [1, 1.5 The vorticity equation], and see Rill [61, Reibungsfreie, inkompressible Strömung], and Adams [3, 2 Potentialströmungen].

Let us define the

4.1 Vorticity. Let $n = 3$. The *vorticity* of a velocity v is defined as

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &:= \operatorname{rot} v := (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \\ &= \sum_{(i,j,k) \text{ zyklisch}} (\partial_j v_k - \partial_k v_j) \mathbf{e}_i = \sum_{j=1,2,3} \mathbf{e}_j \times \partial_j v, \end{aligned}$$

wobei (i, j, k) zyklisch heißt, dass $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$. Die Rotation von v kann auch geschrieben werden für jedes Orthonormalsystem $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 , wobei (e_1, e_2, e_3) dieselbe Orientierung hat wie das Standardsystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Diese Version lautet ²

$$\operatorname{rot} v = \sum_{j=1,2,3} e_j \times \partial_{e_j} v$$

und ist eine Verallgemeinerung der Definition. In der Welt mit dem Nabla Operator ist

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v \quad \text{wobei} \quad \nabla \times = \sum_j e_j \times \partial_{e_j}.$$

Beweis. If we define the matrix $E = (E_{jk})_{jk}$, $E_{jk} := e_j \bullet e_k$, we see that

$$\begin{aligned} \sum_j e_j \times \partial_{e_j} v &= \sum_{jk} E_{jk} e_j \times \partial_k v = \sum_{jkl} E_{jk} E_{jl} \mathbf{e}_l \times \partial_k v \\ &= \sum_{kl} \sum_j E_{jk} E_{jl} \mathbf{e}_l \times \partial_k v = \sum_{kl} (E^T E)_{kl} \mathbf{e}_l \times \partial_k v = \sum_{kl} \delta_{kl} \mathbf{e}_l \times \partial_k v \\ &= \sum_j \mathbf{e}_j \times \partial_j v = \operatorname{rot} v \end{aligned}$$

² By \times we denote the 3-dimensional vector product.

since $E^T E = \text{Id}$ (see the proof of I.1.3). \square

We now assume that the fluid is under gravity from an outside body (usually it is the Earth) with a potential ϕ , defined in (I2.10), therefore

$$\mathbf{f} = \varrho_0 \mathbf{g} \nabla \phi + \mathbf{f}_0, \tag{IV4.3}$$

where \mathbf{f}_0 is a classical force (see II.3.8). With this we rewrite the incompressible Euler equation:

4.2 Lemma. If (IV4.3) for the force is used, the incompressible Euler equation (IV4.2) is equivalent to

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \\ \partial_t v + \boldsymbol{\omega} \times v + \nabla \left(\frac{1}{2} |v|^2 + \frac{p}{\varrho_0} - \mathbf{g} \phi \right) &= \frac{\mathbf{f}_0}{\varrho_0}. \end{aligned}$$

(IV4.4)

Beweis. With (IV4.3) the momentum equation of the Euler system reads

$$\partial_t v + v \bullet \nabla v + \nabla \left(\frac{p}{\varrho_0} - \mathbf{g} \phi \right) = \frac{\mathbf{f}_0}{\varrho_0}.$$

Now

$$\begin{aligned} v \bullet \nabla v &= \left(\sum_j v_j \partial_j v_i \right)_i = \underbrace{\left(\sum_j (\partial_j v_i - \partial_i v_j) v_j \right)_i}_{= 2(Dv)^A v} + \underbrace{\left(\sum_j \partial_i v_j \cdot v_j \right)_i}_{= \nabla \left(\frac{1}{2} |v|^2 \right)}, \end{aligned}$$

therefore

$$\partial_t v + 2(Dv)^A v + \nabla \left(\frac{1}{2} |v|^2 + \frac{p}{\varrho_0} - \mathbf{g} \phi \right) = \frac{\mathbf{f}_0}{\varrho_0}.$$

What is left is the identity

$$2(Dv)^A v = \boldsymbol{\omega} \times v.$$

This follows from

$$\begin{aligned} Dv &= \begin{bmatrix} v_{1'1} & v_{1'2} & v_{1'3} \\ v_{2'1} & v_{2'2} & v_{2'3} \\ v_{3'1} & v_{3'2} & v_{3'3} \end{bmatrix}, \\ 2(Dv)^A &= \begin{bmatrix} 0 & v_{1'2} - v_{2'1} & v_{1'3} - v_{3'1} \\ v_{2'1} - v_{1'2} & 0 & v_{2'3} - v_{3'2} \\ v_{3'1} - v_{1'3} & v_{3'2} - v_{2'3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_3 & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 & 0 & -\boldsymbol{\omega}_1 \\ -\boldsymbol{\omega}_2 & \boldsymbol{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_3 & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 & 0 & -\boldsymbol{\omega}_1 \\ -\boldsymbol{\omega}_2 & \boldsymbol{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times v. \end{aligned}$$

\square

From this the vorticity equation can be derived.

4.3 Vorticity equation. It follows from 4.2 that with $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}v$

$$(\partial_t + v \bullet \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \bullet \nabla) v + \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}_0}{\rho_0} \right).$$

Beweis. We take the rotation of the momentum equation in (IV4.4) and use the fact that $\text{rot} \nabla h = 0$ for every function h . This gives

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times v) = \text{rot} \left(\frac{\mathbf{f}_0}{\rho_0} \right).$$

Now we obtain

$$\begin{aligned} \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times v) &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times v) = \sum_j \mathbf{e}_j \times \partial_j (\boldsymbol{\omega} \times v) \\ &= \sum_j \left(\mathbf{e}_j \times ((\partial_j \boldsymbol{\omega}) \times v) + \mathbf{e}_j \times (\boldsymbol{\omega} \times \partial_j v) \right) \\ &\quad (\text{since } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}) \vec{c} \text{ for } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3) \\ &= \sum_j \left((\mathbf{e}_j \bullet v) \partial_j \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{e}_j \bullet \partial_j \boldsymbol{\omega}) v + (\mathbf{e}_j \bullet \partial_j v) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{e}_j \bullet \boldsymbol{\omega}) \partial_j v \right) \\ &= (v \bullet \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\nabla \bullet \boldsymbol{\omega}) v + (\nabla \bullet v) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \bullet \nabla) v. \end{aligned}$$

Since $\nabla \bullet \boldsymbol{\omega} = \nabla \bullet \text{rot}v = 0$ and $\nabla \bullet v = 0$ by the mass conservation in (IV4.4), we infer

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times v) = (v \bullet \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \bullet \nabla) v$$

and hence $\partial_t \boldsymbol{\omega} + \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times v) = (\partial_t + v \bullet \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \bullet \nabla) v$. \square

With this we can formulate

4.4 Bernoulli equation. Let the flow be incompressible (and $n = 3$) so that (IV4.4) is satisfied. Moreover, assume that $\mathbf{f}_0 = 0$ ³ and that the flow domain is simply connected.

(1) If the velocity $v = \nabla \varphi$ in the flow region⁴ then

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho_0} - \mathbf{g} \phi = \text{const}(t) \quad (\text{IV4.5})$$

(2) If the flow is irrotational, that is $\text{rot}v = 0$, and stationary (steady), then

$$\frac{1}{2} |v|^2 + \frac{p}{\rho_0} - \mathbf{g} \phi = \text{const} \quad (\text{IV4.6})$$

³which is true for certain observers which represent an inertial system (see II.3.9)

⁴Then the flow is called *potential flow*

Bemerkung: Eine physikalische Begründung für einen zweidimensionalen rotationsfreien Fluss findet sich in 4.8.

Beweis. In case (1) it is also $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} \nabla \varphi = 0$, hence in all cases the momentum part of (IV4.4) becomes

$$\partial_t v + \nabla \left(\frac{1}{2} |v|^2 + \frac{p}{\rho_0} - \mathbf{g} \phi \right) = 0 \quad (\text{IV4.7})$$

In case (2) the flow is stationary, hence the assertion follows since the domain is simply connected. In case (1) we insert $v = \nabla \varphi$ in (IV4.7)

$$\nabla \left(\partial_t \varphi + \frac{1}{2} |v|^2 + \frac{p}{\rho_0} - \mathbf{g} \phi \right) = 0$$

and from there the assertion. \square

4.5 Boundary to air. Let a stationary incompressible flow have a connected boundary $\mathcal{S} \subset \partial\Omega$ to the air. Then $v \bullet \nu_\Omega = 0$ on \mathcal{S} and, if the flow is irrotational, the distributional Euler equation says (without surface tension and $\mathbf{f}_0 = 0$) that

$$\frac{1}{2} |v|^2 = \mathbf{g} \phi + \text{const} \quad \text{on } \mathcal{S}. \quad (\text{IV4.8})$$

(1) If the gravity term vanishes (i.e. if the \mathbf{g} -term is not there) the modulus of the velocity is constant.

(2) With gravity on the surface of the Earth $|v(x)|^2 = -2g_{\text{Erde}} x_3 + \text{const}$, where $-\mathbf{e}_3$ points to the center of Earth (for g_{Erde} see the end of section I.4).

By Bernoulli's law 4.5(2) the speed of water $|v|$ (assumed as being incompressible) will become larger if the water falls down. Therefore the jet of water (*de*: Wasserstrahl) becomes narrow further down (see Abb. 7). In general there is surface tension between water and air. Therefore far down the jet will split into drops.



Abb. 7: Water under gravity (down is to the right-side)

Beweis (2). We have to write the conservation of mass and momentum across the boundary \mathcal{S} . Since the flow is stationary this means that in an open set $U \subset \mathbb{R}^3$ the distributional mass law

$$\operatorname{div}[\varrho_0 v \mathcal{X}_\Omega] = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(U)$$

is satisfied where Ω is the domain occupied by water, and the distributional momentum law (without terms on \mathcal{S})

$$\operatorname{div}[(\varrho_0 v v^T + p \operatorname{Id}) \mathcal{X}_\Omega + p_0 \operatorname{Id} \mathcal{X}_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}] = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(U)$$

where p_0 is the constant outside pressure. This gives the Euler equations in Ω and the following conditions on the boundary \mathcal{S}

$$\begin{aligned} v \bullet \nu_\Omega &= 0, \\ (\varrho_0 v v^T + (p - p_0) \operatorname{Id}) \nu_\Omega &= 0, \end{aligned}$$

which reduces to $p - p_0 = 0$ on \mathcal{S} . In Ω the Bernoulli equation reads

$$\frac{1}{2} |v|^2 = \mathbf{g}\phi - \frac{p}{\varrho_0} + \text{const},$$

so that at the boundary \mathcal{S}

$$\frac{1}{2} |v|^2 = \mathbf{g}\phi - \frac{p_0}{\varrho_0} + \text{const}.$$

The outside pressure p_0 is constant and the gravity potential on the surface of the Earth is given by $\mathbf{g}\phi(x) = -g_{\text{Erde}} x_3 + \text{const}$ (this is the linear approximation). \square

4.6 Boundary to a rigid body. Let a stationary incompressible flow have a boundary $\Sigma \subset \partial\Omega$ to a rigid body. Then $v \bullet \nu_\Omega = 0$ on Σ and the force on the rigid body is $p \nu_\Omega$ on Σ . Here $\mathbf{f}_0 = 0$ is assumed. *Remark:* This result is consistent with the distributional approach across Σ , considering the rigid body without any contribution on the surface Σ .

Vortices of fluid flows are natural effects in nature and also natural effects for the mass-momentum equations. In the easiest case ($a = 0$ in 4.7) they have a singularity which is a line in space, and in the neighbourhood the velocity v times the distance to the line r goes to a limit as approaching the line. Therefore these vortices are so called “ vr -vortices” (see section 8 for a viscous version of them). Here is an example.

4.7 Rankine Wirbel (Beispiel). Let $a > 0$ and $\Omega \in \mathbb{R}$. Consider

$$v(x) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda r}{a^2} \mathbf{e}_\theta & \text{if } r \leq a \\ \frac{\lambda}{r} \mathbf{e}_\theta & \text{if } r \geq a \end{array} \right\}, \quad \mathbf{e}_\theta := \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

where $x = (x_1, x_2, x_3)$ and $(x_1, x_2) = re^{i\theta}$. If $a \rightarrow 0$ this converges to a vr -vortex. The center of the vortex is $\{(0, 0, s) ; s \in \mathbb{R}\}$ and in the set $\{x \in \mathbb{R}^3 ; |(x_1, x_2)| \leq a\}$ the velocity is the velocity of a rigid body. This example satisfies the stationary mass-momentum equations without gravity and with $\mathbf{f}_0 = 0$. *Reference: See Giaioti & Stel [42].*

Beweis. As in the previous proof we have to show that in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{div}[\varrho v] = 0, \quad \operatorname{div}[\varrho v v^T + p \operatorname{Id}] = 0,$$

where the mass density is given by

$$\varrho(x) = \begin{cases} \varrho_f & \text{mass density of fluid,} \\ \varrho_s & \text{mass density of solid.} \end{cases}$$

We have $v(x) = v_\vartheta(r)\mathbf{e}_\vartheta$ with

$$v_\vartheta(r) := \begin{cases} \frac{\lambda}{r} & \text{in the fluid,} \\ \frac{\lambda r}{a^2} & \text{in the solid,} \end{cases}$$

and we obtain

$$\partial_{\mathbf{e}_r} v = v'_\vartheta(r)\mathbf{e}_\vartheta, \quad \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} v = -\frac{v_\vartheta(r)}{r}\mathbf{e}_r,$$

therefore

$$\operatorname{div} v = \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} v + \mathbf{e}_\vartheta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} v = v'_\vartheta(r)\mathbf{e}_r \bullet \mathbf{e}_\vartheta - \frac{v_\vartheta(r)}{r}\mathbf{e}_r \bullet \mathbf{e}_\vartheta = 0$$

in the entire space. Since v is tangential on the boundary between fluid and solid the mass part is satisfied. The momentum part consists of the differential equations $\operatorname{div}(\varrho v v^T + p \operatorname{Id}) = 0$ in the fluid and solid, where

$$p = \begin{cases} p_f & \text{pressure of fluid,} \\ p_s & \text{pressure of solid,} \end{cases}$$

and, since v is tangential on the boundary, the condition $p_f = p_s$ on the interface. The differential equation reduces to $\varrho v \bullet \nabla v + \nabla p = 0$ in both regions. Hence

$$\nabla p = -\varrho v \bullet \nabla v = -\varrho v_\vartheta (\mathbf{e}_\vartheta \bullet \nabla)(v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta) = -\varrho v_\vartheta(r)^2 \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta = \frac{\varrho}{r} v_\vartheta(r)^2 \mathbf{e}_r$$

since $\partial_{\mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta = -\frac{1}{r}\mathbf{e}_r$. Therefore p is a function of r only and

$$\partial_r p = \frac{\varrho}{r} v_\vartheta(r)^2 = \begin{cases} \frac{\lambda^2 \varrho}{r^3} & \text{in the fluid,} \\ \lambda^2 \varrho r a^4 & \text{in the solid,} \end{cases}$$

This gives

$$p_f(r) = c_f - \frac{\lambda^2 \varrho_f}{2r^2},$$

$$p_s(r) = c_s + \frac{\lambda^2 \varrho_s r^2}{2a^4}.$$

If we normalize the pressure such that $p(r) \rightarrow 0$ if $r \rightarrow \infty$, we choose $c_f = 0$ and c_s so that the pressure is continuous at the interface, that is,

$$0 = p_s(a) - p_f(a) = c_s + \frac{\lambda^2}{2a^2}(\varrho_s + \varrho_f).$$

Then the distributional differential equations are satisfied. We compute in the outer region

$$\operatorname{rot} v = (\mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} v - \mathbf{e}_\vartheta \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} v) \mathbf{e}_{x_3} = \left(-\frac{v_\vartheta(r)}{r} - v'_\vartheta(r) \right) \mathbf{e}_{x_3} = 0,$$

hence the Bernoulli equation 4.4(2) is satisfied in the outer region which is not simply connected. In the inner region (ein unendlicher Stab)

$$v(x) = \frac{\lambda}{a^2} r \mathbf{e}_\vartheta = \frac{\lambda}{a^2} (-x_2, x_1, 0),$$

which is a movement of a rigid body. □

Classical aerofoil theory

Referenzen: See Acheson [1, 4. Classical aerofoil theory] and Landau & Lifschitz [10, §48 Der Auftrieb eines dünnen Tragflügels]. As modern book see Adams [3, 2.3 Zweidimensionale, inkompressible Potentialströmungen].

We describe now parts of the classical theory. The observer is situated in the wing (see Abb. 9). Since we consider a constant velocity at infinity, this condition will stay unchanged, since the wing is not turning. We consider a stationary flow in 2D, that is,

$$v(x_1, x_2, x_3) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2), 0).$$

It follows that

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) \text{ with } \omega = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1.$$

Then it holds:

4.8 Lemma. Let $\mathbf{f}_0 = 0$. If the incompressible flow is 2D and stationary as in Abb. 8 and if it has constant velocity v_∞ when $x_1 \rightarrow -\infty$ then the flow is irrotational, that is $\boldsymbol{\omega} = 0$ in the flow region.

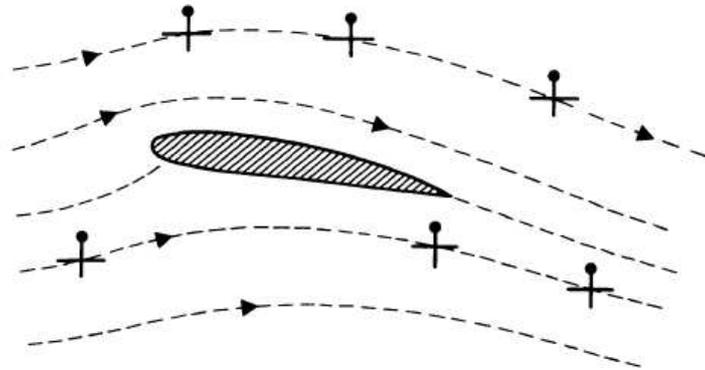


Abb. 8: “The behaviour of a small ’vorticity meter’ placed in the steady flow past a fixed wing at small angle of attack. The flow is clearly irrotational.” Vom Buch von Acheson [1, Fig. 1.8].

Beweis. Since $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ it follows $(\boldsymbol{\omega} \bullet \nabla)v = \omega \partial_{x_3} v = 0$. Therefore we conclude from 4.3, if the force $\mathbf{f}_0 = 0$, that $(\partial_t + v \bullet \nabla)\boldsymbol{\omega} = 0$. But the flow is stationary, so $\partial_t v = 0$, and therefore $v \bullet \nabla \boldsymbol{\omega} = 0$. Hence $\boldsymbol{\omega}$ is constant on streamlines (a streamline is a curve $\{\xi(s); s \in \mathbb{R}\}$ with $\xi'(s) = v(\xi(s))$). Since by Abb. 8 each streamline goes to the region where the flow gradient approaches zero, it follows that $\boldsymbol{\omega} = 0$ on each streamline, hence in the entire flow region. \square

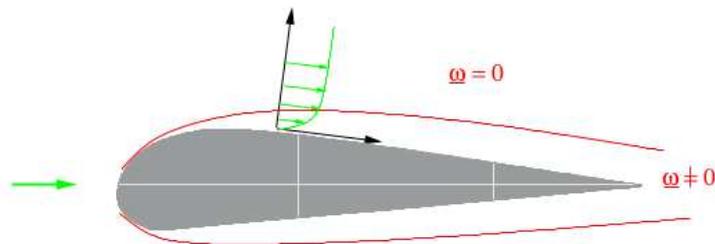


Abb. 9: The vorticity around a wing, aus Adams [3]

As seen in Abb. 9 the proof shows that $\boldsymbol{\omega}$ is 0 only in a subregion of the flow. We consider now a stationary incompressible flow in 2D, which is irrotational, that is, Bernoulli’s equation 4.4 holds, and we assume $\mathbf{f}_0 = 0$.

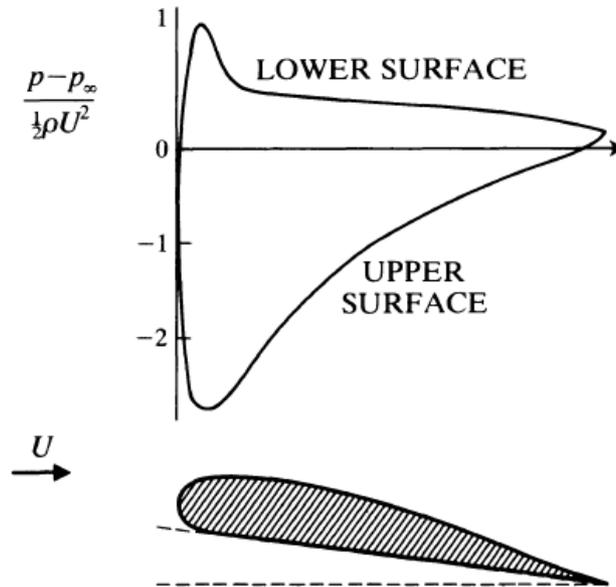


Abb. 10: “Typical pressure distribution on a wing in steady flow” aus dem Buch von Acheson [1, Fig. 1.9]. “The pressures on the upper surface are substantially lower than the free-stream value p_∞ , while those on the lower surface are a little higher than p_∞ . In fact, then, the wing gets most of its lift from a suction effect on its upper surface.”

Now we use the special multivalued complex function ⁵

$$\begin{aligned}
 W(Z) &:= U \left(Z e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{Z} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z \\
 &\text{for } \{Z \in \mathbb{C}; Z \neq 0\} \text{ with } U, \alpha, R, \Gamma \in \mathbb{R}, \\
 &\text{where } R > 0, U > 0, \text{ and preferably } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{IV4.9}$$

This function is multivalued, since the logarithm is multivalued. If we set

$$w(z) = W(z), \quad z = x_1 + ix_2, \quad w = \varphi + i\psi, \tag{IV4.10}$$

we compute for the velocity

$$v_1 - iv_2 = \partial_z w = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z}, \tag{IV4.11}$$

hence $v = (v_1, v_2, 0)$ with $v_1 + iv_2 = U e^{i\alpha}$ as $|z| \rightarrow \infty$. That is, at infinity we have a velocity of magnitude U in direction $e^{i\alpha}$. The multivalued term

⁵ Wir setzen elementare Kenntnisse über komplexe Funktionen voraus.

is a “vortex flow” of strength $\Gamma \in \mathbb{R}$ (a positive Γ means a flow in positive direction), since

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi z} = -\frac{i\Gamma}{2\pi|z|^2}\bar{z} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}ie^{-i\theta},$$

that is, with $\mathbf{e}_\theta = ie^{i\theta}$,

$$v_1 + iv_2 = U\left(e^{i\alpha} - \frac{R^2}{z^2}e^{-i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta$$

around the vortex $\{(0, 0, s); s \in \mathbb{R}\}$ (see 4.7 with $\Omega = \frac{\Gamma}{2\pi}$).

4.9 Flow around a circular cylinder (Lemma). The velocity given in (IV4.11), which is $v = (v_1, v_2, 0)$, is a solution of Bernoulli’s equation 4.4 (with vanishing gravity and $\mathbf{f}_0 = 0$) in the domain

$$\Omega := (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(0)}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3.$$

Moreover, we have $v \bullet \nu_\Omega = 0$ on $\partial\Omega$. The total force F on the boundary is

$$F = \int_{\partial B_R(0)} p\nu_\Omega \, dH^1 = -\frac{\rho_0 U \Gamma}{R} ie^{i\alpha},$$

where $Ue^{i\alpha}$ is the velocity at infinity. This is a **lift theorem**. *Hinweis:* See [Hyperphysics: Kutta-Joukowski Lift Theorem] and Acheson [1, Fig. 4.4]. And compare the pressure distribution in Abb. 10.

Beweis. The velocity v is given by (IV4.11) that is $v_1 - iv_2 = \partial_z w$ with a multivalued holomorphic function w , that is $\partial_{\bar{z}} w = 0$, see (IV4.10). Hence $\operatorname{div} v = 0$. If $z = x_1 + ix_2 = Re^{i\theta} \in \partial B_R(0)$ then $\nu_{B_R(0)}(z) = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{R}$, hence

$$\begin{aligned} -(v \bullet \nu_\Omega)(z) &= (v_1 + iv_2)(z) \bullet \nu_{B_R(0)}(z) \\ &= U\left(e^{i\alpha} - \frac{R^2}{z^2}e^{-i\alpha}\right) \bullet \nu_{B_R(0)}(z) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \bullet \nu_{B_R(0)}(z)}_{= 0} \\ &= U\left(e^{i\alpha} - \frac{R^2}{z^2}e^{-i\alpha}\right) \bullet \frac{z}{R} = U \operatorname{Re} \left(\left(e^{i\alpha} - \frac{R^2}{z^2}e^{-i\alpha}\right) \frac{\bar{z}}{R} \right) \\ &= U \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}}{R}e^{i\alpha} - \frac{R}{\bar{z}}e^{-i\alpha} \right) = 0. \end{aligned}$$

By Bernoulli’s law p in the flow region

$$p = \text{const} - \frac{\rho_0}{2}|v|^2.$$

And on the boundary of Ω , that is $\bar{z} = Re^{-i\theta}$, by (IV4.11) one computes

$$\begin{aligned} v_1 + iv_2 &= U\left(e^{i\alpha} - e^{2i\theta}e^{-i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi R}ie^{i\theta} \\ &= \left(U(1 - e^{2i(\theta-\alpha)}) + \frac{i\Gamma}{2\pi R}e^{i(\theta-\alpha)}\right)e^{i\alpha}, \end{aligned}$$

from which it follows that

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} (v_1 + iv_2) dH^1 = U e^{i\alpha},$$

that is, the velocity of the fluid on the obstacle $\partial\Omega$ in the mean is its value at infinity. We also compute

$$\begin{aligned} |v_1 + iv_2|^2 &= \left| U - U e^{2i(\theta-\alpha)} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i(\theta-\alpha)} \right|^2 \\ &= U^2 - 2U \operatorname{Re} \left(U e^{2i(\theta-\alpha)} - \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i(\theta-\alpha)} \right) + \underbrace{\left| U e^{2i(\theta-\alpha)} - \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i(\theta-\alpha)} \right|^2}_{= \left| U - \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i(\theta-\alpha)} \right|^2} \\ &= 2U^2 - 2U \operatorname{Re} \left(U e^{2i(\theta-\alpha)} \right) + \frac{U\Gamma}{\pi R} \operatorname{Re} \left(i e^{i(\theta-\alpha)} - i e^{-i(\theta-\alpha)} \right) + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \\ &= 2U^2 - 2U^2 \cos(2(\theta - \alpha)) - \frac{2U\Gamma}{\pi R} \sin(\theta - \alpha) + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2. \end{aligned}$$

Since

$$\int_{\partial B_R(0)} \nu_{B_R(0)} dH^1 = 0$$

this gives

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R(0)} p \nu_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} dH^1 &= \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varrho_0}{2} |v|^2 \nu_{B_R(0)} dH^1 \\ &= \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varrho_0}{2} |v_1 + iv_2|^2 \nu_{B_R(0)} dH^1 \\ &= -\varrho_0 \int_0^{2\pi} \left(U^2 \cos(2(\theta - \alpha)) + \frac{U\Gamma}{\pi R} \sin(\theta - \alpha) \right) e^{i\theta} d\theta \\ &= -\varrho_0 \int_0^{2\pi} \left(U^2 \cos(2(\theta - \alpha)) + \frac{U\Gamma}{\pi R} \sin(\theta - \alpha) \right) e^{i(\theta-\alpha)} d\theta \cdot e^{i\alpha} \\ &= -\varrho_0 \frac{U\Gamma}{\pi R} \int_0^{2\pi} \sin(\theta - \alpha) e^{i(\theta-\alpha)} d\theta \cdot e^{i\alpha} = -\frac{\varrho_0 U\Gamma}{R} i e^{i\alpha}. \end{aligned}$$

□

We want to describe the flow around a wing and for this we have to change the situation. We do this using a simple transformation, which keeps the situation at large z .

4.10 Joukowski transformation. Let $C > 0$.

(1) We consider a transformation from $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ to $z \in \mathbb{C}$ by

$$z = J(\zeta) := \zeta + \frac{C^2}{\zeta}.$$

The multivalued inverse transformation is

$$\zeta = J^{-1}(z) = \frac{z}{2} + \left(\frac{z^2}{4} - C^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \left(1 - \left(\frac{2C}{z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

where one has to use the “correct value” of the square root, exactly one chooses the branch around 1 for z large, and continues this branch as far as possible, which will be enough for our purpose. *Note:* In the book of Acheson [1, 4.8 Irrotational flow past a finite flat plate] the variable z is called Z and ζ is called z .

(2) Choose $\zeta_1 \in \mathbb{C}$ and define further

$$Z = \zeta - \zeta_1, \quad z = J(\zeta).$$

Here we use in dependence of R only certain values of C and certain ζ_1 , that is, they satisfy $\pm C \in \overline{B_R(\zeta_1)}$, a special choice is

$$C - \zeta_1 \in \partial B_R(0), \quad -C - \zeta_1 \in B_R(0), \quad (\text{IV4.12})$$

hence $0 < C < R$, in order to model a wing as in Abb. 12. *Bemerkung:* In Abb. 12 is $a := R$. See also [16-Class_JoukowskiMapping.pdf] from [34].

Beweis (1). It is $z = J(\zeta)$ if and only if $\zeta \neq 0$ and

$$0 = \zeta^2 + C^2 - z\zeta = \left(\zeta - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} + C^2,$$

that is

$$\left(\zeta - \frac{z}{2}\right)^2 = \frac{z^2}{4} - C^2 = \frac{z^2}{4} \left(1 - \left(\frac{2C}{z}\right)^2\right)$$

for $z \neq 0$, which is the formula. □

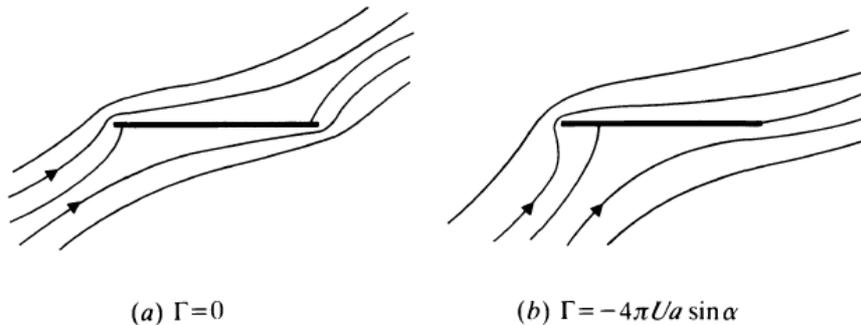


Abb. 11: “Irrotational flow past a finite flat plate” aus Acheson [1, Fig. 4.6].

We now set, with the function W given in (IV4.9),

$$w(z) = W(J^{-1}(z) - \zeta_1), \quad z = x_1 + ix_2, \quad (\text{IV4.13})$$

that is, $w(z) = W(Z)$ if z and Z are connected as in 4.10(2).

4.11 Flow around an aerofoil (Lemma). The velocity $v = (v_1, v_2, 0)$, given by $v_1 - iv_2 = \partial_z w(z)$, where w is defined in (IV4.13), is a solution of Bernoulli's equation 4.4 (with vanishing gravity and $\mathbf{f}_0 = 0$) in the domain

$$\Omega := (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \text{ with } \mathbb{R}^2 \setminus D = J(\mathbb{R}^2 \setminus B_R(\zeta_1)).$$

Moreover, we have $v_1 + iv_2 \rightarrow Ue^{i\alpha}$ for $|z| \rightarrow \infty$, and v satisfies the boundary condition $v \bullet \nu_\Omega = 0$ on $\partial\Omega$. The total force F on the boundary is

$$F = \int_{\partial D} p \nu_\Omega \, dH^1 = -\frac{\rho_0}{2} \int_{\partial B_R(\zeta_1)} |\partial_Z W(\zeta - \zeta_1)|^2 \frac{\zeta - \zeta_1}{R \partial_\zeta J(\zeta)} \, dH^1(\zeta).$$

Remark: In the case described in (IV4.12) one has $C = \zeta_1 + Re^{i\theta_1}$ for some $\theta_1 \in \mathbb{R}$. The above integral is then Cauchy's principal value at $\zeta = \zeta_1 + Re^{i\theta_1}$, see 4.12.

In the special case that $\zeta_1 = 0$ and $C = R$ one has the situation in Abb. 11.

Beweis. It is $w = W \circ h$ in Ω , where $h(z) := J^{-1}(z) - \zeta_1$ defines a holomorphic map with nonzero derivative (therefore its a conformal transformation), and the holomorphic function W satisfies 4.9. The domain Ω is defined in such a way, that $\partial\Omega$ by the map h will be mapped into $\partial B_R(0)$, that is, a tangential vector τ_Ω at z of $\partial\Omega$ will be mapped by the derivative Dh at z into a multiple of the tangential vector $\tau_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)}$ at $Z := h(z)$ of $\partial B_R(0)$. Therefore we have with $\lambda = |\partial_z h|$ the formulas

$$\partial_z h \tau_\Omega = Dh \tau_\Omega = \lambda \tau_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)}, \quad \partial_z h \nu_\Omega = Dh \nu_\Omega = \lambda \nu_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)}.$$

Now, for $Z = h(z)$,

$$\begin{aligned} v_1(z) - iv_2(z) &= \partial_z w(z) = \partial_z (W \circ h)(z) \\ &= \partial_z h(z) \partial_Z W(Z) = \partial_z h(z) (V_1(Z) - iV_2(Z)) \end{aligned} \quad (\text{IV4.14})$$

if V is defined by $V_1 - iV_2 := \partial_Z W$, which is the velocity used in 4.9. Since by 4.9 we know that $V \bullet \nu_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} = 0$, it follows using (IV4.14)

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda V \bullet \nu_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} = (V_1 + iV_2) \bullet (\lambda \nu_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)}) = (V_1 + iV_2) \bullet (\partial_z h \nu_\Omega) \\ &= \text{Re}((V_1 - iV_2) \partial_z h \nu_\Omega) = \text{Re}((v_1 - iv_2) \nu_\Omega) = (v_1 + iv_2) \bullet \nu_\Omega = v \bullet \nu_\Omega. \end{aligned}$$

This implies that v is tangential at the boundary of the wing $\partial\Omega$, that is, $v \bullet \nu_\Omega = 0$ on $\partial\Omega$, as indicated in Abb. 12.

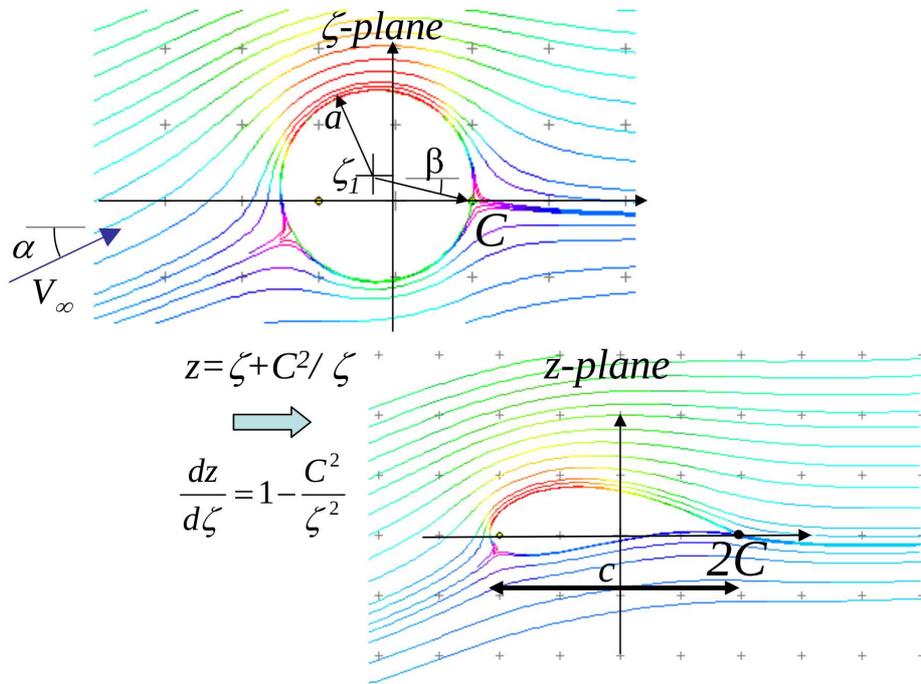


Abb. 12: “The cambered airfoil” aus [16_Class_JoukowskiMapping.pdf], “Re ζ_1 controls thickness, Im ζ_1 controls camber.”

We now compute the total force F on the boundary on a cross section, that is, $F = (F_1, F_2, 0)$. By Bernoulli’s law p in the flow region is $p = \text{const} - \frac{\rho_0}{2}|v|^2 = \text{const} - \frac{\rho_0}{2}|\partial_z w|^2$. Therefore

$$\begin{aligned} F &= \int_{\partial D} p \nu_{\Omega} \, d\mathbb{H}^1 = -\frac{\rho_0}{2} \int_{\partial D} |\partial_z w|^2 \nu_{\mathbb{R}^2 \setminus D} \, d\mathbb{H}^1(z) \\ &= \frac{\rho_0}{2} \int_{\partial D} |\partial_z w(z)|^2 \nu_D(z) \, d\mathbb{H}^1(z) \\ &= \frac{\rho_0}{2} \int_{\partial B_R(\zeta_1)} |\partial_z w(J(\zeta))|^2 \nu_D(J(\zeta)) |\partial_{\zeta} J(\zeta)| \, d\mathbb{H}^1(\zeta) \end{aligned}$$

since $z = J(\zeta)$ and therefore because J is a holomorphic function

$$d\mathbb{H}^1 \llcorner \partial D = |\partial_{\zeta} J| \, d\mathbb{H}^1 \llcorner \partial B_R(\zeta_1) .$$

The normal satisfies

$$\nu_D = \frac{\partial_{\zeta} J}{|\partial_{\zeta} J|} \nu_{B_R(\zeta_1)} ,$$

and $w(z) = W(h(z)) = W(J^{-1}(z) - \zeta_1)$ gives

$$\partial_z w(z) = \partial_Z W(h(z)) \partial_z h(z) = \frac{\partial_Z W(\zeta - \zeta_1)}{\partial_{\zeta} J(\zeta)} \text{ for } z = J(\zeta) .$$

Thus it is

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\varrho_0}{2} \int_{\partial B_R(\zeta_1)} |\partial_z w(J(\zeta))|^2 \nu_D(J(\zeta)) |\partial_\zeta J(\zeta)| \, dH^1(\zeta) \\
 &= \frac{\varrho_0}{2} \int_{\partial B_R(\zeta_1)} \frac{|\partial_Z W(\zeta - \zeta_1)|^2}{|\partial_\zeta J(\zeta)|^2} \partial_\zeta J(\zeta) \nu_{B_R(\zeta_1)}(\zeta) \, dH^1(\zeta) \\
 &= \frac{\varrho_0}{2} \int_{\partial B_R(\zeta_1)} |\partial_Z W(\zeta - \zeta_1)|^2 \frac{\nu_{B_R(\zeta_1)}(\zeta)}{\partial_\zeta J(\zeta)} \, dH^1(\zeta),
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

4.12 The case of a sharp trailing edge. This is the case in (IV.4.12), hence $C = \zeta_1 + Re^{i\theta_1}$ for some $\theta_1 \in \mathbb{R}$.

- (1) The total force on the wing is finite, since the integral in 4.11 has a Cauchy principle value at the angle θ_1 for every Γ .
- (2) The Kutta-Joukowski condition is, that the force at the trailing edge stays finite. This means

$$\Gamma = 4\pi R U \sin(\alpha - \theta_1).$$

Then the integrand in 4.11 is integrable.

Hinweis: See the pictures in Rill [61, Die Kutta Bedingung], which shows that in certain situations this case is stable. Rill writes in [61] zu den Bildern in Abb. 13: “Das Bild 1 zeigt die Strömung unmittelbar nach dem Start der Strömung. Wir sehen, daß die Strömung an der Hinterkante ‘versucht’ diese zu umströmen und damit den Ansatz eines Wirbels formt.” “Aus der Theorie der reibungsfreien Strömung resultiert, dass bei der Umströmung einer scharfen Ecke, wie der Hinterkante, unendlich große Geschwindigkeiten auftreten. Dies wird aber von der realen, reibungsbehafteten Strömung im Experiment nicht toleriert. Als Folge davon wandert der Staupunkt auf der Oberseite während des Anfahrvorganges in Richtung Hinterkante. Das Bild 2 zeigt diesen Übergangszustand. Schließlich stellt sich dann die endgültige, stationäre Strömung ein, die wir im Bild 3 beobachten. Wir sehen, daß die Strömung in diesem Fall die Ober- und Unterseite an der Hinterkante glatt verlässt.”

Beweis (1). We start with $J(\zeta) = \zeta + \frac{C^2}{\zeta}$ and

$$\partial_\zeta J(\zeta) = 1 - \left(\frac{C}{\zeta}\right)^2 = \left(1 + \frac{C}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{C}{\zeta}\right) = \frac{\zeta + C}{\zeta^2} (\zeta - C).$$

Now write $\zeta \in \partial B_R(\zeta_1)$ as $\zeta = \zeta_1 + Re^{i\theta}$ so that for $\theta = \theta_1$ the singularity C will be reached in the integral, that is $C = \zeta_1 + Re^{i\theta_1}$, and this implies

$$\zeta = \zeta_1 + Re^{i\theta} = C + Re^{i\theta_1} (e^{i(\theta - \theta_1)} - 1)$$

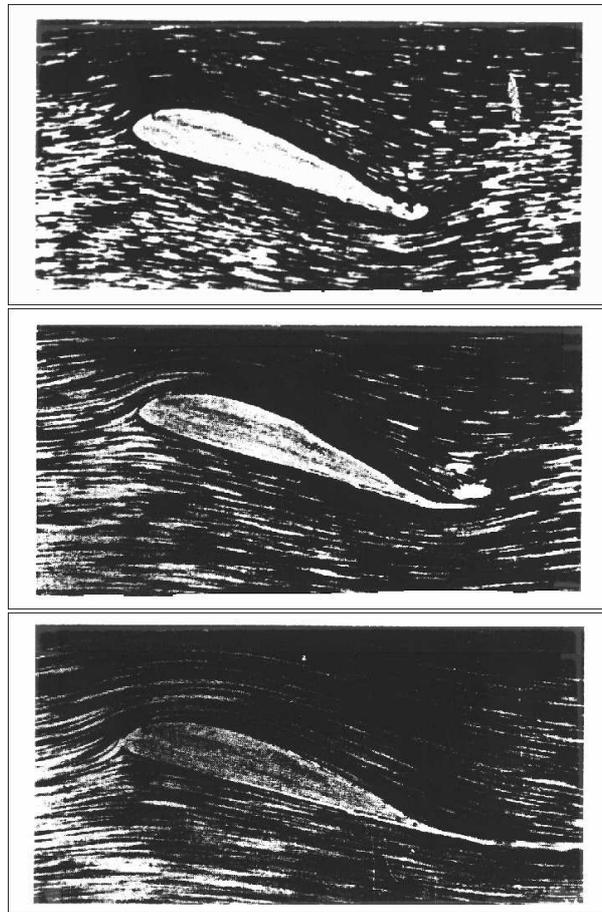


Abb. 13: “Entwicklung von auftriebsbehafteter Profilmströmung” aus Rill [61, Die Kutta Bedingung].

and therefore

$$\partial_{\zeta} J(\zeta) = \frac{\zeta + C}{\zeta^2} \operatorname{Re}^{i\theta_1} (e^{i(\theta - \theta_1)} - 1),$$

which implies the statement. \square

Beweis (2). We have to show that $\partial_Z W(Z) = 0$ at the trailing edge, that is $\zeta = C$ or $Z = \zeta - \zeta_1 = C - \zeta_1 = -R e^{i\theta_1}$. Since

$$\partial_Z W(Z) = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{Z^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi Z}$$

it follows that $\partial_Z W(Z) = 0$ is equivalent to

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Z}{RU} \partial_Z W(Z) = \frac{Z}{R} e^{-i\alpha} - \frac{R}{Z} e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi RU} \\ &= -e^{i(\theta_1 - \alpha)} + e^{i(\alpha - \theta_1)} - \frac{i\Gamma}{2\pi RU} \\ &= i\left(2\sin(\alpha - \theta_1) - \frac{\Gamma}{2\pi RU}\right), \end{aligned}$$

die behauptete Formel. □

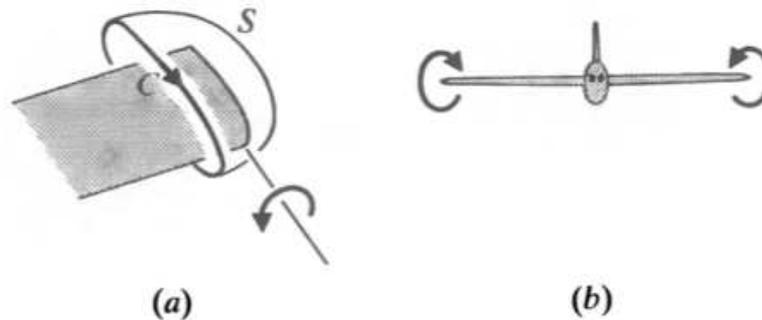


Abb. 14: “Trailing vortices: (a) definition sketch for application of Stoke’s theorem; (b) view from some distance ahead of the aircraft;” aus Acheson [1, Fig. 1.12.].

The 2D-method described here cannot treat the flow at the end of a wing, see Abb. 14, Abb. 15, and [3, 2.4 Umströmung von Tragflügeln endlicher Spannweite] which is a 3D-phenomenon and important for the flight of aircrafts. But for a flight of a full size glider (*de*: Segelflugzeug) with very long wings the 2D considerations are usefull.

Die hiergemachten Überlegungen gelten in der Realität natürlich nur in einem begrenzten Bereich, da darüberhinaus die Bedingungen der Eulergleichung die Wirklichkeit verlassen. In ihrem Gültigkeitsbereich sind die gemachten Aussagen jedoch überzeugend.

Compressible case

Usually one is concerned with the compressible case and this case contains the conservation laws for mass, momentum and energy:

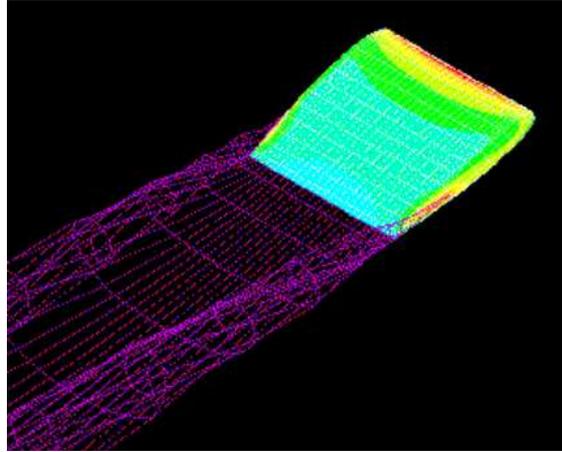


Abb. 15: “Flow over a low aspect ratio wing” aus [34, Lifting Line Theory].

(Kompressible) Euler-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + p \operatorname{Id}) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}((e + p)v) &= v \bullet \mathbf{f}\end{aligned}$$

(IV4.15)

ϱ Masse, v Geschwindigkeit, p Druck,
 ε innere Energie, $e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ gesamte Energie,
 \mathbf{f} (klassische) Kraft.

Performing the entropy principle 2.2 (with stress tensor S) we obtain (in the limit $S \rightarrow 0$) Gibbs relation

$$p = \varrho f'_{\varrho}(\varrho, \theta) - f(\varrho, \theta), \quad (\text{IV4.16})$$

where f is the internal free energy, and the entropy production (IV2.9) reduces to the fact that solutions in general are only L^∞ -functions. Therefore we would have to replace the equations by its distributional versions. However, in literature these equations appear in the usual form.

What is left from the entropy principle is that the solutions develop **shocks** (de: **Stoßwellen**), and the entropy production $\sigma \geq 0$ will lead (also in the limit $S \rightarrow 0$) to Rankine-Hugoniot conditions on the shock, which I will present in a separate publication [22]. Here I will give at least a short presentation of these shock conditions.

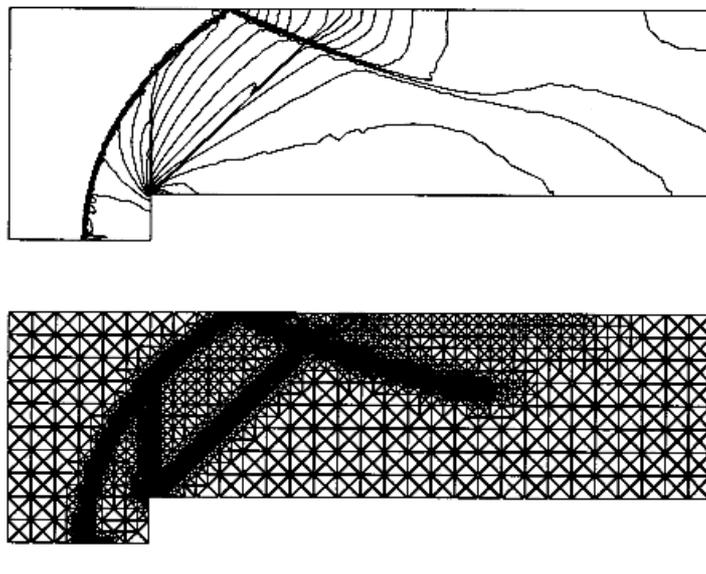


Abb. 16: “Transient phase for the forward-facing step in 2D” from Kröner [51, Example 5.3.9]: “In particular, the grid had to be refined and to be coarsened after the shock has passed through.”

4.13 Stoßwellen. If we denote the solution of (IV4.1) with $(\varrho^1, v^1, \theta^1)$ and $(\varrho^2, v^2, \theta^2)$ on both sides $\Omega^1, \Omega^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ of the shock Γ , the following conditions are satisfied on Γ_t :

$$\begin{aligned} v_{\text{tan}}^1 &= v_{\text{tan}}^2, \\ \mathbf{m} := \varrho^1 \lambda^1 &= \varrho^2 \lambda^2 \neq 0, \\ p^1 + \varrho^1 |\lambda^1|^2 &= p^2 + \varrho^2 |\lambda^2|^2, \\ \frac{\varepsilon^1 + p^1}{\varrho^1} + \frac{|\lambda^1|^2}{2} &= \frac{\varepsilon^2 + p^2}{\varrho^2} + \frac{|\lambda^2|^2}{2}, \\ \mathbf{m} \cdot \frac{\eta^1}{\varrho^1} &\geq \mathbf{m} \cdot \frac{\eta^2}{\varrho^2}, \end{aligned}$$

where $\lambda^k := (v^k - v_\Gamma) \bullet \nu$, ν a unit normal on Γ_t , and v_Γ defined in I.4.1. Here p is the pressure from (IV4.16) and η the entropy derived from the free energy in (IV4.16) (see III.1.6).

If there are shocks, they have to be reproduced by the numerical schemes (see Abb. 16 and Abb. 17). For numerics one writes this system in a contracted form

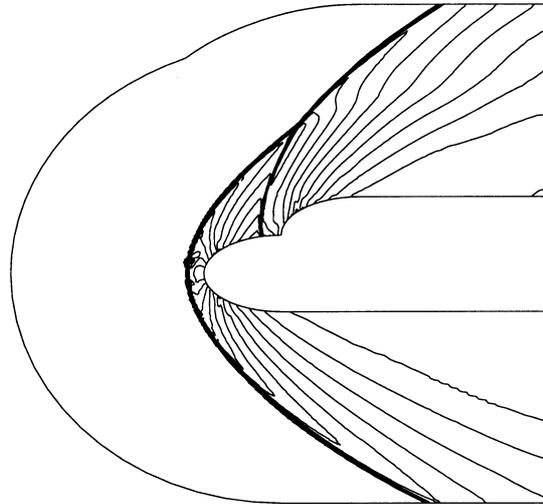


Abb. 17: “Flow around a double ellipsoid” from Kröner [51, Example 5.3.7].

$$\partial_t y + \operatorname{div} F(y) = h,$$

$$y = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F(y) = \begin{bmatrix} \varrho v \\ \varrho v v^T + p \operatorname{Id} \\ (e + p)v \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ v \bullet \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV4.17})$$

This is a hyperbolic system, which normally has L^∞ -solutions, thus solutions in the sense of distributions. The introduction of the variable y requires that $\varrho > 0$ for the solution (or what would be better, that ϱ is bounded from below by a positive constant). In the momentum part $p = \tilde{p}(y)$. Man kann sagen, dass die numerischen Verfahren eine numerische Viskosität erzeugen, welche positiv ist im Einklang mit dem Entropieprinzip.

References: Numerical schemes of this type you will find in Kröner [51, Chap. 5?????]. Das Bild Abb. 16 ist von T. Geßner: Zeitabhängige Adaption für Finite Volume Verfahren höherer Ordnung am Beispiel der Euler-Gleichungen der Gasdynamik, Diplomthesis IAM Univ. Bonn 1994. Und das Bild Abb. 17 ist von J. Becker: Finite Volume Verfahren in 2-D für Systeme von hyperbolischen Differentialgleichungen mit Flußfunktion von Osher und Solomon, Diplomthesis IAM Univ. Bonn 1995.

5 Nichtlineare Elastizität

Wir kommen zurück auf die deformierbaren Körper in Abschnitt I.6. Wir hatten in I.6.2 gezeigt, dass wir die Erhaltungssätze auch in den Referenzkoordinaten schreiben können (wir hatten dort $\mathbf{J} = 0$ gesetzt). Mit der nun zusätzlichen Energiegleichung haben wir in physikalischen Koordinaten das System

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f} + \mathbf{r}v, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + g\end{aligned}\tag{IV5.1}$$

zu betrachten, wobei wir die physikalischen Größen der Massen- und Impulserhaltung wie in (I6.4) zu verstehen haben, insbesondere ist v eine abhängige Variable, und es ist

$$\mathbf{J} = 0 \text{ sowie der Drucktensor } \Pi \text{ symmetrisch.}$$

Die Größen der Energieerhaltung sind

$$e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2, \quad \varepsilon \text{ objektiver Skalar, } q \text{ objektiver Vektor,}$$

und die rechten Seiten haben wegen (III2.7) die Darstellung $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{r}v$ und $\tilde{g} = \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + g$, wobei \mathbf{f} eine klassische Kraft ist und g ein objektiver Skalar. Wir wollen nun zeigen, dass dieses System in Referenzkoordinaten äquivalent ist zu

Masse-Impuls-Energie:

$$\begin{aligned}\partial_t \underline{\varrho} &= \underline{\mathbf{r}}, \\ \partial_t(\underline{\varrho} V) - \operatorname{div} P &= \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}}V, \\ \partial_t \underline{e} + \operatorname{div}(-P^T V + \underline{q}) &= \frac{\underline{\mathbf{r}}}{2}|V|^2 + V \bullet \underline{\mathbf{f}} + \underline{g},\end{aligned}\tag{IV5.2}$$

$\underline{\varrho}, \underline{\mathbf{r}}, V, P, \underline{\mathbf{f}}$ wie in (I6.4),
 $\underline{e} := J \cdot (e \circ \tau), \quad \underline{q} := J F^{-1}(q \circ \tau), \quad \underline{g} := J \cdot (g \circ \tau),$

und zwar gilt Folgendes.

5.1 Lemma. In Analogie zu I.6.2 und mit den dortigen Bezeichnungen zeigen wir, dass (IV5.1) äquivalent ist zu (IV5.2).

Beweis (Erste Version). Wir starten mit den Gleichungen (IV5.1) und schreiben sie in der Form

$$\partial_t \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v \\ e \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \begin{bmatrix} \varrho v_i \\ \tilde{\Pi}_{ki} \\ \tilde{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{g} \end{bmatrix}, \tag{IV5.3}$$

hierbei ist

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_{ki} &= \varrho v_k v_i + \Pi_{ki}, & \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{f} + \mathbf{r}v \\ \tilde{q} &= e v + \Pi^T v + q, & \tilde{g} &= \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + g.\end{aligned}\quad (\text{IV5.4})$$

We want to show that this system is equivalent to

$$\partial_t \begin{bmatrix} \underline{\varrho} \\ \underline{\varrho}V \\ \underline{e} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\tilde{\Pi}_{ki} \right)_k \\ \tilde{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{r}} \\ \underline{\mathbf{f}} \\ \underline{g} \end{bmatrix}.\quad (\text{IV5.5})$$

According to theorem **I.6.1** systems **(IV5.3)** and **(IV5.5)** are equivalent, if the quantities satisfy

$$\begin{aligned}\underline{\varrho} &= J \varrho \circ \tau, & \underline{\mathbf{r}} &= J \mathbf{r} \circ \tau, \\ \underline{\varrho}V &= J \varrho \circ \tau v \circ \tau, & \underline{\mathbf{f}} &= J \tilde{\mathbf{f}} \circ \tau, \\ \underline{e} &= J e \circ \tau, & \underline{g} &= J \tilde{g} \circ \tau, \\ 0 &= J F^{-1} ((\varrho v) \circ \tau - \varrho \circ \tau V), \\ \left(\tilde{\Pi}_{ki} \right)_i &= J F^{-1} \left(\left(\tilde{\Pi}_{kj} \right)_j \circ \tau - (\varrho v)_k \circ \tau V \right) \quad \text{for all } k, \\ \underline{\tilde{q}} &= J F^{-1} (\tilde{q} \circ \tau - e \circ \tau V).\end{aligned}$$

This means that the following known (see **I.6.2**) relations are satisfied

$$\underline{\varrho} = J \varrho \circ \tau, \quad V = v \circ \tau, \quad \underline{\mathbf{r}} = J \mathbf{r} \circ \tau.$$

Then the above form of $\tilde{\Pi}_{ki}$ in **(IV5.4)** gives that

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_{ki} &= J \sum_j (F^{-1})_{ij} (\tilde{\Pi}_{kj} \circ \tau - (\varrho v)_k \circ \tau V_j) \\ &= J \sum_j (F^{-T})_{ji} (\Pi_{kj} \circ \tau) = J ((\Pi \circ \tau) F^{-T})_{ki} = -P_{ki}\end{aligned}$$

and the form of $\tilde{\mathbf{f}}$ in **(IV5.4)** gives that

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}} = J \tilde{\mathbf{f}} \circ \tau = J (\mathbf{f} + \mathbf{r}v) \circ \tau = \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}}V \quad \text{if } \underline{\mathbf{f}} := J \mathbf{f} \circ \tau.$$

Therefore the first two equations of **(IV5.5)** are the same as in **I.6.2** and in **(IV5.2)**. Thus we have to look at the last equation

$$\begin{aligned}\partial_t \underline{e} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \underline{\tilde{q}}_i &= \underline{g}, \\ \underline{e} = J e \circ \tau, \quad \underline{\tilde{q}} &= J F^{-1} (\tilde{q} \circ \tau - e \circ \tau V), \quad \underline{g} = J \tilde{g} \circ \tau.\end{aligned}$$

From the definition of \tilde{q} in **(IV5.4)** we obtain

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{q}} &= J F^{-1} ((\Pi \circ \tau)^T V + q \circ \tau) = J ((\Pi \circ \tau) F^{-T})^T V + J F^{-1} q \circ \tau \\ &= -P^T V + \underline{q} \quad \text{if } \underline{q} := J F^{-1} q \circ \tau,\end{aligned}$$

and the definition of \tilde{g} in (IV5.4) gives

$$\tilde{g} = J \left(\frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + g \right) \circ \tau = \frac{\mathbf{r}}{2} |V|^2 + V \bullet \underline{\mathbf{f}} + \underline{g} \quad \text{if } \underline{g} := J g \circ \tau.$$

Thus we have shown that (IV5.1) is equivalent to (IV5.2). \square

Beweis (Zweite Version). Analog zum zweiten Beweis in I.6.2. Die Energiegleichung in (IV5.1) ist für Testfunktionen $\zeta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$

$$\int_{\Omega} (\partial_t \zeta \cdot e + \nabla \zeta \bullet (e v + \Pi^T v + q) + \zeta \cdot \tilde{g}) \, dL^{n+1} = 0.$$

Wenn wir $\tilde{\zeta}(t, \underline{x}) := \zeta(t, x)$ für $x = \varphi(t, \underline{x})$ definieren, ist dies

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \left(\partial_t \tilde{\zeta} \cdot J(e \circ \tau) + J \cdot ((D\varphi)^{-T} \nabla \tilde{\zeta}) \bullet ((\Pi \circ \tau)^T V + q \circ \tau) + \tilde{\zeta} \cdot (J g \circ \tau) \right) dL^n dL^1 = 0.$$

Da

$$\begin{aligned} & J \cdot \left((D\varphi)^{-T} \nabla \tilde{\zeta} \right) \bullet \left((\Pi \circ \tau)^T V + q \circ \tau \right) \\ &= J \cdot \nabla \tilde{\zeta} \bullet \left((D\varphi)^{-1} (\Pi \circ \tau)^T V + (D\varphi)^{-1} (q \circ \tau) \right) \\ &= J \cdot \nabla \tilde{\zeta} \bullet \left((\Pi \circ \tau (D\varphi)^{-T})^T V + (D\varphi)^{-1} (q \circ \tau) \right) \\ &= \nabla \tilde{\zeta} \bullet (-P^T V + \underline{q}), \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. \square

So wie in III.2.3 eine Gleichung für ε folgte, folgt nun die

5.2 Thermische Energiegleichung. Die letzte Gleichung in (IV5.2) ist modulo der übrigen beiden Gleichungen äquivalent zu

$$\partial_t \underline{\varepsilon} + \operatorname{div} q = DV \bullet P + \underline{g},$$

wobei die innere Energie in Referenzkoordinaten $\underline{\varepsilon}$ gegeben ist durch

$$\underline{e} = \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} \underline{\varrho} |V|^2, \quad \underline{\varepsilon} := J \cdot (\varepsilon \circ \tau).$$

Beweis. Die Gleichung (IV5.2) lautet

$$\partial_t \underline{e} + \operatorname{div}(-P^T V + \underline{q}) = \tilde{g} := \frac{\mathbf{r}}{2} |V|^2 + V \bullet \underline{\mathbf{f}} + \underline{g}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{e} &= \partial_t \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} \partial_t (\underline{\varrho} |V|^2) \\ &= \partial_t \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} |V|^2 \partial_t \underline{\varrho} + V \bullet (\underline{\varrho} \partial_t V) = \partial_t \underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} |V|^2 \partial_t \underline{\varrho} + V \bullet \partial_t (\underline{\varrho} V) \\ &= \partial_t \underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} |V|^2 \underline{\mathbf{r}} + V \bullet \operatorname{div} P + V \bullet (\underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{r}} V) \\ &= \partial_t \underline{\varepsilon} + V \bullet \operatorname{div} P + \frac{\mathbf{r}}{2} |V|^2 + V \bullet \underline{\mathbf{f}}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \partial_t \underline{e} + \operatorname{div} \underline{q} + \operatorname{div}(-P^T V) \\ &= \partial_t \underline{\varepsilon} + \operatorname{div} \underline{q} + V \bullet \operatorname{div} P + \operatorname{div}(-P^T V) + \frac{\mathbf{r}}{2} |V|^2 + V \bullet \underline{\mathbf{f}} \\ &= \partial_t \underline{\varepsilon} + \operatorname{div} \underline{q} - (DV) \bullet P + \frac{\mathbf{r}}{2} |V|^2 + V \bullet \underline{\mathbf{f}},\end{aligned}$$

da $\operatorname{div}(P^T V) = V \bullet \operatorname{div} P + (DV) \bullet P$. This implies the assertion. \square

Wir verlangen nun das Entropieprinzip im physikalischen Raum. Wir zeigen, dass dieses Prinzip äquivalent ist zu einer Entropieungleichung in Referenzkoordinaten. Wir wollen hinreichende Voraussetzungen für das Entropieprinzip aufstellen und konzentrieren uns hierbei auf Größen in Referenzkoordinaten. Die einfachste Annahme ist $\underline{\eta} = \hat{\eta}(\underline{x}, \underline{q}, \underline{\varepsilon}, F)$, eine Voraussetzung, die der Definition von thermoelastischen Körpern entspricht, siehe (IV5.16). Betrachtet man andere deformierbare Materialien, wird $\underline{\eta}$ noch von anderen Variablen abhängen, was natürlich den folgenden Beweis abändert, siehe zum Beispiel EX: Viscous Thermoelastic Bodies.

5.3 Entropieprinzip allgemein. Wir fordern das Entropieprinzip

$$\sigma := \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \geq 0$$

für alle Lösungen des allgemeinen Problems (IV5.1) (oder dazu äquivalent (IV5.2)) und definieren

$$\underline{\sigma} = J \cdot \sigma \circ \tau, \quad \underline{\eta} := J \cdot \eta \circ \tau, \quad \underline{\psi} := J \cdot F^{-1} (\psi - \eta v) \circ \tau.$$

Also ist die Entropieungleichung in Referenzkoordinaten

$$\underline{\sigma} := \partial_t \underline{\eta} + \operatorname{div} \underline{\psi} \geq 0.$$

Hierbei ist die Entropie ein objektiver Skalar, also $\eta \circ Y = \eta^*$, was eine Bedingung an η impliziert. Wir betrachten nun einen speziellen Fall, für den wir das Entropieprinzip verlangen.

5.4 Theorem. Das Entropieprinzip ist für Lösungen des Problems (IV5.2) erfüllt, wenn

$$\underline{\eta} = \hat{\eta}(\underline{x}, \underline{q}, \underline{\varepsilon}, F), \quad \underline{\eta}_{,F} F^T \text{ symmetrisch}, \quad \underline{\psi} = \frac{1}{\underline{\theta}} \underline{q}, \quad (\text{IV5.6})$$

und wenn die Residualungleichung

$$\underline{\theta} \underline{\sigma} = \underline{\theta} \underline{\eta}_{,\underline{q}} \underline{\mathbf{r}} + (P + \underline{\theta} \underline{\eta}_{,F}) \bullet DV + \underline{\theta} \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{q} + \underline{g} \geq 0$$

gilt. Hierbei ist die Temperatur $\underline{\theta}$ gegeben durch

$$\underline{\theta} := \theta \circ \tau, \quad \text{was äquivalent ist zu} \quad \frac{1}{\underline{\theta}} = \underline{\eta}'_{,\underline{\varepsilon}} > 0. \quad (\text{IV5.7})$$

Bemerkung: Die Funktion $\widehat{\eta}$ ist objektiv unter der Voraussetzung, dass $\underline{\eta}'_{,F} F^T$ symmetrisch ist, was genau heißt: $\widehat{\eta}'_{,F}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F) F^T$ ist symmetrische Matrix für alle Argumente $(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F)$.

Dass $\widehat{\eta}$ von \underline{x} abhängt, ist eine objektive Eigenschaft (siehe die Bemerkung in II.5.3) und produziert keinen Extraterm in σ . Ist $\mathbf{r} = 0$, so lautet die Massenerhaltung $\partial_t \underline{\varrho} = 0$. Also folgt $\underline{\varrho} = \underline{\varrho}(\underline{x})$ und daher ist für $\widehat{\eta}$ die Abhängigkeit von $\underline{\varrho}$ überflüssig, sie ist in der Abhängigkeit von \underline{x} schon ausgedrückt.

Beweis zum Entropieprinzip. Es ist

$$0 \leq \sigma = \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi = (\partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v)) + \operatorname{div}(\psi - \eta v)$$

und daraus folgt mit $\underline{\sigma} = J \sigma \circ \tau$

$$0 \leq \underline{\sigma} = \partial_t \underline{\eta} + \operatorname{div} \underline{\psi} = \partial_t \underline{\eta} + \operatorname{div}(\underline{\eta}'_{,\underline{\varepsilon}} \underline{q}).$$

Dieser Schluss ist analog zur Massenerhaltung. Das Entropieprinzip verlangt auch, dass η ein objektiver Skalar ist, d.h. es gilt $\eta(t, x) = \eta^*(t^*, x^*)$ mit einer Beobachtertransformation $(t, x) = Y(t^*, x^*)$. Da

$$\underline{\eta}(t, \underline{x}) := J(t, \underline{x}) \eta(t, \varphi(t, \underline{x}))$$

und J ein objektiver Skalar ist, muss nach II.5.1 gelten, dass $\underline{\eta}$ ein objektiver Skalar ist, also

$$\widehat{\eta}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F)(t, \underline{x}) = \underline{\eta}(t, \underline{x}) = \underline{\eta}^*(t^*, \underline{x}) = \widehat{\eta}(\underline{x}, \underline{\varrho}^*, \underline{\varepsilon}^*, F^*)(t^*, \underline{x}).$$

Da $\underline{\varrho}$ und $\underline{\varepsilon}$ objektive Skalare sind, also $\underline{\varrho}(t, \underline{x}) = \underline{\varrho}^*(t^*, \underline{x})$ und entsprechendes für $\underline{\varepsilon}$, und da $F(t, \underline{x}) = Q(t^*) F^*(t^*, \underline{x})$ nach II.5.2, reduziert sich die Gleichung für $\widehat{\eta}$ zu

$$\widehat{\eta}(\underline{x}, \underline{\varrho}^*, \underline{\varepsilon}^*, Q F^*) = \widehat{\eta}(\underline{x}, \underline{\varrho}^*, \underline{\varepsilon}^*, F^*). \quad (\text{IV5.8})$$

Diese Gleichung muss also erfüllt sein. \square

Beweis des Theorems. Wegen $\underline{\eta} = \widehat{\eta}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F)$ ist

$$\partial_t \underline{\eta} = \underline{\eta}'_{,\underline{\varrho}} \partial_t \underline{\varrho} + \underline{\eta}'_{,\underline{\varepsilon}} \partial_t \underline{\varepsilon} + \underline{\eta}'_{,F} \bullet \partial_t F.$$

Da unter Benutzung von 5.2

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{\varrho} &= \underline{\mathbf{r}}, \\ \partial_t \underline{\varepsilon} + \operatorname{div} \underline{q} &= DV \bullet P + \underline{g}, \\ \underline{g} &:= \widetilde{g} - V \bullet \widetilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2} |V|^2 \underline{\mathbf{r}}, \\ \partial_t F &= \left(\partial_t \partial_{\underline{x}_j} \varphi_i \right)_{ij} = \left(\partial_{\underline{x}_j} (\partial_t \varphi_i) \right)_{ij} = \left(\partial_{\underline{x}_j} V_i \right)_{ij} = DV, \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \underline{\eta}_{,\underline{\rho}} \partial_t \underline{\rho} + \underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} \partial_t \underline{\varepsilon} + \underline{\eta}_{,F} \bullet \partial_t F + \operatorname{div}(\underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} \underline{q}) \\ &= \underline{\eta}_{,\underline{\rho}} \underline{\mathbf{r}} + \underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} (P \bullet DV - \operatorname{div} \underline{q} + \underline{g}) + \underline{\eta}_{,F} \bullet DV + \operatorname{div}(\underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} \underline{q}) \\ &= \underline{\eta}_{,\underline{\rho}} \underline{\mathbf{r}} + (\underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} P + \underline{\eta}_{,F}) \bullet DV + \nabla \underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} \bullet \underline{q} + \underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} \underline{g}.\end{aligned}$$

Die Definition von θ ergibt nun die Behauptung. \square

Beweis der Bemerkung. Die Objektivität von $\hat{\eta}$ verlangt, siehe (IV5.8) im obigen Beweis, dass

$$\hat{\eta}(\underline{x}, \underline{\rho}, \underline{\varepsilon}, QF) = \hat{\eta}(\underline{x}, \underline{\rho}, \underline{\varepsilon}, F).$$

Im Folgenden schreiben wir nicht die Argumente $(\underline{x}, \underline{\rho}, \underline{\varepsilon})$ hin, also schreiben der Einfachheit halber

$$\hat{\eta}(QF) = \hat{\eta}(F) \quad (\text{IV5.9})$$

für alle orthonormalen Q mit positiver Determinante und alle F . Wir wollen zeigen, dass dies äquivalent ist zu

$$\underline{\eta}_{,F}(F) F^T \quad \text{ist symmetrische Matrix} \quad (\text{IV5.10})$$

für alle F . Es gelte (IV5.9). Setzen wir $Q = \exp(sA)$ mit einer antisymmetrischen Matrix A , so folgt

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{ds} (\hat{\eta}(F)) = \frac{d}{ds} (\hat{\eta}(\exp(sA)F)) = \hat{\eta}_{,F}(\exp(sA)F) \bullet \frac{d}{ds} (\exp(sA)F) \\ &= \hat{\eta}_{,F}(\exp(sA)F) \bullet (A \exp(sA)F) = A \bullet (\hat{\eta}_{,F}(\exp(sA)F) (\exp(sA)F)^T),\end{aligned}$$

und deshalb für $s = 0$

$$0 = A \bullet (\hat{\eta}_{,F}(F) F^T)$$

für alle antisymmetrischen A , das heißt (IV5.10). Falls nun (IV5.10) erfüllt ist, verbinden wir eine orthonormale Matrix Q_0 mit nahe dabei liegenden orthonormalen Matrizen Q_s durch

$$Q_s = \exp(sA)Q_0, \quad s \in [0, 1],$$

mit einer antisymmetrischen Matrix A (Q_s ist als Hintereinanderschaltung zweier orthonormaler Matrizen wieder orthonormal), und zeigen

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \hat{\eta}(Q_s F) &= \frac{d}{ds} \hat{\eta}(\exp(sA)F) = \hat{\eta}_{,F}(\exp(sA)F) \bullet \frac{d}{ds} (\exp(sA)F) \\ &= \hat{\eta}_{,F}(\exp(sA)F) \bullet (A \exp(sA)F) = A \bullet (\hat{\eta}_{,F}(\exp(sA)F) (\exp(sA)F)^T) \\ &= 0,\end{aligned}$$

und damit $\eta(Q_1 F) = \eta(Q_0 F)$. Daraus folgt für jedes orthonormale Q mit positiver Determinante $\eta(QF) = \eta(F)$, also (IV5.9). \square

Wir formulieren nun die Residualungleichung um für die freie Energie \underline{f} , die eine konstitutive Funktion von $\underline{\theta}$ ist, wobei $\underline{\theta}$ durch die Gleichungen in (IV5.7) definiert ist.

5.5 Freie Energie. Definiere die *innere freie Energie* in Referenzkoordinaten durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, F), \quad \underline{f}_{,F} F^T \text{ symmetrisch,} \\ \underline{f} &= \underline{\varepsilon} - \underline{\theta} \underline{\eta} \quad \text{für} \quad \underline{\theta} = \frac{1}{\underline{\eta}_{,\varepsilon}} > 0. \end{aligned} \quad (\text{IV5.11})$$

Dann ist die Residualungleichung in 5.4 äquivalent zu

$$\underline{\theta} \underline{\sigma} = -\underline{f}_{,\underline{\varrho}} \underline{\mathbf{r}} + (P - \underline{f}_{,F}) \mathbf{D}V + \underline{\theta} \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{\mathbf{q}} + \underline{g} \geq 0.$$

Beweis. Die Residualungleichung ist nach 5.4

$$\underline{\theta} \underline{\sigma} = \underline{\theta} \underline{\eta}_{,\underline{\varrho}} \underline{\mathbf{r}} + (P + \underline{\theta} \underline{\eta}_{,F}) \mathbf{D}V + \underline{\theta} \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{\mathbf{q}} + \underline{g} \geq 0.$$

Indem wir die Ableitungen von η durch die folgenden Formeln ersetzen, erhalten wir die Behauptung. Die Formeln lauten:

$$\underline{f}_{,\underline{\theta}} = -\underline{\eta}, \quad \underline{f}_{,\underline{\varrho}} = -\underline{\theta} \underline{\eta}_{,\underline{\varrho}}, \quad \underline{f}_{,F} = -\underline{\theta} \underline{\eta}_{,F}.$$

Zum Beweis schreiben wir $\underline{f} = \underline{\varepsilon} - \underline{\theta} \underline{\eta}$ als

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F), F) = \underline{\varepsilon} - \underline{\theta}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F) \underline{\eta}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F),$$

daher ergeben die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{\varepsilon}}: \quad \underline{f}_{,\underline{\theta}} \underline{\theta}_{,\underline{\varepsilon}} &= \underbrace{1 - \underline{\theta} \underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}}}_{=0} - \underline{\theta}_{,\underline{\varepsilon}} \underline{\eta} \implies \underline{f}_{,\underline{\theta}} = -\underline{\eta}, \\ \partial_{\underline{\varrho}}: \quad \underline{f}_{,\underline{\varrho}} + \underline{f}_{,\underline{\theta}} \underline{\theta}_{,\underline{\varrho}} &= 0 - \underline{\theta}_{,\underline{\varrho}} \underline{\eta} - \underline{\theta} \underline{\eta}_{,\underline{\varrho}} \implies \underline{f}_{,\underline{\varrho}} = -\underline{\theta} \underline{\eta}_{,\underline{\varrho}}, \\ \partial_F: \quad \underline{f}_{,F} + \underline{f}_{,\underline{\theta}} \underline{\theta}_{,F} &= 0 - \underline{\theta}_{,F} \underline{\eta} - \underline{\theta} \underline{\eta}_{,F} \implies \underline{f}_{,F} = -\underline{\theta} \underline{\eta}_{,F}. \end{aligned}$$

(Siehe auch Aufgabe III.7.3.) □

Wichtig: Die Größen sind definiert durch

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= J \varepsilon \circ \tau, & \underline{\theta} &= \theta \circ \tau, \\ \underline{\eta} &= J \eta \circ \tau, & \underline{f} &= J f \circ \tau. \end{aligned}$$

Referenzen: Es sei auf Wang & Truesdell [69] hingewiesen, was eine umfassende Theorie enthält und auch die mathematischen Theoreme [69, VII. Theorems of Existence, Uniqueness, and Stability in Elasticity] beschreibt. Zum Entropieprinzip siehe die allgemeine Beschreibung in Marsden & Hughes [55, CH.2 Theorem 5.5] und I-Shih Liu [86, 5.3 Thermodynamics of Elastic Materials]. Es sei auch auf Hutter & Jöhnk [47, 5 Material Equations] verwiesen.

Wir geben zwei verschiedene Realisationen der Entropiegleichung. Die Erste ist die klassische Thermoelastizität, in dieser Version bleibt in Referenzkoordinaten die Masse immer die Gleiche, d.h. es ist $\underline{\mathbf{r}} = 0$, und die Zweite findet sich im nächsten Abschnitt 6 über das Wachstum in der Biologie.

Thermoelastizität

Wir setzen nun voraus, dass

$$\underline{\mathbf{r}} = 0, \quad \underline{g} = 0,$$

das heißt, die Energieerhaltung ist erfüllt und $\underline{\varrho}$ ist zeitunabhängig. Wir hatten in 5.4 die Entropiegleichung schon unter der Voraussetzung bewiesen, dass $\underline{\eta}$ nur von den Variablen $(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}, F)$ abhängt. In 5.5 hatten wir dies in Termen der freien Energie umgeschrieben. Es gilt daher:

5.6 Theorem. Nimm an, dass mit einer inneren freien Energie in (IV5.11) das Folgende für Terme in den Differentialgleichungen gilt

$$P = \underline{f}_{,F}, \quad \underline{\varepsilon} = \underline{f} - \underline{\theta} \underline{f}_{,\theta}. \quad (\text{IV5.12})$$

Dann ist das Differentialgleichungssystem (IV5.2) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{\varrho} &= 0, \\ \partial_t (\underline{\varrho} V) &= \text{div} P + \underline{\mathbf{f}}, \\ \partial_t \underline{\varepsilon} + \text{div} \underline{q} &= DV \bullet P, \end{aligned} \quad (\text{IV5.13})$$

und das Entropieprinzip ist für dieses System erfüllt, falls gilt

$$\underline{\sigma} = \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{q} \geq 0. \quad (\text{IV5.14})$$

Beweis. Since $\underline{\mathbf{r}} = 0$ and $P = \underline{f}_{,F}$ the first two terms in the residual entropy inequality are zero. Hence we obtain

$$\underline{\theta} \underline{\sigma} = \underline{\theta} \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{q} \geq 0$$

as remaining part of the residual inequality. \square

Wegen (IV5.14) muß der Wärmefluß \underline{q} so gewählt werden, dass diese Ungleichung gilt, z.B.

$$\begin{aligned} \underline{q}(t, \underline{x}) &= -\widehat{D}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, \nabla \underline{\theta}, F) \nabla \underline{\theta}(t, \underline{x}) \quad \text{mit} \\ \widehat{D}(\underline{x}, \underline{\varrho}^*, \underline{\theta}^*, \nabla \underline{\theta}^*, F^*) &= \widehat{D}(\underline{x}, \underline{\varrho}^*, \underline{\theta}^*, Q \nabla \underline{\theta}^*, Q F^*), \end{aligned} \quad (\text{IV5.15})$$

wobei $D = \widehat{D}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, \nabla \underline{\theta}, F)$ eine positiv semidefinite Matrix ist.

Die Tatsache, dass $\underline{f}_{,F} F^T$ symmetrisch sein muss, hängt mit dem Prinzip zusammen, dass η ein objektiver Skalar ist, weshalb $\underline{f}_{,F} F^T = -\underline{\theta} \eta_{,F} F^T$ symmetrisch ist, wie oben bewiesen wurde. Die Tatsache, dass der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor $P = \underline{f}_{,F}$ in der Entropiegleichung gewählt wurde, hat zur Konsequenz, dass (es ist $P = FS$) der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$S = F^{-1} P = F^{-1} \underline{f}_{,F} = F^{-1} (\underline{f}_{,F} F^T) F^{-T}$$

symmetrisch ist ("Boltzmann-Axiom"), denn $\underline{f}_{,F} F^T$ ist symmetrisch. Damit ist auch Π symmetrisch, denn nach (I6.4) gilt $-J \Pi \circ \tau = P F^T = F S F^T$. Mit diesem Theorem können wir die Gleichungen für thermoelastische Körper wie folgt formulieren.

Thermoelastische Körper: In $]t_1, t_2[\times \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \underline{\varrho} \partial_t V - \operatorname{div}_{\underline{x}} P &= \underline{f}, \\ \partial_t \underline{\varepsilon} + \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{q} &= DV \bullet P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\varrho} &= \underline{\varrho}(\underline{x}) \text{ Referenzdichte (da } \underline{\mathbf{r}} = 0), \\ V &= \partial_t \varphi(t, \underline{x}) \text{ Geschwindigkeit, } \varphi \text{ wie in (I6.2),} \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{f} - \underline{\theta} \underline{f}_{,\theta} \text{ mit symmetrischer Matrix } \underline{f}_{,F} F^T, \\ P &= \underline{f}_{,F}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, F) \end{aligned} \quad (\text{IV5.16})$$

Nach 5.6 erfüllt also ein thermoelastischer Körper das Entropieprinzip wegen $P = \underline{f}_{,F}$, und falls für den Wärmefluss \underline{q} die Residualungleichung (IV5.14) gilt, also z.B. \underline{q} wie in (IV5.15) gewählt wird.

5.7 Lemma. Die Symmetrie von $\underline{f}_{,F} F^T$ ist gewährleistet, wenn

$$\underline{f} = \widehat{\underline{f}}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, F) = \widetilde{\underline{f}}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, C),$$

wobei $C := F^T F$ der rechte Cauchy-Green Deformationstensor ist. Dabei sei vorausgesetzt, dass $\widetilde{\underline{f}}_{,C_{ij}} = \widetilde{\underline{f}}_{,C_{ji}}$ ist, d.h. $\widetilde{\underline{f}}_{,C}$ symmetrisch ist. Es gilt dann $\widehat{\underline{f}}_{,F} = 2F \widetilde{\underline{f}}_{,C}$, also nach (IV5.16)

$$P = \widehat{\underline{f}}_{,F} F^T = 2F \widetilde{\underline{f}}_{,C} F^T, \quad S = 2\widetilde{\underline{f}}_{,C}, \quad -\Pi \circ \tau = \frac{2}{J} F \widetilde{\underline{f}}_{,C} F^T.$$

Beweis. Es gilt, da $C_{ij} = \sum_k F_{ki} F_{kj}$,

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{f}}_{F_{lm}} &= \sum_{i,j} \widetilde{\underline{f}}_{C_{ij}} \frac{\partial C_{ij}}{\partial F_{lm}} = \sum_{i,j,k} \widetilde{\underline{f}}_{C_{ij}} \frac{\partial (F_{ki} F_{kj})}{\partial F_{lm}} \\ &= \sum_{i,j,k} \widetilde{\underline{f}}_{C_{ij}} (\delta_{kl} \delta_{im} F_{kj} + F_{ki} \delta_{kl} \delta_{jm}) = \sum_{i,j} \widetilde{\underline{f}}_{C_{ij}} (\delta_{im} F_{lj} + F_{li} \delta_{jm}) \\ &= \sum_j \widetilde{\underline{f}}_{C_{mj}} F_{lj} + \sum_i \widetilde{\underline{f}}_{C_{im}} F_{li} = (F \widetilde{\underline{f}}_{C'}^T + F \widetilde{\underline{f}}_{C'})_{l,m}, \end{aligned}$$

also

$$\widehat{\underline{f}}_{F'} = F (\widetilde{\underline{f}}_{C'}^T + \widetilde{\underline{f}}_{C'}).$$

Now, C is a symmetric matrix, therefore we have assumed that $\widetilde{\underline{f}}_{C'}$ is symmetric, thus $P = \widehat{\underline{f}}_{F'} = 2F \widetilde{\underline{f}}_{C'}$, and $S = F^{-1} P = 2\widetilde{\underline{f}}_{C'}$. Und es ist klar, dass $\widehat{\underline{f}}_{F'} F^T = 2F \widetilde{\underline{f}}_{C'} F^T$ symmetrisch ist. \square

Wir wollen nun isotrope Materialien betrachten, die in Literatur wie folgt definiert sind, z.B. in Marsden & Hughes [55, 3.5] “By definition, an isotropic free energy constitutive function \underline{f} is to be a ‘rotationally invariant’ function of the argument C . Since C is symmetric, it can be brought to diagonal form by an orthogonal transformation, so \underline{f} is a function only of the eigenvalues of C ; that is, \underline{f} depends only on the principal stretches. Since the eigenvalues are reasonably complicated functions of C , it is sometimes convenient to use the invariants of C .” Also wollen wir darunter eine freie innere Energie \underline{f} verstehen, die von den Invarianten der Matrix C abhängt. In [55, 3.5] heißt es: “To describe non-isotropic materials then requires some ‘non-tensorial’ constructions or the introduction of additional variables.”

5.8 Invarianten einer Matrix A . Wir definieren das charakteristische Polynom zur $n \times n$ -Matrix A als das Polynom n -ten Grades (physikalisch ist $n = 3$)

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda \text{Id} - A) = \sum_{i=0}^n (-1)^i I_i(A) \lambda^{n-i}.$$

Die Koeffizienten $I_i(A)$ heißen Invarianten der Matrix A , und sie sind eindeutig durch die Definition bestimmt. Es ist $I_0(A) = 1$. *Erläuterung:* Ist e eine Eigenvektor von A mit zugehörigem Eigenwert λ_e , so gilt $p_A(\lambda_e) = 0$.

Beweis der Erläuterung. Ist $Ae = \lambda_e e$, so hat $\lambda_e \text{Id} - A$ einen Vektor $e \neq 0$ im Kern. Daher ist $p_A(\lambda_e) = \det(\lambda_e \text{Id} - A) = 0$. \square

5.9 Cayley-Hamilton Theorem. Das charakteristische Polynom zu A kann auch für jede $n \times n$ -Matrix M definiert werden als

$$P_A(M) := \sum_{i=0}^n (-1)^i I_i(A) M^{n-i}.$$

Mit dieser Definition gilt $P_A(A) = 0$. *Hinweis:* Es ist $P_A(\lambda \text{Id}) = p_A(\lambda) \text{Id}$.

Beweis für symmetrische Matrizen. Ist die Matrix A symmetrisch, so gibt es eine orthonormale Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von Eigenvektoren mit Eigenwerten λ_k für $k = 1, \dots, n$, das heißt $p_A(\lambda_k) = \det(\lambda_k \text{Id} - A) = 0$. Somit ist also

$$\prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k) = p_A(\lambda) = \sum_{i=0}^n (-1)^i I_i(A) \lambda^{n-i}.$$

Aus dieser Identität folgt durch Koeffizientenvergleich, was $I_i(A)$ ist, siehe den Beweis von . Nun zum Beweis dieses Satzes. Wegen

$$A = \sum_k \lambda_k e_k e_k^T, \quad \text{Id} = \sum_k e_k e_k^T,$$

gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k p_A(\lambda_k) e_k e_k^T = \sum_{i=0}^n (-1)^i I_i(A) \sum_k \lambda_k^{n-i} e_k e_k^T \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i I_i(A) \left(\sum_k \lambda_k e_k e_k^T \right)^{n-i} = P_A(A), \end{aligned}$$

da $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein Orthonormalsystem ist. \square

Beweis für allgemeine Matrizen. Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Die Adjunkte von A (siehe [Wikipedia: Adjunkte]) ist definiert durch $\text{adj}(A) = (\tilde{a}_{j,i})_{ij}$, also ist $(\text{adj}(A))^T = (\tilde{a}_{i,j})_{ij}$, wobei für $i, j = 1, \dots, n$

$$\tilde{a}_{i,j} = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \sum_i \tilde{a}_{i,j} a_{i,k} &= \sum_i \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \\
 &= \sum_i \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,k} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \\
 &= \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,k} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,k} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \det(A) \delta_{j,k}.
 \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$\sum_j a_{k,j} \tilde{a}_{i,j} = \det(A) \delta_{k,i}.$$

Also ist

$$\det(A) \text{Id} = (\text{adj}(A)) A = A \text{adj}(A). \quad (\text{IV5.17})$$

Now we apply this to the $n \times n$ -Matrix $\lambda \text{Id} - A$, that is

$$\det(\lambda \text{Id} - A) \text{Id} = (\text{adj}(\lambda \text{Id} - A)) (\lambda \text{Id} - A),$$

wobei λ eine (reelle oder komplexe) Zahl ist. So wie

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k, \quad c_n = 1,$$

ein Polynom n -ten Grades ist, so sind die Komponenten $(\text{adj}(\lambda \text{Id} - A))_{ij}$ Polynome $(n-1)$ -ten Grades in λ (das folgt aus der Definition der Determinante), also gibt es Matrizen B_k , $k = 0, \dots, n-1$, mit

$$\text{adj}(\lambda \text{Id} - A) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k.$$

Num ist (siehe [[Wikipedia: Cayley-Hamilton Theorem](#)])

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \lambda^k c_k \text{Id} &= p_A(\lambda) \text{Id} = \det(\lambda \text{Id} - A) \text{Id} = \text{adj}(\lambda \text{Id} - A) (\lambda \text{Id} - A) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k (\lambda \text{Id} - A) = \sum_{k=1}^n \lambda^k B_{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k A. \end{aligned}$$

Comparison of the coefficients gives

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= c_n \text{Id} = \text{Id}, \\ B_{k-1} - B_k A &= c_k \text{Id} \quad \text{for } 1 \leq k \leq n-1, \\ -B_0 A &= c_0 \text{Id}. \end{aligned}$$

These Identities imply

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k A^k &= \sum_{k=0}^n (c_k \text{Id}) A^k \\ &= B_{n-1} A^n + \sum_{k: 1 \leq k \leq n-1} (B_{k-1} - B_k A) A^k - B_0 A \\ &= \sum_{k=1}^n B_{k-1} A^k - \sum_{k=0}^{n-1} B_k A^{k+1} = 0, \end{aligned}$$

hence

$$\sum_{k=0}^n c_k A^k = 0.$$

The c_k are the coefficients of the characteristic polynomial p_A , das heißt $c_{n-i} = (-1)^i I_i(A)$. \square

Wie benötigen dies für die folgende Darstellung von S .

5.10 Isotropes S . Nimm an, dass

$$\underline{f} = \tilde{\underline{f}}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, C) = \check{\underline{f}}(\underline{x}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, I_1(C), \dots, I_n(C)),$$

also hängt $\check{\underline{f}}$ nur von den Invarianten $I_i(C)$ der Matrix C ab. Dann gilt

$$S = F^{-1} P = F^{-1} \hat{\underline{f}}_{',F} = 2 \tilde{\underline{f}}_{',C} = 2 \sum_i \check{\underline{f}}_{',I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C}.$$

Im physikalischen Fall $n = 3$ gilt also

$$S = 2 \check{\underline{f}}_{',I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C} + 2 \check{\underline{f}}_{',I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C} + 2 \check{\underline{f}}_{',I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C},$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1(C) &:= \text{trace } C, & I_2(C) &:= \text{trace adj } C, & I_3(C) &:= \det C, \\ \frac{\partial I_1}{\partial C} &= \text{Id}, & \frac{\partial I_2}{\partial C} &= I_1 \text{Id} - C, & \frac{\partial I_3}{\partial C} &= I_3 C^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [55, CH.3: 5.8-5.15]. Es ist $\tilde{f}'_C = \sum_i \check{f}'_{I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C}$. Also haben wir die Matrizen $\frac{\partial I_i}{\partial C}$ zu berechnen. Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann ist (das folgt aus der Definition der Determinante)

$$\frac{\partial \det A}{\partial A^T} = \text{adj } A$$

also für jedes A nach (IV5.17)

$$\frac{\partial \det A}{\partial A^T} A = (\text{adj } A) A = (\det A) \text{Id}.$$

Jetzt wenden wir dies an auf die Matrix $A - \lambda \text{Id}$, das heißt

$$\frac{\partial \det (A - \lambda \text{Id})}{\partial A^T} (A - \lambda \text{Id}) = (\det (A - \lambda \text{Id})) \text{Id}$$

also, da $p_A(\lambda) = (-1)^n \det (A - \lambda \text{Id})$,

$$\frac{\partial p_A(\lambda)}{\partial A^T} (A - \lambda \text{Id}) = p_A(\lambda) \text{Id}.$$

Wir schreiben $p_A(\lambda)$, wie im Beweis von 5.9, als Summe mit Koeffizienten $c_k = \hat{c}_k(A)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \text{Id} &= p_A(\lambda) \text{Id} = \frac{\partial}{\partial A^T} \left(\sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \right) (A - \lambda \text{Id}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial c_k}{\partial A^T} \lambda^k \right) (A - \lambda \text{Id}) \quad (\text{da } c_n = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \frac{\partial c_k}{\partial A^T} A - \sum_{k=1}^n \lambda^k \frac{\partial c_{k-1}}{\partial A^T}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial c_{n-1}}{\partial A^T} &= c_n \text{Id} = \text{Id}, \\ \frac{\partial c_k}{\partial A^T} A - \frac{\partial c_{k-1}}{\partial A^T} &= c_k \text{Id} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n-1, \\ \frac{\partial c_0}{\partial A^T} A &= c_0 \text{Id}. \end{aligned} \tag{IV5.18}$$

Diese Identitäten ergeben die Darstellung von S im allgemeinen Fall. Wir tun dies jetzt für $n = 3$. \square

Beweis im physikalischen Fall. Sei A wieder eine beliebige $n \times n$ -Matrix. Mit $M := \lambda \text{Id} - A$, also $m_{ii} = \lambda - a_{ii}$ und $m_{ij} = -a_{ij}$ für $j \neq i$, ist

$$\begin{aligned} \det M &= m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} \\ &\quad - m_{13}m_{22}m_{31} - m_{12}m_{21}m_{33} - m_{11}m_{23}m_{32} \\ &= \lambda^3 - \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\ &\quad + \lambda(a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22} - a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad - \det(A) \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 \text{trace}(A) + \lambda \text{trace adj}(A) - \det(A), \end{aligned}$$

also

$$I_1(A) = \text{trace}(A), \quad I_2(A) = \text{trace}(\text{adj}(A)), \quad I_3(A) = \det(A).$$

Für die Ableitungen der Invarianten gilt für die symmetrische Matrix C wegen $I_i(C) = (-1)^i c_{n-i}(C)$ und $n = 3$ nach (IV5.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial C} &= -\frac{\partial c_2}{\partial C} = \text{Id}, \\ -\frac{\partial I_1}{\partial C} C - \frac{\partial I_2}{\partial C} &= \frac{\partial c_2}{\partial C} C - \frac{\partial c_1}{\partial C} = c_2 \text{Id} = -I_1 \text{Id}, \\ \frac{\partial I_2}{\partial C} C + \frac{\partial I_3}{\partial C} &= \frac{\partial c_1}{\partial C} C - \frac{\partial c_0}{\partial C} = c_1 \text{Id} = I_2 \text{Id}, \\ -\frac{\partial I_3}{\partial C} C &= \frac{\partial c_0}{\partial C} C = c_0 \text{Id} = -I_3 \text{Id}, \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial C} &= I_3 C^{-1}, \\ \frac{\partial I_2}{\partial C} &= \left(-\frac{\partial I_3}{\partial C} + I_2 \text{Id} \right) C^{-1} = -I_3 C^{-2} + I_2 C^{-1}, \\ \frac{\partial I_1}{\partial C} &= \left(-\frac{\partial I_2}{\partial C} + I_1 \text{Id} \right) C^{-1} = I_3 C^{-3} - I_2 C^{-2} + I_1 C^{-1}, \\ \frac{\partial I_1}{\partial C} &= \text{Id}. \end{aligned}$$

Das Cayley-Hamilton Theorem ist darin enthalten, also für die Matrix C

$$0 = \text{Id} - I_3(C) C^{-3} + I_2(C) C^{-2} - I_1(C) C^{-1}.$$

Im Übrigen handelt es sich um 3 Gleichungen, wenn man in der zweiten Gleichung $-I_3 C^{-2} + I_2 C^{-1} = -C + I_1 \text{Id}$ auf Grund des Cayley-Hamilton Prinzips ausnutzt, nämlich

$$\frac{\partial I_1}{\partial C} = \text{Id}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial C} = I_1 \text{Id} - C, \quad \frac{\partial I_3}{\partial C} = I_3 C^{-1}.$$

□

Also erhalten wir in $n = 3$ für den zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$S = 2\underline{f}_{',I_1} \text{Id} + 2\underline{f}_{',I_2} \left(I_1(C) \text{Id} - C \right) + 2\underline{f}_{',I_3} I_3(C) C^{-1} \quad (\text{IV5.19})$$

und für den negativen Drucktensor, der $-\Pi \circ \tau = F S F^T$ erfüllt, gilt

$$-\Pi \circ \tau = \frac{2}{j} \underline{f}_{',I_1} B + \frac{2}{j} \underline{f}_{',I_2} \left(I_1(B) B - B^2 \right) + \frac{2}{j} \underline{f}_{',I_3} I_3(B) \text{Id}, \quad (\text{IV5.20})$$

was äquivalent zur ersten Gleichung ist.

5.11 Lemma. Die Gleichungen (IV5.19) und (IV5.20) sind äquivalent.

Beweis. Es folgt wegen $B = F F^T$, da $F C^k F^T = B^{k+1}$ für $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} F S F^T &= 2F \left(\underline{f}_{',I_1} \text{Id} + \underline{f}_{',I_2} (I_1 \text{Id} - C) + \underline{f}_{',I_3} I_3 C^{-1} \right) F^T \\ &= 2\underline{f}_{',I_1} F F^T + 2\underline{f}_{',I_2} (I_1 F F^T - F C F^T) + 2\underline{f}_{',I_3} I_3 F C^{-1} F^T \\ &= 2\underline{f}_{',I_1} B + 2\underline{f}_{',I_2} (I_1 B - B^2) + 2\underline{f}_{',I_3} I_3 \text{Id}, \end{aligned}$$

also die Darstellung von $-\Pi \circ \tau$ bis auf die Invarianten I_i , $i = 1, 2, 3$. Da für beliebige Matrizen A

$$\begin{aligned} I_1(A) &= \text{trace } A, \\ I_2(A) &= \frac{1}{2} \left((\text{trace } A)^2 - \text{trace } (A^2) \right), \\ I_3(A) &= \frac{1}{6} \left((\text{trace } A)^3 - 3 \text{trace } (A) \cdot \text{trace } (A^2) + 2 \text{trace } (A^3) \right), \end{aligned}$$

siehe [Wikipedia: Invariants of tensors] und ex???, müssen wir zeigen, dass

$$\text{trace } (B^m) = \text{trace } (C^m) \text{ for } m = 1, 2, 3.$$

Da für allgemeine Matrizen A und M (see [Wikipedia: Spur])

$$\text{trace } (AM) = \sum_{i,k} A_{ik} M_{ki} = \sum_{i,k} M_{ik} A_{ki} = \text{trace } (MA)$$

folgt für $m \geq 1$

$$\text{trace } (B^m) = \text{trace } (F C^{m-1} F^T) = \text{trace } (C^{m-1} F^T F) = \text{trace } (C^m).$$

Und auch $J = \det F = \sqrt{\det B} = \sqrt{\det C}$. \square

Diese Formeln stimmen überein mit denen in der Literatur.

Referenzen: [69, IV.2 Static Universal Solutions] und [55, 3.5 Material Symmetries and Isotropic Elasticity] und [47, 5.4 Material Equations for Isotropic Bodies].

6 Wachstum fester Körper

Wir nehmen Bezug auf das System in 5.5, in dem die Konsequenzen des Entropieprinzips aufgezeigt sind. Insbesondere haben wir dort eine nichttriviale Rate \mathbf{r} , die wir jetzt als Wachstumsrate des Körpers bezeichnen. Beim Wachstum des Körpers haben wir jedoch ein ganzes Bündel von miteinander reagierenden Substanzen zu betrachten, was impliziert, dass wir das Entropieprinzip nochmal zugrunde legen müssen, denn die Entropie hängt nun von mehreren Dichten ab. Wir modellieren hiermit ein wärmebedingtes Wachstum, zur Literatur siehe die Referenzen. Das Spezielle an dieser Situation ist, dass im Entropieprinzip die Ungleichung $\underline{\sigma} \geq 0$ in ihrer Gesamtheit betrachtet wird, d.h. in 5.5 werden der \mathbf{r} -Term und Teile des DV-Terms zusammen betrachtet und als positiv semidefinite Matrix geschrieben, obwohl standardmäßig der \mathbf{r} -Term separat als nichtnegativ angenommen wird. Diese Vorgehensweise ist natürlich von allgemeinem Interesse, denn sie unterstreicht die Bedeutung des Entropieprinzips in der Physik.

Referenzen: Für die Anwendung in der Biologie des Knochenwachstums siehe Maršík & Klika & Chlup [56]. Einen etwas anderen Zugang findet man in Ambrosi & Guillou [24].

Das heißt, wir haben in physikalischen also Euler-Koordinaten ein System von Massenerhaltungen mit Index α , und für die Gesamtmasse eine Impulserhaltung und zusätzlich noch die Energieerhaltung, also ein Mischungsmodell der Klasse I im Sinne von (III3.6). Das System in Eulerkoordinaten lautet

$$\begin{aligned}
 \partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v) &= \mathbf{r}_\alpha \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, m, \\
 \varrho &= \sum_\alpha \varrho_\alpha \quad \text{die Gesamtmasse,} \\
 \mathbf{r} &= \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \quad \text{die Gesamtreaktionsrate,} \\
 \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{r}v + \mathbf{f}, \\
 \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + g \\
 e &= \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2 \quad \text{die Gesamtenergie.}
 \end{aligned}
 \tag{IV6.1}$$

Hier haben wir wie immer gesetzt

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{r}v + \mathbf{f} \quad \text{und} \quad \tilde{g} = \frac{\mathbf{r}}{2}|v|^2 + v \bullet \mathbf{f} + g.$$

Die Gleichung für die Gesamtmasse ist die Summe über die Gleichungen der Einzelmassen,

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = \mathbf{r},$$

also keine unabhängige Gleichung. Wir zeigen

6.1 Lemma. System (IV6.1) ist äquivalent zu (IV6.2).

Wachstum eines Körpers:

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{\rho}_\alpha &= \underline{\mathbf{r}}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \dots, m, \\ \partial_t(\underline{\rho}V) &= \text{div}P + \underline{\mathbf{f}}, \\ \partial_t \underline{e} + \text{div}(-P^T V + \underline{q}) &= \underline{g} \end{aligned}$$

$\underline{\rho}_\alpha = J \cdot \rho_\alpha \circ \tau$, $\underline{\rho} = \sum_\alpha \underline{\rho}_\alpha$ die Gesamtreferenzmasse,
 $\underline{\mathbf{r}}_\alpha$ die Rate der α -Komponente,
 $\underline{e} = \underline{\varepsilon} + \frac{\underline{\rho}}{2}|V|^2$ die Gesamtenergie,
 V die Gesamtgeschwindigkeit,
 $\underline{\varepsilon}$ wird ggf. durch $\underline{\theta}$ ersetzt,
 $\underline{\mathbf{r}}_\alpha, P, \underline{q}$ sind zu bestimmende Materialgrößen,
 $\underline{\mathbf{f}}$ eine äußere Kraftdichte, \underline{g} meistens = 0.

(IV6.2)

Beweis. Die Massengleichungen ergeben sich für jedes α wie in I.6.2, die Gleichung für die gesamte Masse und den gesamten Impuls dann wie in I.6.2. Die Energiegleichung ergibt sich aus 5.1. □

Wir sehen nun, dass das Entropieprinzip erfüllt ist mit einer freien Energie, die von allen Spezies abhängt.

6.2 Theorem. Das Entropieprinzip für System (IV6.1) (und damit für (IV6.2)) ist erfüllt mit

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \hat{\underline{f}}(\underline{x}, \underline{\rho}_1, \dots, \underline{\rho}_m, \underline{\theta}, F), \quad \underline{f}_{,F} F^T \text{ symmetrisch,} \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{f} - \underline{\theta} \underline{f}_{,\underline{\theta}}, \quad \underline{f}_{,\underline{\theta}\underline{\theta}} < 0, \\ V &= \partial_t \varphi, \quad F = D\varphi, \end{aligned}$$

und wenn die Residualungleichung

$$\underline{\theta} \underline{\sigma} = - \sum_\alpha \underline{f}_{,\underline{\rho}_\alpha} \underline{\mathbf{r}}_\alpha + (P - \underline{f}_{,F}) : DV + \underline{\theta} \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{q} + \underline{g} \geq 0$$

gilt.

Beweis. Der Unterschied zum Beweis von 5.4 ist nur, dass die Entropie von den Dichten ρ_1 bis ρ_m statt von der Gesamtdichte abhängt. Das heißt, wir

haben hier $\underline{\eta}, \underline{\mathbf{r}}$ durch

$$\sum_{\alpha} \underline{\eta}_{,\underline{\rho}_{\alpha}} \underline{\mathbf{r}}_{\alpha}$$

zu ersetzen. Wir definieren die Entropie in Referenzkoordinaten durch

$$\begin{aligned} \underline{\eta}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\rho}_1, \dots, \underline{\rho}_m, \underline{\varepsilon}, F) &:= -\underline{f}_{,\underline{\theta}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\rho}_1, \dots, \underline{\rho}_m, \underline{\theta}, F) \\ \text{für } \underline{\varepsilon} &= \underline{f}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\rho}_1, \dots, \underline{\rho}_m, \underline{\theta}, F) - \underline{\theta} \underline{f}_{,\underline{\theta}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\rho}_1, \dots, \underline{\rho}_m, \underline{\theta}, F). \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{\eta} &= \sum_{\alpha} \underline{\eta}_{,\underline{\rho}_{\alpha}} \underbrace{\partial_t \underline{\rho}_{\alpha}}_{= \underline{\mathbf{r}}_{\alpha}} + \underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} \partial_t \underline{\varepsilon} + \underline{\eta}_{,F} \bullet \partial_t F. \end{aligned}$$

Wir erhalten mit dem Entropiefluss $\underline{\psi} = \underline{\eta}_{,\underline{\varepsilon}} \underline{q}$ für die Entropieproduktion in Analogie zum Beweis von 5.4

$$\underline{\theta} \underline{\sigma} = \underline{\theta} \sum_{\alpha} \underline{\eta}_{,\underline{\rho}_{\alpha}} \underline{\mathbf{r}}_{\alpha} + (P + \underline{\theta} \underline{\eta}_{,F}) \bullet DV + \underline{\theta} \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{q} + \underline{g} \geq 0.$$

Wegen $\underline{f}_{,\underline{\rho}_{\alpha}} = -\underline{\theta} \underline{\eta}_{,\underline{\rho}_{\alpha}}$ und $\underline{f}_{,F} = -\underline{\theta} \underline{\eta}_{,F}$ (siehe Übung III.7.3) folgt die Behauptung. \square

Wir werden jetzt $P = P_{el} + P_{dis}$ wählen und so die Entropieungleichung erfüllen.

6.3 Theorem. Sei $\underline{g} = 0$ und nimm an, dass in 6.2 gilt

$$\begin{aligned} V &= \partial_t \varphi, \quad F = D\varphi \\ P &= P_{el} + P_{dis}, \quad P_{el} = \underline{f}_{,F}, \quad P_{dis} = p F^{-T}, \\ \mathcal{V} &:= (\operatorname{div} v) \circ \tau, \quad \mathcal{A}_{\alpha} := -\underline{f}_{,\underline{\rho}_{\alpha}}. \end{aligned}$$

Darüberhinaus gelte für p und $\underline{\mathbf{r}}_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} p &= l_{00} \mathcal{V} + \sum_{\beta} l_{0\beta} \mathcal{A}_{\beta}, \\ \underline{\mathbf{r}}_{\alpha} &= l_{\alpha 0} \mathcal{V} + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta} \mathcal{A}_{\beta}. \end{aligned}$$

Dann ist das Entropieprinzip für das System (IV6.2) erfüllt, falls gilt

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{\underline{\theta}} \mathcal{A} \bullet L \mathcal{A} + \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{q} \geq 0,$$

wobei

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_m \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} l_{00} & l_{01} & \cdots & l_{0m} \\ l_{10} & l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{m0} & l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Ein antisymmetrischer Anteil der Matrix L produziert keine zusätzliche Entropie. Dies macht einen solchen Wachstumsprozess wahrscheinlicher. Es könnte also $(l_{\alpha\beta})_{\alpha \geq 1, \beta \geq 1}$ durchaus symmetrisch sein, aber der Fall $l_{0\alpha} = -l_{\alpha 0}$ für $\alpha \geq 1$ erscheint als der wahrscheinlichste (vergleiche die Referenz in 6.4).

Das System (IV6.2) lautet also

$$\begin{aligned}
 \partial_t \underline{\varrho}_\alpha &= \underline{\mathbf{r}}_\alpha \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, m, \\
 \partial_t(\underline{\varrho}V) &= \operatorname{div} P + \underline{\mathbf{f}} \\
 \partial_t(\underline{\mathbf{f}} - \theta \underline{\mathbf{f}}_{,\theta}) &= \operatorname{div}(c \nabla \theta) + DV : P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \partial_t \varphi \text{ Geschwindigkeit,} \\
 F &= D\varphi \text{ Deformationsgradient,} \\
 \underline{\mathbf{f}} &= \widehat{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\varrho}_1, \dots, \underline{\varrho}_m, \theta, F) \text{ freie Energie,} \\
 \underline{\varrho} &= \sum_\alpha \underline{\varrho}_\alpha \text{ Gesamtmasse,} \\
 P &= p F^{-T} + \underline{\mathbf{f}}_{,F}, \\
 p &= l_{00}(\operatorname{div} v) \circ \tau - \sum_\beta l_{0\beta} \underline{\mathbf{f}}_{,\underline{\varrho}\beta}, \\
 \underline{\mathbf{r}}_\alpha &= l_{\alpha 0}(\operatorname{div} v) \circ \tau - \sum_\beta l_{\alpha\beta} \underline{\mathbf{f}}_{,\underline{\varrho}\beta}, \\
 (l_{kl})_{k,l=0,\dots,m} &\geq 0, \quad c \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{IV6.3}$$

Beweis. Die Entropiegleichung ist nach 6.2, wenn $\mathcal{A}_\alpha := -\underline{\mathbf{f}}_{,\underline{\varrho}\alpha}$, gleich

$$\theta \sigma = \sum_\alpha \underline{\mathbf{r}}_\alpha \mathcal{A}_\alpha + (P - \underline{\mathbf{f}}_{,F}) : DV + \theta \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet \underline{\mathbf{q}} \geq 0.$$

Wir zerlegen P in einen elastischen Teil P_{el} und einen dissipativen Teil P_{dis} , d.h.

$$P = P_{el} + P_{dis}, \quad P_{el} = \underline{\mathbf{f}}_{,F}, \quad P_{dis} = p F^{-T}.$$

Daraus folgt, da $DV = ((Dv) \circ \tau) F$,

$$(P - \underline{\mathbf{f}}_{,F}) : DV = P_{dis} : DV = p \operatorname{trace}(DV F^{-1}) = p(\operatorname{div} v) \circ \tau.$$

Wenn also die (unbekannten) Funktionen p und $\underline{\mathbf{r}}_\alpha$ erfüllen

$$\begin{aligned}
 p &= l_{00}(\operatorname{div} v) \circ \tau + \sum_\beta l_{0\beta} \mathcal{A}_\beta, \\
 \underline{\mathbf{r}}_\alpha &= l_{\alpha 0}(\operatorname{div} v) \circ \tau + \sum_\beta l_{\alpha\beta} \mathcal{A}_\beta,
 \end{aligned}$$

so folgt mit $\mathcal{V} := (\operatorname{div} v) \circ \tau$

$$p \mathcal{V} + \sum_{\alpha} \underline{\mathbf{r}}_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_m \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} l_{00} & l_{01} & \cdots & l_{0m} \\ l_{10} & l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ l_{m0} & l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_m \end{bmatrix}.$$

Dann lautet die Formel für die Entropieproduktion

$$\underline{\theta} \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_m \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} l_{00} & l_{01} & \cdots & l_{0m} \\ l_{10} & l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ l_{m0} & l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V} \\ \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_m \end{bmatrix} + \underline{\theta} \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet \underline{\mathbf{q}} \geq 0,$$

also z.B., wenn L positiv semidefinit und $\underline{\mathbf{q}} = -c \nabla \underline{\theta}$ mit $c \geq 0$ ist. \square

Hier sind also zwei Terme der Residualungleichung, die unabhängig voneinander schienen, miteinander kombiniert worden.

$$\begin{aligned} \frac{dN_{MCELL}}{d\tau} &= -\delta_1(\beta_1 + N_{MCELL})N_{MCELL} + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_{New_B} - \mathcal{D}_1 \\ \frac{dN_{Old_B}}{d\tau} &= -(\beta_3 - N_{MCELL} + N_{Old_B} + N_{Activ_OB} + N_{Osteoid} + N_{New_B})N_{Old_B} - \delta_3(\beta_7 - N_{Old_B} \\ &\quad - 2(N_{Activ_OB} + N_{Osteoid} + N_{14}))N_{Old_B} + 2\mathcal{J}_{New_B} - \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_3 \\ \frac{dN_{Activ_OB}}{d\tau} &= \delta_3(\beta_7 - N_{Old_B} - 2(N_{Activ_OB} + N_{Osteoid} + N_{New_B}))N_{Old_B} \\ &\quad - \delta_4(\beta_{10} - N_{Osteoid} - N_{New_B})N_{Activ_OB} + \mathcal{D}_3 - \mathcal{D}_4 \\ \frac{dN_{Osteoid}}{d\tau} &= \delta_4(\beta_{10} - N_{Osteoid} - N_{New_B})N_{Activ_OB} - \delta_5(\beta_{13} - N_{New_B})N_{Osteoid} + \mathcal{D}_4 - \mathcal{D}_5 \\ \frac{dN_{New_B}}{d\tau} &= \delta_5(\beta_{13} - N_{New_B})N_{Osteoid} - \mathcal{J}_{New_B} + \mathcal{D}_5. \end{aligned}$$

Abb. 18: Aus Marsik & Klika & Chlup [56]

6.4 Referenz. In Marsík & Klika & Chlup [56] findet man die Realisation des Systems von Massengleichungen wie in Abb. 18. Dabei ist N_{α} die Stoffmengendichte der Phase α , siehe die Definition in III.3.1(2). Die Aussage 6.3 wird dargestellt mit

$$p = l_{00}(\operatorname{div} v) \circ \tau + \sum_{\beta} l_{0\beta} \mathcal{A}_{\beta},$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{\alpha} = l_{\alpha 0}(\operatorname{div} v) \circ \tau + l_{\alpha\alpha} \mathcal{A}_{\alpha},$$

also mit $l_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$. Es wird auch Bezug genommen auf Onsager's Prinzip, was aber nicht nötig ist, denn es zählt die Nichtnegativität der Entropieproduktion.

7 Schallausbreitung

Der Schall ist für uns allgegenwärtig, wir hören ihn mit unseren Ohren, er wird von allen uns umgebenden Maschinen erzeugt, insbesondere durch Reibung und Stöße, sowie von Explosionen verursacht. Der Schall wird aber auch durch die Natur erzeugt wie das Vogelzwitschern und das Waldesrauschen, sowie der Donner. Er wird übertragen durch das uns umgebende Gas, d.h. die Luft. Er ist eine Störung der Dichte dieses Gases.

Bei den Schallwellen in Gasen folgen wechselnd Verdichtung und Verdünnung an einer Stelle so schnell auf einander (selbst bei den tiefsten Tönen noch etwa in 60maligem Wechsel pro Secunde), daß kein Temperatenausgleich mit der Nachbarschaft stattfinden kann; für jedes sehr kleine Elementarvolumen gilt dann auch wieder die adiabatische Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Volumen. Das ist, wie wir sogleich sehen werden, von wesentlicher Bedeutung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen. Wir wollen von diesen annehmen, daß sie sogenannte ebene Wellen seien, d. h. daß alle Theilchen, die sich in je einer auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehenden Ebene befinden, gleichzeitig dieselbe Schwingungsphase besitzen. Wird die Richtung des Fortschreitens zur x -Axe gewählt, so wird also Geschwindigkeit der Theilchen, Dichtigkeit ρ , Druck u. s. w. außer von der Zeit nur von x abhängig, nicht aber von y und z . Die Hydrodynamik liefert uns für unseren Fall zwei Gleichungen. Die erste sagt aus, daß die in einem parallelepipedischen Volumenelement $dx dy dz$ enthaltene Masse in Bewegung gesetzt wird durch die auf seine Grenzflächen von der Umgebung ausgeübten Drucke. Die Drucke auf das zur y -Axe senkrechte Flächenpaar sind gleich und entgegengesetzt, ebenso die auf das zur z -Axe senkrechte Flächenpaar; diese

Abb. 19: Aus dem Buch von Helmholtz [110, §48]

Bei dieser Störung wechseln sich Verdichtung (*en*: compression, condensation) und Verdünnung (*en*: rarefaction, dilation) des Gases wechselseitig ab. Dies kann sich dann wie eine Welle ausbreiten.

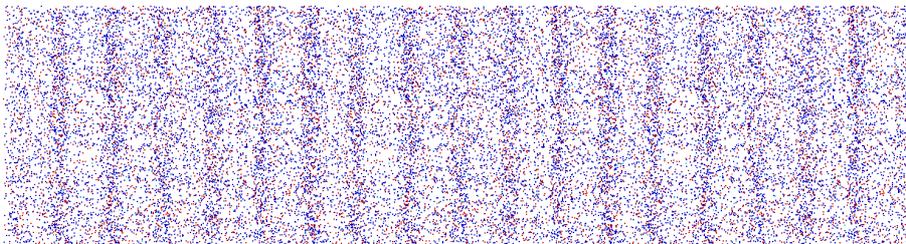


Abb. 20: Verdichtung und Verdünnung einer ebenen Welle, aus [126]

Wir modellieren den Schall durch die Massen-Impuls-Energie-Erhaltung eines Gases oder einer Flüssigkeit, wobei wir im Allgemeinen die Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit berücksichtigen. Das Differentialgleichungssystem ist also (IV2.2)

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t(\varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2) + \operatorname{div}((\varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2)v + \Pi^T v + q) &= \mathbf{f} \bullet v,\end{aligned}\tag{IV7.1}$$

und es gilt das Entropieprinzip 2.2

$$\partial_t \eta + \operatorname{div} \psi =: \sigma \geq 0,$$

wobei wohlbekannt ist (siehe u.a. 2.2 und (IV2.15)), dass

$$\begin{aligned}\eta &= \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon), \quad f = \widehat{f}(\varrho, \theta), \quad \theta = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}}, \quad p = \widetilde{p}(\varrho, \theta), \\ p &= \varrho f'_{\varrho} - f, \quad \varepsilon = f - \theta f'_{\theta}, \quad \eta = -f'_{\theta}, \\ \Pi &= p \operatorname{Id} - S, \quad S \text{ symmetrischer Spannungstensor}, \\ \psi &= \eta v + \frac{1}{\theta} q, \quad q \text{ Wärmeleitfähigkeit,}, \\ \sigma &:= \frac{1}{\theta} Dv \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q \geq 0, \quad \sigma \text{ Entropieproduktion.}\end{aligned}\tag{IV7.2}$$

Nun hatten wir in 2.3 (siehe (IV2.16)) gezeigt, dass (IV7.1) äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}\partial_{(1,v)} \varrho + \varrho \operatorname{div} v &= 0, \\ \varrho \partial_{(1,v)} v + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \\ \partial_{(1,v)} \varepsilon + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q + Dv \bullet \Pi &= 0,\end{aligned}\tag{IV7.3}$$

wobei wir jetzt $\partial_{(1,v)} h = (\partial_t + v \bullet \nabla) h = \overset{\circ}{h}$ für jede Funktion h schreiben. Diese Gleichungen mit Energieerhaltung (IV7.3) sind wiederum äquivalent zu Gleichungen mit der Entropieidentität (dies werden wir in Lemma 7.1 zeigen), wobei s die spezifische Entropie ist:

$$\begin{aligned}\partial_{(1,v)} \varrho + \varrho \operatorname{div} v &= 0, \\ \varrho \partial_{(1,v)} v + \nabla p - \operatorname{div} S &= \mathbf{f}, \\ \varrho \partial_{(1,v)} s + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\theta} q \right) &= \sigma.\end{aligned}\tag{IV7.4}$$

7.1 Lemma. Sei s die *spezifische Entropie*, d.h.

$$\eta = \varrho s \quad \text{oder} \quad s := \eta^{\text{sp}} = \frac{\eta}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho} f'_{\theta} = f^{\text{sp}}{}'_{\theta}.$$

Dann sind die Gleichungssysteme (IV7.3) und (IV7.4) zueinander äquivalent.

Beweis. Dies folgt daraus, dass für alle Funktionen die Entropieidentität (III4.5) eine Linearkombination der Masse-, Impuls- und Energieerhaltung ist, wobei der Koeffizient vor der Energiegleichung gleich $\Lambda_e = \eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}$ (siehe (III4.4)) ungleich Null ist, also kann man ebenso die Energieerhaltung als eine Linearkombination der Masse-, Impuls- und Entropiegleichung schreiben. Dies ergibt dann dass (IV7.1) (was äquivalent zu (IV7.3) ist) und die Gleichung (IV7.4) äquivalent sind. Denn es gilt für den Term in der Entropieidentität

$$\partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v) = s(\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v)) + \varrho(\partial_t s + v \bullet \nabla s),$$

und $\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0$ nach der Massenerhaltung. Also ist die Entropiegleichung die letzte Gleichung von (IV7.4). \square

Referenzen: Landau & Lifschitz [10, Kapitel VIII Der Schall]. Ausbreitung ohne Dämpfung: Landau & Lifschitz [10, VIII§63 Schallwellen], DeGroot & Mazur [6, Chap XII §3–§5], Hutter [8, 7.2 Ausbreitung kleiner Störungen in einem Gas], Müller [11, 10.4 Schall], Acheson [1, 3.6 Sound waves]. Und als mathematische Literatur Feireisl & Novotny [40, 4.4 Acoustic waves].

Wir betrachten in diesem Abschnitt Lösungen (ϱ, v, θ) der Form

$$\begin{bmatrix} \varrho \\ v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\varrho} + \varrho'_{\delta} \\ \underline{v} + u'_{\delta} \\ \underline{\theta} + \theta'_{\delta} \end{bmatrix},$$

wobei $(\underline{\varrho}, \underline{v}, \underline{\theta})$ eine Lösung ist und $(\varrho'_{\delta}, u'_{\delta}, \theta'_{\delta})$ eine kleine Störung davon. Es ist klar, dass als Bestandteil von Lösungen die Größen $v = \underline{v} + u'_{\delta}$ sowie \underline{v} Geschwindigkeiten sind, und darum ist u'_{δ} ein objektiver Vektor. Wir nehmen nun an, dass

$$\begin{bmatrix} \varrho'_{\delta} \\ u'_{\delta} \\ \theta'_{\delta} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} \varrho' \\ u' \\ \theta' \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\delta),$$

und berechnen die erste Variation

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left(L(\varrho, v, \theta) - L(\underline{\varrho}, \underline{v}, \underline{\theta}) \right),$$

wobei von (IV7.4) gilt

$$L(\varrho, v, \theta) := \begin{bmatrix} \partial_{(1,v)} \varrho + \varrho \operatorname{div} v \\ \varrho \partial_{(1,v)} v + \nabla p - \operatorname{div} S - \mathbf{f} \\ \varrho \partial_{(1,v)} s + \operatorname{div}(\frac{1}{\theta} q) - \sigma \end{bmatrix}. \quad (\text{IV7.5})$$

Es ist also $L(\varrho, v, \theta) = 0$ und $L(\underline{\varrho}, \underline{v}, \underline{\theta}) = 0$.

Schall ohne Dämpfung

Wir nehmen zunächst an, dass der Schall, den wir betrachten, über große Entfernungen hörbar ist, und dann ist es gerechtfertigt in (IV7.5)

$$S = 0, \quad q = 0$$

anzunehmen, also ist die Situation adiabatisch (siehe den Text in Abb. 19) und die Entropieproduktion $\sigma = 0$. Es wird dann (IV7.4) zu

$$\begin{aligned} \partial_{(1,v)}\varrho + \varrho \operatorname{div} v &= 0, \\ \varrho \partial_{(1,v)}v + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \partial_{(1,v)}s &= 0, \end{aligned} \tag{IV7.6}$$

und natürlich entsprechend auch in (IV7.5). Man erhält dann für die Störung das Resultat (siehe das System [40, (4.25)]):

7.2 Theorem. Für eine Störung

$$(\varrho, v, \theta) = (\underline{\varrho}, \underline{v}, \underline{\theta}) + \delta(\varrho', u', \theta') + \mathcal{O}(\delta), \quad \mathbf{f} = \underline{\mathbf{f}} + \delta\mathbf{f}' + \mathcal{O}(\delta),$$

folgt aus (IV7.6)

$$\begin{aligned} \partial_{(1,\underline{v})}\varrho' + \operatorname{div}(\varrho' u') &= -\varrho' \operatorname{div} \underline{v}, \\ \varrho'(\partial_{(1,\underline{v})}u' + u' \bullet \nabla \underline{v}) + \nabla p' &= \mathbf{f}' - \varrho' \partial_{(1,\underline{v})}\underline{v}, \\ \partial_{(1,\underline{v})}s' + u' \bullet \nabla \underline{s} &= 0, \end{aligned} \tag{IV7.7}$$

wobei

$$p = \underline{p} + \delta p' + \mathcal{O}(\delta), \quad s = \underline{s} + \delta s' + \mathcal{O}(\delta).$$

Für p und s gelten nach (IV7.2) noch konstitutive Gleichungen, die in 7.3 und 7.4 zu Aussagen über p' und s' führen.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \partial_{(1,v)}\varrho &= \partial_{(1,\underline{v}+\delta u')}(\underline{\varrho} + \delta\varrho') + \mathcal{O}(\delta) \\ &= \partial_{(1,\underline{v})}\underline{\varrho} + \delta(\partial_{(1,\underline{v})}\varrho' + u' \bullet \nabla \underline{\varrho}) + \mathcal{O}(\delta), \end{aligned}$$

entsprechendes gilt für $\partial_{(1,v)}v$ und $\partial_{(1,v)}s$. Und es gilt

$$\begin{aligned} \varrho \operatorname{div} v &= (\underline{\varrho} + \delta\varrho') \operatorname{div}(\underline{v} + \delta u') + \mathcal{O}(\delta) \\ &= \underline{\varrho} \operatorname{div} \underline{v} + \delta(\underline{\varrho} \operatorname{div} u' + \varrho' \operatorname{div} \underline{v}) + \mathcal{O}(\delta), \end{aligned}$$

sowie unter Benutzung der Formel für $\partial_{(1,v)}v$

$$\begin{aligned} \varrho \partial_{(1,v)}v &= (\underline{\varrho} + \delta\varrho')(\partial_{(1,\underline{v})}\underline{v} + \delta(\partial_{(1,\underline{v})}u' + u' \bullet \nabla \underline{v})) + \mathcal{O}(\delta) \\ &= \underline{\varrho} \partial_{(1,\underline{v})}\underline{v} + \delta(\underline{\varrho}(\partial_{(1,\underline{v})}u' + u' \bullet \nabla \underline{v}) + \varrho' \partial_{(1,\underline{v})}\underline{v}) + \mathcal{O}(\delta). \end{aligned}$$

Aus diesen Rechnungen folgt die Behauptung. \square

The differential equation $\partial_{(1,v)}s = 0$ suggests that $s = \text{const}$ und damit auch $\underline{s} = \text{const}$. Using this we can determine the sound speed.

7.3 Annahme an Entropie. Zur Konstanz von s .

(1) Wir nehmen an, dass $s_0 \in \mathbb{R}$ mit $s = s_0$, also auch $\underline{s} = s_0$ und $s' = 0$. Damit ist die dritte Gleichung in (IV7.7) erfüllt. Außerdem ist damit der Wert der Entropie derselbe für alle betrachteten Lösungen.

(2) Es sei $s = \widehat{s}(\varrho, \varepsilon) = \widetilde{s}(\varrho, \theta)$. Zum Wert s_0 gibt es Funktionen $\varrho \mapsto \widetilde{\varrho}(\varrho)$ und $\varrho \mapsto \widetilde{\varepsilon}(\varrho)$, so dass $\widehat{s}(\varrho, \varepsilon) = \widetilde{s}(\varrho, \theta) = \underline{s} = s_0$ genau dann, wenn $\theta = \widetilde{\theta}(\varrho)$ und $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}(\varrho)$.

Beweis (1). Aus der Differentialgleichung $\partial_{(1,v)}s = 0$ folgt, dass s konstant ist auf Stromlinien. Wenn nun $s = s_0$ lokal an dem Ursprung dieser Stromlinien so ist $s = s_0$ überall. Nun gilt $s = \underline{s} + \delta s' + \mathcal{O}(\delta)$, so dass also $\underline{s} = s_0$ und $s' = 0$. \square

Beweis (2). Die spezifische Entropie $s = s_0$ kann als Funktion von (ϱ, ε) und als Funktion von (ϱ, θ) angesehen werden, wir schreiben $s = \widehat{s}(\varrho, \varepsilon)$ und $s = \widetilde{s}(\varrho, \theta)$. Wenn, wie hier $s = s_0$, ist das als Nebenbedingung für die Parameter zu sehen, weshalb es dann Funktionen $\widetilde{\varepsilon}$ und $\widetilde{\theta}$ gibt (was von der Gestalt von s abhängt), so dass $\theta = \widetilde{\theta}(\varrho)$ und $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}(\varrho)$. \square

7.4 Schallgeschwindigkeit. Es gelte 7.3. Dann ist für eine Störung

$$p' = c_S^2 \varrho', \quad c_S > 0 \text{ die } \textit{Schallgeschwindigkeit}.$$

(1) Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} c_S(\underline{\varrho}, \underline{\theta})^2 &= \widetilde{p}'_{\varrho}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) - \frac{\widetilde{s}'_{\varrho}(\underline{\varrho}, \underline{\theta})}{\widetilde{s}'_{\theta}(\underline{\varrho}, \underline{\theta})} \widetilde{p}'_{\theta}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) = \frac{1}{\widetilde{s}'_{\theta}(\underline{\varrho}, \underline{\theta})} \det \begin{bmatrix} \widetilde{p}'_{\varrho} & \widetilde{p}'_{\theta} \\ \widetilde{s}'_{\varrho} & \widetilde{s}'_{\theta} \end{bmatrix}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) \\ &= \frac{d}{d\varrho} (\widetilde{p}(\varrho, \widetilde{\theta}(\varrho))) \Big|_{\varrho=\underline{\varrho}} = -\frac{\underline{\theta}}{\underline{\varrho}} \begin{bmatrix} \underline{\varrho} \\ \underline{\varepsilon} + \underline{p} \end{bmatrix} \bullet \left(D^2 \eta(\underline{\varrho}, \underline{\varepsilon}) \begin{bmatrix} \underline{\varrho} \\ \underline{\varepsilon} + \underline{p} \end{bmatrix} \right) > 0, \end{aligned}$$

wenn die Entropie $(\varrho, \varepsilon) \mapsto \eta(\varrho, \varepsilon)$ eine konkave Funktion ist.

(2) Im Falle eines idealen Gases 2.5 (beachte auch 2.4) gilt

$$c_S = \sqrt{\gamma R \underline{\theta}}, \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V}, \quad R = c_P - c_V, \quad \underline{\theta} = \text{const} \cdot \underline{\varrho}^{\gamma-1},$$

siehe die Formel [10, (63,15)].

2.01b Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

Flüssigkeit	t °C	ρ g/cm ³	c_L km/s	Flüssigkeit	t °C	ρ g/cm ³	c_L km/s
Aceton	20	0,79	1,19	Sauerstoff	-182,9	1,14	0,91
Ammoniak (konz.)	16	0,88	1,66	Stickstoff	-197	0,82	0,87
Benzin	17	0,68	1,17	Toluol	20	0,86	1,32
Benzol	20	0,88	1,32	Wasser	0	1,000	1,403
Ethylalkohol	20	0,79	1,16	(destilliert)	20	0,988	1,483
Glyzerin	20	1,26	1,90		40	0,992	1,529
Kochsalzlösung					60	0,983	1,551
1%	25	1,01	1,52		80	0,971	1,555
25%	25	1,19	1,77		100	0,958	1,543
Paraffinöl	33,5	0,8	1,42	Wasser			
Petroleum	15	0,8	1,33	(Seewasser)	20	1,03	1,522
Quecksilber	20	13,5	1,45	(schweres)	19,8	1,10	1,383
Salzsäure	15,5	1,19	1,52	Wasserstoff	-252	0,07	1,150
(konzentriert)							

2.01c Schallgeschwindigkeit in Gasen und Dämpfen unter Normdruck 101,3 kPa

Gas/Dampf	t °C	ρ kg/m ³	c_L m/s	Gas/Dampf	t °C	ρ kg/m ³	c_L m/s
Acetylen	0	1,17	327	Luft	20	1,21	344
Ammoniak	0	0,77	415		40		355
Argon	0	1,78	319		100		387
Brom	58		149	Methan	0	0,72	430
Chlor	0	3,22	206	Neon	0	0,90	435
Helium	0	0,18	971	Propan	0	2,02	238
Kohlenoxid	0	1,25	338	Sauerstoff	0	1,43	316
Kohlendioxid	0	1,98	259	Stickstoff	0	1,25	334
	18		266	Wasserdampf	134		494
Leuchtgas	0		453	Wasserstoff	0	0,09	1284
Luft	-40		307		18		1301
	-20		319	Wasserstoff	0		890
	0	1,29	331	(schwerer)			

Abb. 21: Schallgeschwindigkeit, aus Kohlrausch [83]

Beweis (1). Die dritte Darstellung von c_S^2 folgt aus der Tatsache, dass

$$\tilde{s}(\varrho, \tilde{\theta}(\varrho)) = \hat{s}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho)) = s = s_0$$

Indem wir mit $p = \underline{p} + \delta p' + \mathcal{O}(\delta)$ die Ableitung nach δ bilden, erhalten wir die folgenden Identitäten

$$p' = \frac{d}{d\varrho} \left(\tilde{p}(\varrho, \tilde{\theta}(\varrho)) \right) \Big|_{\varrho=\underline{\varrho}} \varrho' = \frac{d}{d\varrho} \left(\hat{p}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho)) \right) \Big|_{\varrho=\underline{\varrho}} \varrho'$$

Die erste Darstellung von c_S^2 erhalten wir, wenn wir von den beiden Identitäten $p = \tilde{p}(\varrho, \theta)$ und $s_0 = s = \tilde{s}(\varrho, \theta)$ ausgehen und mit

$$p = \underline{p} + \delta p' + \mathcal{O}(\delta), \quad s = \underline{s} + \delta s' + \mathcal{O}(\delta)$$

die Ableitung nach δ ausrechnen:

$$\begin{aligned} p' &= \tilde{p}'_{\varrho}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) \varrho' + \tilde{p}'_{\theta}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) \theta', \\ 0 = s' &= \tilde{s}'_{\varrho}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) \varrho' + \tilde{s}'_{\theta}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) \theta', \end{aligned}$$

und damit

$$p' = \left(\tilde{p}'_{\varrho}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) - \frac{\tilde{s}'_{\varrho}(\underline{\varrho}, \underline{\theta})}{\tilde{s}'_{\theta}(\underline{\varrho}, \underline{\theta})} \tilde{p}'_{\theta}(\underline{\varrho}, \underline{\theta}) \right) \varrho'.$$

Die letzte Darstellung von c_S^2 erhalten wir, indem wir die Gibbs Relation schreiben als

$$\varepsilon + p = \frac{\eta - \varrho \eta'_{\varrho}}{\eta'_{\varepsilon}}$$

so dass also aus

$$\frac{\hat{\eta}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho))}{\varrho} = \hat{s}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho)) = s_0$$

folgt

$$0 = \frac{d}{d\varrho} \left(\hat{s}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho)) \right) = -\frac{\hat{\eta}}{\varrho^2} + \frac{\hat{\eta}'_{\varrho} + \hat{\eta}'_{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}'_{\varrho}}{\varrho},$$

das heißt

$$\tilde{\varepsilon}'_{\varrho} = \frac{\hat{\eta} - \varrho \hat{\eta}'_{\varrho}}{\varrho \hat{\eta}'_{\varepsilon}} = \frac{\eta - \varrho \eta'_{\varrho}}{\varrho \eta'_{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon + p}{\varrho}.$$

Daraus schließen wir nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varrho} \left(\hat{p}(\varrho, \tilde{\varepsilon}(\varrho)) \right) &= \hat{p}'_{\varrho} + \tilde{\varepsilon}'_{\varrho} \hat{p}'_{\varepsilon} = \hat{p}'_{\varrho} + \frac{\varepsilon + p}{\varrho} \hat{p}'_{\varepsilon} \\ &= \left(\frac{\eta - \varrho \eta'_{\varrho}}{\eta'_{\varepsilon}} - \varepsilon \right)'_{\varrho} + \frac{\varepsilon + p}{\varrho} \left(\frac{\eta - \varrho \eta'_{\varrho}}{\eta'_{\varepsilon}} - \varepsilon \right)'_{\varepsilon} \quad (\text{es ist } p = \hat{p}(\varrho, \varepsilon)) \\ &= -\frac{\varrho \eta'_{\varrho\varrho}}{\eta'_{\varepsilon}} - \frac{\eta - \varrho \eta'_{\varrho}}{\eta'^2_{\varepsilon}} \eta'_{\varepsilon\varrho} + \frac{\varepsilon + p}{\varrho} \left(\frac{\eta'_{\varepsilon} - \varrho \eta'_{\varrho\varepsilon}}{\eta'_{\varepsilon}} - 1 - \frac{\eta - \varrho \eta'_{\varrho}}{\eta'^2_{\varepsilon}} \eta'_{\varepsilon\varepsilon} \right) \\ &= -\frac{\varrho}{\eta'_{\varepsilon}} \eta'_{\varrho\varrho} - 2 \frac{\varepsilon + p}{\eta'_{\varepsilon}} \eta'_{\varrho\varepsilon} - \frac{(\varepsilon + p)^2}{\varrho \eta'_{\varepsilon}} \eta'_{\varepsilon\varepsilon} \\ &= -\frac{1}{\varrho \eta'_{\varepsilon}} \left(\varrho^2 \eta'_{\varrho\varrho} + 2\varrho(\varepsilon + p) \eta'_{\varrho\varepsilon} + (\varepsilon + p)^2 \eta'_{\varepsilon\varepsilon} \right) \\ &= -\frac{\theta}{\varrho} \begin{bmatrix} \varrho \\ \varepsilon + p \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} \eta'_{\varrho\varrho} & \eta'_{\varrho\varepsilon} \\ \eta'_{\varrho\varepsilon} & \eta'_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho \\ \varepsilon + p \end{bmatrix} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

d.h. die Schallgeschwindigkeit ist positiv. \square

Beweis (2). Nach 2.5 gilt für alle Lösungen

$$\varepsilon = c_V \theta \varrho, \quad \text{wobei } \theta = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}},$$

und nach der Gibbs Relation ist mit $\eta = \varrho s$ (ebenfalls in 2.5)

$$\begin{aligned} s &= \hat{s}(\varrho, \varepsilon) = c_V \log \varepsilon - c_P \log \varrho + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \tilde{s}(\varrho, \theta) &= c_V \log \theta + c_V \log(c_V \varrho) - c_P \log \varrho + c \\ &= c_V \log \theta - R \log \varrho + c_V \log c_V + c \end{aligned}$$

sowie $p = R\theta\varrho$. Dies gilt auch für die Lösug $(\underline{\varrho}, \underline{\varrho}, \underline{\theta})$, weshalb

$$c_S^2 = p'_{\varrho} - \frac{s'_{\varrho}}{s'_{\theta}} p'_{\theta} = R\underline{\theta} + \frac{R\underline{\theta}}{c_V \underline{\varrho}} R\underline{\varrho} = R\underline{\theta} \frac{c_P}{c_V}.$$

Nun haben wir wegen der Bedingung $\underline{s} = s_0$

$$c_V \log \underline{\varepsilon} - c_P \log \underline{\varrho} = s_0 - c, \quad \text{was} \quad \log \underline{\theta} = \frac{R}{c_V} \log \underline{\varrho} + \text{const}$$

mit $\text{const} = \frac{1}{c_V}(s_0 + c_V \log c_V - c)$ bedeutet. Dies war zu zeigen. \square

7.5 Wellengleichung. If 7.3 holds and in 7.2 in addition $(\underline{\varrho}, \underline{v}, \underline{\theta}) = \text{const}$ (we mention that then also $c_S = \text{const}$) then the equations (IV7.7) are equivalent to

$$\begin{aligned} \partial_{(1,\underline{v})} \varrho' + \underline{\varrho} \operatorname{div} u' &= 0, \\ \underline{\varrho} \partial_{(1,\underline{v})} u' + \nabla p' &= \mathbf{f}'. \end{aligned} \quad (\text{IV7.8})$$

If the observer is so that $\operatorname{div} \mathbf{f}' = 0$ it follows

$$\partial_{(1,\underline{v})}^2 \varrho' - \Delta p' = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{c_S^2} \partial_{(1,\underline{v})}^2 p' - \Delta p' = 0 \quad (\text{IV7.9})$$

Achtung: We have $p' = c_S^2 \varrho'$.

Beweis. Under the assumptions (IV7.7) reduces to (IV7.8). Then

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{(1,\underline{v})} (\partial_{(1,\underline{v})} \varrho' + \underline{\varrho} \operatorname{div} u') = \partial_{(1,\underline{v})}^2 \varrho' + \operatorname{div} (\underline{\varrho} \partial_{(1,\underline{v})} u') \\ &= \partial_{(1,\underline{v})}^2 \varrho' - \Delta p' + \operatorname{div} \mathbf{f}', \end{aligned}$$

which is the first equation in (IV7.9). From this the second equation follows since $\varrho' = \frac{1}{c_S^2} p'$. \square

7.6 Potential flow. If in 7.5 the perturbation $u' = \nabla \varphi'$, then

$$\frac{1}{c_S^2} \partial_{(1,\underline{v})}^2 \varphi' - \Delta \varphi' = 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{c_S^2} \partial_{(1,\underline{v})}^2 u' - \Delta u' = 0$$

Erinnerung: u' is an objective vector, therefore φ' an objective scalar.

Die Übertragung von Schall besteht nun in einer Überlagerung von Wellen verschiedener Wellenlänge und verschiedener Richtung.

Monochromatische Welle

Wir machen die Voraussetzungen wie in 7.6 (also auch $\operatorname{div} \mathbf{f}' = 0$) und zusätzlich $\underline{v} = 0$. Eine Lösung der Wellengleichung (IV7.8) ist dann gegeben durch

$$\varphi'(t, x) = g(x \bullet \mathbf{k} - \omega t),$$

wobei $\tau \mapsto g(\tau)$ eine beliebige Funktion ist. Es ist

$$\partial_t \varphi' = -\omega g'_\tau, \quad u'(t, x) = \nabla \varphi' = g'_\tau (x \bullet \mathbf{k} - \omega t) \mathbf{k}$$

also ist die erste Gleichung von (IV7.8)

$$\partial_t \varrho' = -\operatorname{div}(\underline{\varrho} u') = -\operatorname{div}(\underline{\varrho} g'_{,\tau} \mathbf{k}) = -\mathbf{k} \bullet \nabla(\underline{\varrho} g'_{,\tau}) = -\underline{\varrho} g'_{,\tau\tau} \cdot |\mathbf{k}|^2$$

erfüllt wenn

$$\varrho'(t, x) = \frac{\underline{\varrho} |\mathbf{k}|^2}{\omega} g'_{,\tau}(x \bullet \mathbf{k} - \omega t)$$

und es gilt die zweite Gleichung von (IV7.8)

$$-\underline{\varrho} \omega g'_{,\tau\tau} \mathbf{k} = \underline{\varrho} \partial_t u' = -\nabla p'$$

wenn

$$p'(t, x) = \underline{\varrho} \omega g'_{,\tau}(x \bullet \mathbf{k} - \omega t) = \frac{\omega^2}{|\mathbf{k}|^2} \varrho'.$$

Also ist

$$c_S = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \quad \text{somit} \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c_S}$$

d.h. mit einem Einheitsvektor \mathbf{n} gilt für den **Wellenzahlvektor** \mathbf{k}

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c_S} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \quad \lambda := \frac{2\pi c_S}{\omega},$$

wobei λ die **Wellenlänge** ist und ω die **Frequenz** (siehe [10, (63,20)]). Wir haben also

$$\varphi'(t, x) = g\left(\omega \left(\frac{x \bullet \mathbf{n}}{c_S} - t\right)\right)$$

Wir definieren jetzt $g(\tau) := \operatorname{Re}(a \exp(i\tau))$ und daher ist speziell

$$\varphi'(t, x) = \operatorname{Re}\left(a \exp\left(i\omega \left(x \bullet \frac{\mathbf{n}}{c_S} - t\right)\right)\right)$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ die (**komplexe**) **Amplitude** von φ' ist.

Reflexion einer Welle

Wie verhält sich der Schall an einer Wand oder am Übergang von verschiedenen Medien? Wir betrachten hier das Verhalten einer monochromatischen Welle, wie das linke Bild in Abb. 23 zeigt, wie es an einer Materialgrenze teilweise reflektiert wird und teilweise transmittiert.

Dazu betrachten wir die beiden Gebiete $\Omega^1 = \{(t, x) ; x_1 < \gamma(t, x_2, x_3)\}$ und $\Omega^2 = \{(t, x) ; x_1 > \gamma(t, x_2, x_3)\}$, wobei deren gemeinsamer Rand die Hyperfläche $\Gamma = \{(t, x) ; x_1 = \gamma(t, x_2, x_3)\}$ sei mit einer Graphenfunktion

$$\begin{aligned} \gamma &= \underline{\gamma} + \delta \gamma' + \mathcal{O}(\delta), \quad \underline{\gamma} = 0 \\ \tau(t, x) &:= (t, x_1 + \gamma(t, x_2, x_3), x_2, x_3). \end{aligned} \tag{IV7.10}$$

Trifft eine Schallwelle auf die Grenze zwischen zwei verschiedenen Medien (Flüssigkeiten oder Gasen), dann wird ein Teil von ihr reflektiert und ein Teil gebrochen. Außer der einfallenden Welle entstehen also noch zwei Wellen; die eine (die reflektierte) breitet sich von der Grenzfläche rückwärts in das erste Medium aus, die zweite (die gebrochene) breitet sich von der Grenzfläche in das zweite Medium aus. Im ersten Medium entsteht folglich eine Überlagerung zweier Wellen (einfallende und reflektierte); im zweiten Medium ist eine gebrochene Welle vorhanden.

Abb. 22: Aus Landau & Lifschitz [10, aus §65]

Dabei beteht der Limes aus den stationären Gebieten $\underline{\Omega}^1 = \{(t, x); x_1 < 0\}$ und $\underline{\Omega}^2 = \{(t, x); x_1 > 0\}$ mit Rand $\underline{\Gamma} = \{(t, x); x_1 = 0\}$, und es ist $\underline{\Omega}^k = \tau(\underline{\Omega}^k)$ und $\underline{\Gamma} = \tau(\underline{\Gamma})$. In $\underline{\Omega}^k$ haben wir Lösungen $(\varrho^k, v^k, \theta^k)$ von System (IV7.4) oder dazu äquivalent des ursprünglichen Systems (IV7.1), natürlich mit $S = 0$ und $q = 0$. In dem Gebiet $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}^1 \cup \underline{\Gamma} \cup \underline{\Omega}^2$ gelten nun die ursprüngliche Masse-Impuls-Energieerhaltungen (IV7.1) im distributionellen Sinne. Dabei ergeben sich auf $\underline{\Gamma}$ Randbedingungen, die im Limes $\delta \rightarrow 0$ die Form (IV7.11) annehmen.

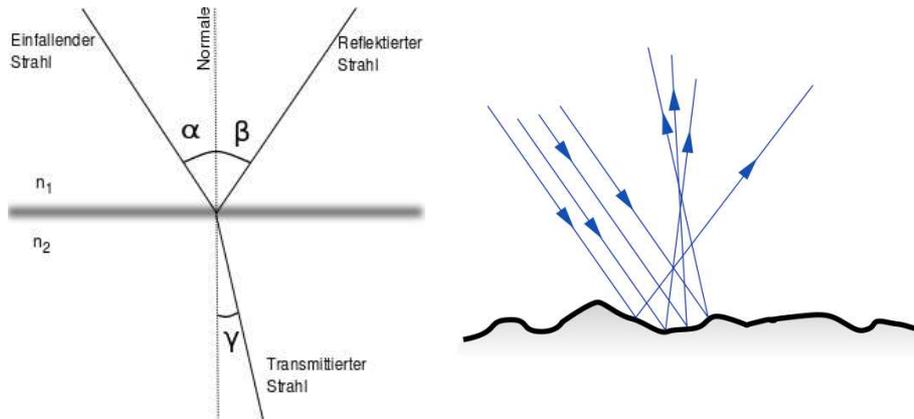


Abb. 23: Reflexion einer Welle, aus Wikipedia [132]

7.7 Randbedingungen. Für die Funktionen $(\varrho^k, v^k, \theta^k)$ in $\underline{\Omega}^k$ seien die adiabatischen distributionellen Gleichungen (IV7.1) in $\underline{\Omega}$ (mit $S = 0, q = 0$) erfüllt. Es gebe keinen Massenfluss über $\underline{\Gamma}$ hinaus, d.h. die Massenerhaltung von (IV7.1) ist separat für $k = 1, 2$ erfüllt. Ist dann

$$(\varrho^k, v^k, \theta^k) \circ \tau = (\underline{\varrho}^k, \underline{v}^k, \underline{\theta}^k) + \delta(\varrho'_k, u'_k, \theta'_k) + \mathcal{O}(\delta), \quad \underline{v}^k = 0,$$

und sind die Voraussetzungen in 7.5 erfüllt, so gelten die folgenden Randbedingungen für Masse und Impuls

$$\left. \begin{aligned} u'_1 \bullet \nu &= u'_2 \bullet \nu \\ p'_1 &= p'_2 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \underline{\Gamma}, \tag{IV7.11}$$

wobei ν eine Normale auf $\underline{\Gamma}$ ist. Es ist auch $\underline{p}^1 = \underline{p}^2$ auf $\underline{\Gamma}$ erfüllt.

Hinweis: Diese Randbedingungen sind in [10, §65 Reflexion und Brechung von Schallwellen] zu finden.

Beweis. Für die Massenerhaltung der Phase k (da zwischen den Massen keine Masse ausgetauscht wird) gilt, wenn $\eta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega^k} (\partial_t \eta \cdot \varrho^k + \nabla \eta \bullet (\varrho^k v^k)) \, dL^4 \\ &= \int_{\Omega^k} (\partial_t, \nabla) \eta \bullet (\varrho^k, \varrho^k v^k) \, dL^4 \\ &= (\text{Volumenterm}) + \int_{\Gamma} \eta n_{\Omega^k} \bullet (\varrho^k, \varrho^k v^k) \, dH^3, \end{aligned}$$

wobei n_{Ω^k} die äußere Normale von Ω^k in Raumzeit an Γ ist. Da η beliebig ist, ist der Volumenterm gleich Null (das ist die Differentialgleichung in Ω^k) und es folgt für den Γ -Term

$$0 = n_{\Omega^k} \bullet (\varrho^k, \varrho^k v^k) \quad \text{auf } \Gamma.$$

Da (siehe Abschnitt I.4 ??????????)

$$n_{\Omega^k} = \frac{(-v_\Gamma \bullet \nu^k, \nu^k)}{\sqrt{1 + |v_\Gamma|^2}},$$

wobei ν^k die äußere Normale von $\Omega^k(t)$ an $\Gamma(t)$ ist und v_Γ die Geschwindigkeit von $t \mapsto \Gamma(t)$, folgt

$$0 = n_{\Omega^k} \bullet (\varrho^k, \varrho^k v^k) = \varrho^k \frac{(v^k - v_\Gamma) \bullet \nu^k}{\sqrt{1 + |v_\Gamma|^2}}.$$

Da nun

$$\begin{aligned} v^k \circ \tau &= \underline{v}^k + \delta u'_k + \mathcal{O}(\delta), \quad \underline{v}^k = 0, \\ \nu^k \circ \tau &= \underline{\nu}^k + \mathcal{O}(1), \quad \underline{\nu}^k = (-1)^{k-1} \mathbf{e}_1, \\ v_\Gamma \circ \tau &= \underline{v}_\Gamma + \delta v'_\Gamma + \mathcal{O}(\delta), \quad \underline{v}_\Gamma = 0, \end{aligned}$$

folgt also mit $\nu = \nu^1 = -\nu^2$, da $\varrho^k > 0$,

$$(u'_k - v'_\Gamma) \bullet \nu = 0 \quad \text{auf } \underline{\Gamma}.$$

Da dies für $k = 1$ und $k = 2$ gilt, erhalten wir $(u'_1 - u'_2) \bullet \nu = 0$.

Für die Impulserhaltung gilt für $\zeta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ analog

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k,i} \int_{\Omega^k} (\partial_t \zeta_i \cdot \varrho^k v_i^k + \sum_j \partial_j \zeta_i \cdot (\varrho^k v_i^k v_j^k + p^k \delta_{i,j})) \, dL^4 \\ &= \sum_{k,i} \int_{\Omega^k} (\partial_t, \nabla) \zeta_i \bullet (\varrho^k v_i^k, \varrho^k v_i^k v^k + p^k \mathbf{e}_j) \, dL^4 \\ &= (\text{Volumenterme}) + \sum_i \int_{\Gamma} \zeta_i \sum_k \nu_{\Omega^k} \bullet (\varrho^k v_i^k, \varrho^k v_i^k v^k + p^k \mathbf{e}_i) \, dH^3. \end{aligned}$$

Da ζ_i beliebig ist, sind die Volumenterme gleich Null (das sind die Differentialgleichungen in Ω^k) und es folgt für den Γ -Term für i

$$0 = \sum_k n_{\Omega^k} \bullet (\varrho^k v_i^k, \varrho^k v_i^k v^k + p^k \mathbf{e}_i) \quad \text{auf } \Gamma.$$

Die Formel für n_{Ω^k} von oben ergibt mit der Tatsache, dass $(v^k - v_\Gamma) \bullet \nu^k = 0$,

$$0 = \sum_k p^k \nu^k = (p^1 - p^2) \nu.$$

Da $p^k = \underline{p}^k + \delta p'_k + \mathcal{O}(\delta)$ folgt $\underline{p}^1 = \underline{p}^2$ und dann $p'_1 = p'_2$. \square

Wie geben nun folgende monochromatische Welle vor, wobei im linken Bild der Abb. 23 die Koordinate x_1 nach unten und x_2 nach rechts zeigt, und wobei $c_k := c_S(\underline{\varrho}^k, \underline{\theta}^k)$ als Abkürzung für die Schallgeschwindigkeit im Gebiet Ω^k benutzt wird:

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= \operatorname{Re} \left(a_1 \exp \left(i \omega \left(x \bullet \frac{\mathbf{n}_1}{c_1} - t \right) \right) \right) \quad (\text{Einfallender Strahl}) \\ &\quad + \operatorname{Re} \left(\tilde{a}_1 \exp \left(i \omega \left(x \bullet \frac{\tilde{\mathbf{n}}_1}{c_1} - t \right) \right) \right) \quad (\text{Reflektierter Strahl}), \\ \mathbf{n}_1 &= (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1, 0), \quad \tilde{\mathbf{n}}_1 = (-\cos \alpha_1, \sin \alpha_1, 0), \\ \varphi'_2 &= \operatorname{Re} \left(a_2 \exp \left(i \omega \left(x \bullet \frac{\mathbf{n}_2}{c_2} - t \right) \right) \right) \quad (\text{Transmittierter Strahl}), \\ \mathbf{n}_2 &= (\cos \alpha_2, \sin \alpha_2, 0). \end{aligned} \tag{IV7.12}$$

Hier ist die Lösung bis auf einige Randbedingungen schon gegeben. Man könnte auch den einfallenden Strahl vorgeben und dann danach fragen, wie der Resonanz an Γ ist, was natürlich von dessen Struktur abhängt. Hier soll aber gezeigt werden, dass die Oberfläche so geartet ist, dass eine reflektierter und ein transmittierender Strahl auftritt, also der Strahl die hergeleiteten Randbedingungen erfüllt.

Mit $g_1(\tau) := \operatorname{Re}(a_1 \exp(i\tau))$ und entsprechend \tilde{g}_1 und g_2 berechnen wir

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= g_1(\tau_1) + \tilde{g}_1(\tilde{\tau}_1), \quad \tau_1 = \omega \left(x \bullet \frac{\mathbf{n}_1}{c_1} - t \right), \quad \tilde{\tau}_1 = \omega \left(x \bullet \frac{\tilde{\mathbf{n}}_1}{c_1} - t \right) \\ \varphi'_2 &= g_2(\tau_2), \quad \tau_2 = \omega \left(x \bullet \frac{\mathbf{n}_2}{c_2} - t \right) \\ u'_1 &= \nabla \varphi'_1 = \frac{\omega g_{1,\tau}(\tau_1)}{c_1} \mathbf{n}_1 + \frac{\omega \tilde{g}_{1,\tau}(\tilde{\tau}_1)}{c_1} \tilde{\mathbf{n}}_1 \\ u'_2 &= \nabla \varphi'_2 = \frac{\omega g_{2,\tau}(\tau_2)}{c_2} \mathbf{n}_2 \\ p'_1 &= \underline{\varrho}^1 \omega (g_{1,\tau}(\tau_1) + \tilde{g}_{1,\tau}(\tilde{\tau}_1)), \quad p'_2 = \underline{\varrho}^2 \omega g_{2,\tau}(\tau_2). \end{aligned}$$

Also lauten die Randbedingungen auf Γ : Für die Masse ist $u'_1 \bullet \nu = u'_2 \bullet \nu$ äquivalent zu

$$\frac{g_{1'\tau}(\tau_1)}{c_1} \mathbf{n}_1 \bullet \nu + \frac{\tilde{g}_{1'\tau}(\tilde{\tau}_1)}{c_1} \tilde{\mathbf{n}}_1 \bullet \nu = \frac{g_{2'\tau}(\tau_2)}{c_2} \mathbf{n}_2 \bullet \nu,$$

wobei $\nu = \nu^1 = -\nu^2$ die Normale an den Rand sei. Da

$$\mathbf{n}_1 \bullet \nu = \cos \alpha_1, \quad \tilde{\mathbf{n}}_1 \bullet \nu = -\cos \alpha_1, \quad \mathbf{n}_2 \bullet \nu = \cos \alpha_2,$$

heißt dies

$$\frac{\cos \alpha_1}{c_1} (g_{1'\tau}(\tau_1) - \tilde{g}_{1'\tau}(\tilde{\tau}_1)) = \frac{\cos \alpha_2}{c_2} g_{2'\tau}(\tau_2). \quad (\text{IV7.13})$$

Für den Impuls ist $p'_1 = p'_2$ die Bedingung, also

$$\underline{\varrho}^1 (g_{1'\tau}(\tau_1) + \tilde{g}_{1'\tau}(\tilde{\tau}_1)) = \underline{\varrho}^2 g_{2'\tau}(\tau_2). \quad (\text{IV7.14})$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

7.8 Lemma. Die Randbedingungen liefern für den Strahl in (IV7.12)

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{c_1} &= \frac{\sin \alpha_2}{c_2} && \text{in } \mathbb{R}, \\ \underline{\varrho}^1 (a_1 + \tilde{a}_1) &= \underline{\varrho}^2 a_2 && \text{in } \mathbb{C}, \\ \frac{\cos \alpha_1}{c_1} (a_1 - \tilde{a}_1) &= \frac{\cos \alpha_2}{c_2} a_2 && \text{in } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Beweis. Since

$$g_{1'\tau}(\tau) = \text{Re}(ia_1 e^{i\tau}), \quad \tilde{g}_{1'\tau}(\tau) = \text{Re}(i\tilde{a}_1 e^{i\tau}), \quad g_{2'\tau}(\tau) = \text{Re}(ia_2 e^{i\tau})$$

the property (IV7.14) reads

$$\underline{\varrho}^1 \text{Re}(ia_1 e^{i\tau_1} + i\tilde{a}_1 e^{i\tilde{\tau}_1}) = \underline{\varrho}^2 \text{Re}(ia_2 e^{i\tau_2})$$

on Γ . Now $x_1 = 0$ on the boundary Γ and therefore

$$\tau_1 = \omega x_2 \frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \omega t = \tilde{\tau}_1, \quad \tau_2 = \omega x_2 \frac{\sin \alpha_2}{c_2} - \omega t. \quad (\text{IV7.15})$$

Hence the equation becomes

$$\underline{\varrho}^1 \text{Re}\left(i(a_1 + \tilde{a}_1) e^{-i\omega t} \exp\left(i\omega x_2 \frac{\sin \alpha_1}{c_1}\right)\right) = \underline{\varrho}^2 \text{Re}\left(ia_2 e^{-i\omega t} \exp\left(i\omega x_2 \frac{\sin \alpha_2}{c_2}\right)\right)$$

and since this holds for all t , it holds for $t = 0$ and $t = \frac{\pi}{2\omega}$, we get

$$\underline{\varrho}^1 (a_1 + \tilde{a}_1) \exp\left(i\omega x_2 \frac{\sin \alpha_1}{c_1}\right) = \underline{\varrho}^2 a_2 \exp\left(i\omega x_2 \frac{\sin \alpha_2}{c_2}\right).$$

First setting $x_2 = 0$ we get

$$\underline{\varrho}^1(a_1 + \tilde{a}_1) = \underline{\varrho}^2 a_2.$$

Inserting this result in the equation and assuming $a_2 \neq 0$ we get

$$\exp\left(i\omega x_2 \frac{\sin \alpha_1}{c_1}\right) = \exp\left(i\omega x_2 \frac{\sin \alpha_2}{c_2}\right).$$

This holds if for every $x_2 \in \mathbb{R}$ there is a $k \in \mathbb{Z}$ such that

$$\omega x_2 \left(\frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \frac{\sin \alpha_2}{c_2} \right) = 2\pi k.$$

Since $\omega \neq 0$ this is possible only if

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} - \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = 0 \quad (\text{IV7.16})$$

Jetzt zur Gleichung (IV7.13) welche lautet

$$\frac{\cos \alpha_1}{c_1} \operatorname{Re}(ia_1 e^{i\tau_1} - i\tilde{a}_1 e^{i\tilde{\tau}_1}) = \frac{\cos \alpha_2}{c_2} \operatorname{Re}(ia_2 e^{i\tau_2})$$

Using (IV7.16) we get $\tau_1 = \tilde{\tau}_1 = \tau_2$ from (IV7.15), and the argument on $e^{-i\omega t}$ gives that this equation becomes

$$\frac{\cos \alpha_1}{c_1} (a_1 - \tilde{a}_1) = \frac{\cos \alpha_2}{c_2} a_2.$$

This finishes the proof. \square

Das Verhalten des Schalls wird bei einer rauhen Oberfläche von den Oberflächeneigenschaften der Wand bestimmt, siehe zum Beispiel das rechte Bild in Abb. 23. Dies werden wir in [22] darstellen. Es sei auch auf [40, Chap 7 Interaction of Acoustic Waves with Boundary] verwiesen.

Kugelwellen

Die bisherigen Schallwellen bezogen sich auf einen vom Ursprungsort weit entfernten Beobachter. Wir sind nun in der Nähe eines Ursprungortes. Dort betrachten wir eine Kugelwelle

$$\varphi'(t, x) = \frac{g(r - cst)}{r}, \quad r := |x|, \quad (\text{IV7.17})$$

wobei wir die Voraussetzungen in 7.5 machen mit $\underline{v} = 0$ und $\mathbf{f}' = 0$, und natürlich machen wir die Voraussetzung $u' = \nabla \varphi'$.

7.9 Theorem. Es sei $\tau \mapsto g(\tau)$ eine beliebige Funktion und definiere φ' gemäß (IV7.18). Dann können die anderen Störungsfunktionen auf analoge Weise definiert werden, so dass diese Funktionen die Wellengleichung (IV7.8) in $\{(t, x); r > 0\}$ erfüllen. *Hinweis:* Siehe 7.11 für $r = 0$.

Beweis. Es ist

$$\partial_t \varphi' = -\frac{c_S}{r} g'_{,\tau}, \quad r^2 \partial_r \varphi' = r^2 \left(\frac{g'_{,\tau}}{r} - \frac{g}{r^2} \right) = r g'_{,\tau} - g$$

also ist die erste Gleichung von (IV7.8)

$$\partial_t \varrho' = -\varrho \operatorname{div} u' = -\varrho \Delta \varphi' = -\frac{\varrho}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi') = -\frac{\varrho}{r} g'_{,\tau\tau}$$

erfüllt, wenn

$$\varrho' = \frac{\varrho}{c_S r} g'_{,\tau} (r - c_S t),$$

und es gilt die zweite Gleichung von (IV7.8)

$$0 = \varrho \partial_t u' + \nabla p' = \nabla (\varrho \partial_t \varphi' + p'),$$

wenn

$$p' = -\varrho \partial_t \varphi' = \frac{c_S \varrho}{r} g'_{,\tau} = c_S^2 \varrho'.$$

Dies alles gilt nur wenn $r > 0$. \square

Wenn wir für Kugelwellen die Wellengleichung im ganzen Raum erklären wollen, sind wir auf Distributionen angewiesen, d.h. auf die Formulierung der Erhaltungssätze (IV7.1) für Distributionen

$$\begin{aligned} \partial_t [\varrho] + \operatorname{div} [\varrho v] &= \mathbf{r}, \\ \partial_t [\varrho v] + \operatorname{div} [\varrho v v^T + p \operatorname{Id}] &= \mathbf{f} + \mathbf{r} v, \end{aligned} \quad (\text{IV7.18})$$

wobei $S = 0$, $q = 0$ und $s = s_0$ für die Entropie gilt und wobei \mathbf{r} eine Distribution mit Träger im Ursprung sein wird, da, wie gerade in 7.9 gezeigt, die Kugelwelle eine Lösung von (IV7.18) außerhalb $\{0\}$ darstellt.

7.10 Lemma. Es sei $\mathbf{f} = 0$. Für eine Störung wie in 7.2 und $\mathbf{r} = \delta \mathbf{r}' + \mathcal{O}(\delta)$ (also $\underline{\mathbf{r}} = 0$) gilt im Falle $\underline{v} = 0$ im ganzen Raumzeitgebiet

$$\begin{aligned} \partial_t [\varrho'] + \operatorname{div} [\varrho u'] &= \mathbf{r}, \\ \partial_t [\varrho u'] + \operatorname{div} [p' \operatorname{Id}] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV7.19})$$

Beweis. (Zur Beweismethode erinnern wir an den Beweis von 7.2.) Für die Massenerhaltung gilt $\partial_t [\varrho'] + \operatorname{div} [\varrho u'] = \mathbf{r}$ und für die Impulserhaltung folgt wegen $\mathbf{r} v = \delta \mathbf{r}' \underline{v} + \mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\delta)$ und wegen $\varrho v v^T = \mathcal{O}(\delta^2)$ die Gleichung $\partial_t [\varrho u'] + \operatorname{div} [p' \operatorname{Id}] = 0$. \square

Es gilt der folgende Satz, wobei in $\{(t, x); r = 0\}$ nur die Funktion $\operatorname{div} u'$ eine nennenswerte Singularität hat, das andere kann man mit L^1 -Funktionen erklären.

7.11 Theorem. Für Kugelwellen gelten die Gleichungen (IV7.19) mit

$$\mathbf{r} := \underline{\rho} h \boldsymbol{\mu}_0, \quad h(t) := 4\pi \cdot g(-c_S t).$$

Hinweis: $\boldsymbol{\mu}_0$ is defined in I.2.8.

Beweis. Es ist $\varphi' \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, ebenso $\varrho' = \frac{\underline{\rho}}{c_S r} g'_{\tau}(r - c_S t)$ und $p' = c_S^2 \varrho'$. Somit ist

$$\partial_r \varphi' = \left(\frac{g}{r} \right)'_{r} = \frac{g'_{\tau}}{r} - \frac{g}{r^2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$$

und außerdem

$$u' = \nabla \varphi' = \left(\frac{g'_{\tau}}{r} - \frac{g}{r^2} \right) \mathbf{e}_r, \quad \partial_t u' = -c_S \left(\frac{g'_{\tau\tau}}{r} - \frac{g'_{\tau}}{r^2} \right) \mathbf{e}_r$$

in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Also können wir auch schreiben

$$\left. \begin{aligned} [\partial_t \varrho'] + \underline{\rho} \operatorname{div}[u'] &= [\mathbf{r}], \\ [\underline{\rho} \partial_t u' + \nabla p'] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Es bleibt der Term $\operatorname{div}[u']$ zu bestimmen, der eine distributionelle Singularität besitzt. Für Testfunktionen $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ ist

$$\begin{aligned} \langle \zeta, [\partial_t \varrho'] + \underline{\rho} \operatorname{div}[u'] \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})} (\zeta \partial_t \varrho' + \underline{\rho} \nabla \zeta \bullet u') \, dL^4 \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_\delta(0))} \underbrace{\zeta (\partial_t \varrho' - \underline{\rho} \operatorname{div} u')}_{=0} \, dL^4 - \int_{\mathbb{R} \times \partial B_\delta(0)} \zeta \underline{\rho} \nu_{\partial B_\delta(0)} \bullet u' \, dH^3 \right) \\ &= - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial B_\delta(0)} \zeta \underline{\rho} \nu_{\partial B_\delta(0)} \bullet u' \, dH^2 \, dL^1 = \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, 0) \underline{\rho} h(t) \, dL^1(t), \end{aligned}$$

falls

$$\begin{aligned} h(t) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta(0)} (-\nu_{\partial B_\delta(0)} \bullet u') \, dH^2 \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta(0)} \left(\frac{g(r - c_S t)}{r^2} - \frac{g'_{\tau}(r - c_S t)}{r} \right) \, dH^2 \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(0)} (g(\delta - c_S t) - \delta g'_{\tau}(\delta - c_S t)) \, dH^2 = 4\pi \cdot g(-c_S t). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\langle \zeta, \mathbf{r} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} := \langle \zeta, \underline{\rho} h \boldsymbol{\mu}_0 \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, 0) \underline{\rho} h(t) \, dL^1(t),$$

was zu beweisen war. \square

Wir sehen also, dass eine Kugelwelle in der Massenerhaltung in einer im Nullpunkt konzentrierten Massenzu- bzw. -abnahme besteht. Bei einem Quellterm mit

$$g(\tau) := \operatorname{Re}\left(a \exp\left(\frac{i\omega}{c_S}\tau\right)\right) \quad (\text{IV7.20})$$

kann man sich \mathbf{r} zum Beispiel vorstellen als eine mikroskopisch an- und abschwellende Kugel. Wir sehen auch den Doppler Effekt, wenn ein Beobachter sich mit $t \mapsto \xi(t)$ in einer Kugelwelle bewegt.

7.12 Doppler Effekt. Vom Ursprung gehe eine Welle mit Frequenz ω aus (siehe (IV7.17) und (IV7.20)). Ein Beobachter, der sich mit $t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^3$ bewegt, nimmt die Welle mit einer Frequenz $\omega_{\xi(t)}$ wahr, für die gilt

$$\omega_{\xi(t)} = \omega - \dot{\xi}(t) \bullet \mathbf{k}(\xi(t)). \quad (\text{IV7.21})$$

Dabei ist der Wellenzahlvektor \mathbf{k} definiert durch

$$\mathbf{k}(x) := \frac{\omega}{c_S} \mathbf{n}(x), \quad \mathbf{n}(x) = \frac{x}{|x|} = \mathbf{e}_r(x).$$

Genauer ist für t nahe t_0

$$p'(t, x) = \underline{\rho} \operatorname{Re}\left(ia\omega \frac{e^{-i\omega\alpha(t, x)}}{|x|}\right), \quad \alpha(t, x) := 1 - \frac{1}{c_S}|x|,$$

$$\alpha(t, \xi(t)) = \alpha_0 + \frac{\omega_{\xi(t_0)}}{\omega}(t - t_0) + \mathcal{O}(t - t_0),$$

mit $\alpha_0 = t_0 - \frac{1}{c_S}|\xi(t_0)|$.

Achtung: Die Schallwelle ist anders (siehe [21, ??]), wenn sich der Ursprung der Welle bewegt und der Beobachter etwa still steht.

Der Wellenzahlvektor ist also derjenige, der zu der in dem Punkte linearisierten Welle gehört.

Beweis. Es ist mit g von (IV7.20)

$$p'(t, x) = -\underline{\rho} \partial_t \varphi'(t, x) = \frac{c_S \underline{\rho}}{r} g'_{\tau}(r - c_S t),$$

$$= \underline{\rho} \operatorname{Re}\left(ia\omega \frac{e^{-i\omega\alpha(t, x)}}{|x|}\right), \quad \alpha(t, x) := t - \frac{1}{c_S}|x|,$$

also wenn $x = \xi(t)$

$$\alpha(t, \xi(t)) = t - \frac{1}{c_S}|\xi(t)| = t - \frac{1}{c_S}(|\xi(t_0)| + \xi'_{\tau}(t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}(t - t_0))$$

$$= t - \frac{1}{c_S}(|\xi(t_0)| + \xi'_{\tau}(t_0) \bullet \mathbf{n}(\xi(t_0))(t - t_0) + \mathcal{O}(t - t_0))$$

$$= t_0 - \frac{1}{c_S}|\xi(t_0)| + \left(1 - \frac{1}{c_S} \dot{\xi}(t_0) \bullet \mathbf{n}(\xi(t_0))\right)(t - t_0) + \mathcal{O}(t - t_0).$$

□

Schall mit Dämpfung

Wir gehen aus von dem System (IV7.4) (see [40, 4.1 Scaling and scaled equations]) jetzt aber mit “dissipativen” Termen

$$\begin{aligned}\partial_{(1,v)}\varrho + \varrho \operatorname{div} v &= 0, \\ \varrho \partial_{(1,v)}v + \nabla p - \operatorname{div} S &= \mathbf{f}, \\ \varrho \partial_{(1,v)}s + \operatorname{div}\left(\frac{1}{\theta}q\right) &= \sigma := \frac{1}{\theta}Dv \bullet S + \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q,\end{aligned}\tag{IV7.22}$$

mit den Gleichungen in (IV7.2). Für Störungen

$$\begin{aligned}(\varrho, v, \theta) &= (\underline{\varrho}, \underline{v}, \underline{\theta}) + \delta(\varrho', v', \theta') + \mathcal{O}(\delta), \\ p &= \underline{p} + \delta p' + \mathcal{O}(\delta), \quad S = \underline{S} + \delta S' + \mathcal{O}(\delta), \\ s &= \underline{s} + \delta s' + \mathcal{O}(\delta), \quad q = \underline{q} + \delta S' + \mathcal{O}(\delta),\end{aligned}\tag{IV7.23}$$

wie ergeben sich in erster Näherung die Gleichungen

$$\begin{aligned}\partial_{(1,v)}\varrho' + \operatorname{div}(\underline{\varrho} u') &= -\varrho' \operatorname{div} \underline{v}, \\ \underline{\varrho}(\partial_{(1,v)}u' + u' \bullet \nabla \underline{v}) + \nabla p' - \operatorname{div} S' &= \mathbf{f}' - \varrho' \partial_{(1,v)}\underline{v}, \\ \underline{\varrho}(\partial_{(1,v)}s' + u' \bullet \nabla \underline{s}) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{\underline{\theta}}q' - \frac{\varrho'}{\underline{\theta}^2}q\right) &= \sigma', \\ \sigma &= \underline{\sigma} + \delta\sigma' + \mathcal{O}(\delta).\end{aligned}\tag{IV7.24}$$

In dem Falle, dass das Referenzsystem im “Equilibrium” ist, d.h.

$$(\underline{\varrho}, \underline{v}, \underline{\theta}) = \text{const}, \quad \underline{S} = 0, \quad \underline{q} = 0\tag{IV7.25}$$

ist $\underline{\sigma} = 0$ und wir erhalten für die Störung

$$\begin{aligned}\partial_{(1,v)}\varrho' + \operatorname{div}(\underline{\varrho} u') &= 0, \\ \underline{\varrho} \partial_{(1,v)}u' + \nabla p' - \operatorname{div} S' &= \mathbf{f}', \\ \underline{\varrho} \partial_{(1,v)}s' + \operatorname{div}\left(\frac{1}{\underline{\theta}}q'\right) &= \sigma'.\end{aligned}\tag{IV7.26}$$

Aus (IV7.24) folgt das aus den in (IV7.25) gemachten Annahmen bis auf die Aussagen $\underline{s} = \text{const}$ und $\sigma' = 0$, die jetzt bewiesen werden unter der Annahme, dass für S und q die Gleichungen (IV2.14)

$$S = 2a(Dv)^S + b \operatorname{div}(v) \operatorname{Id}, \quad q = -c \nabla \theta,\tag{IV7.27}$$

erfüllt sind mit Konstanten a, b, c (oder mit Funktionen, die sich auch wie in (IV7.23) entwickeln lassen).

7.13 Lemma. Ist (IV7.27) erfüllt, so gelten die Aussagen:

(1) $\underline{s} = \text{const.}$

(2) $\sigma' = 0$, in more detail

$$\sigma = \frac{\delta^2}{\underline{\theta}} \left(\frac{\underline{a}}{2} |\mathbf{D}u' + (\mathbf{D}u')^T|^2 + \underline{b} |\text{div}(u')|^2 + \frac{\underline{c}}{\underline{\theta}} |\nabla\theta'|^2 \right).$$

Remark: Siehe [10, §77].

Beweis (2). Die Voraussetzungen an S und q zusammen mit $\underline{S} = 0$ und $\underline{q} = 0$ liefern

$$S' = \left(\underline{a}(\mathbf{D}u' + (\mathbf{D}u')^T) + \underline{b} \text{div}(u') \text{Id} \right), \quad q' = -\underline{c} \nabla\theta'.$$

Dies ergibt, da $Dv = \delta \mathbf{D}u' + \mathcal{O}(\delta)$,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\underline{\theta}} \mathbf{D}v \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \right) \bullet q \\ &= \delta^2 \left(\frac{1}{\underline{\theta}} \mathbf{D}u' \bullet S' + \nabla \left(\frac{-\theta'}{\underline{\theta}^2} \right) \bullet q' \right) \\ &= \delta^2 \left(\frac{\underline{a}}{2\underline{\theta}} |\mathbf{D}u' + (\mathbf{D}u')^T|^2 + \frac{\underline{b}}{\underline{\theta}} |\text{div}(u')|^2 + \frac{\underline{c}}{\underline{\theta}^2} |\nabla\theta'|^2 \right). \end{aligned}$$

Also ist $\sigma' = 0$. □

Beweis (1). Wegen $\underline{S} = 0$ und $\underline{q} = 0$ ist $\underline{\sigma} = 0$ und die Entropiegleichung sagt $\underline{\rho} \partial_{(1,v)} \underline{s} = 0$. Daraus folgt $\underline{s} = \text{const}$ wie in 7.3(1). □

The equations (IV7.26) for the perturbation are like the Stokes-Fourier equation and therefore the wave will dissipate.

8 vr-Wirbel

Wir betrachten in diesem Abschnitt einfachste Wirbel, das sind solche Lösungen für die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen, deren Singularität eine eindimensionale Kurve ist. Oder noch einfacher, wir betrachten Situationen, bei denen sich der Kern der Singularität auf einer Geraden befindet, d.h. wir betrachten Strömungen um eine Achse, die wir als die x_3 -Achse nehmen. Die Geschwindigkeit wird hierbei nahe der Achse sehr groß. Das müsste eigentlich durch die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen beschrieben werden (siehe z.B. Bershader [25], der auch den Zusammenhang mit dem Rankine-Wirbel 4.7 herstellt), was wir hier jedoch nicht untersuchen. Wir sind nur an wesentlichen Eigenschaften interessiert, die sich schon durch inkompressible Strömungen beschreiben lassen.



Abb. 24: Aus [Wikipedia: Tornado]: “A waterspout near the Florida Keys in 1969”. Ein vom Flugzeug aufgenommener Tornado

Wir werden hier zunächst die Strömung zwischen zwei Zylindern betrachten (siehe 8.1). Den Radius des inneren Zylinders werden wir gegen 0 gehen lassen. Dann werden wir eine explizite Lösung kennenlernen, die einen Hurrikan bzw. einen Taifun darstellt (siehe 8.4). Der Hurrikan wird im Wesentlichen in der Nähe des Auftreffpunktes realistisch beschrieben.

Zunächst betrachte zwei konzentrische Zylinder Z_R und $Z_{R'}$, wobei

$$Z_r = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 < r^2\} \text{ für } r > 0,$$

und im Zwischenraum $Z_R \setminus \overline{Z_{R'}}$ eine Flüssigkeit, die stationär ist und mit der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung mit konstanten Zähigkeitskoeffizienten und mit Kraft $\mathbf{f} = 0$ modelliert werde (siehe (IV3.7)). Also beschreiben wir den Fluss für einen Beobachter der sich als Inertialsystem darstellt. Es wird also jegliche Schwerkraft vernachlässigt.

8.1 Couette-Strömung. Wir definieren zwischen den Zylindern eine stationäre Geschwindigkeit durch

$$v(x) = v_\vartheta(r)\mathbf{e}_\vartheta, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta := \begin{bmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

und wir zeigen:

(1) Es ist (v, p) mit v wie oben eine Lösung der stationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung (wie gerade definiert), wenn

$$v_\vartheta(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

$$\partial_r p(r) = \frac{\varrho_0}{r} |v_\vartheta(r)|^2, \quad p = p(r).$$

(2) Hat die Flüssigkeit Dirichlet-Randbedingung und rotiert ∂Z_R mit Winkelgeschwindigkeit ω und $\partial Z_{R'}$ mit Winkelgeschwindigkeit ω' , so gilt

$$A = \frac{\omega R^2 - \omega' R'^2}{R^2 - R'^2}, \quad B = \frac{\omega' - \omega}{\frac{1}{R'^2} - \frac{1}{R^2}} = \frac{R^2 R'^2 (\omega' - \omega)}{R^2 - R'^2}.$$

Referenzen: Siehe Hutter [8, 4.3.1 Couette Viskosimeter] und Hutter & Wang [9, 7.3.1 Couette Viscometer]. Siehe auch [Wikipedia: Taylor-Couette flow].

In Abb. 25 wird im linken Bild eine Strömung gezeigt, wie sie hier behandelt wird, siehe dazu auch die Mitte des Bildes. Hier nicht behandelt wird der für große Werte von $|\omega - \omega'|$ auftretende Fall im rechten Bild.

Beweis (1). Die zu lösenden Differentialgleichungen sind (IV3.7), also in unserem Fall $\operatorname{div} v = 0$ und

$$\varrho_0(v \bullet \nabla)v + \nabla p - a \Delta v = 0 \tag{IV8.1}$$

mit $a = \text{const} > 0$. Für die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_r := \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta := \begin{bmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

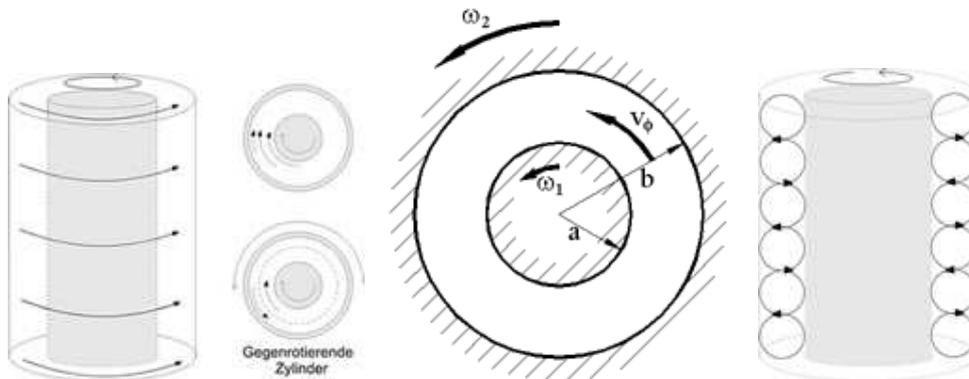


Abb. 25: *Center:* $\omega_1 = \omega'$, $\omega_2 = \omega$, $a = R'$, $b = R$. *Left:* Couette flow (see [Wikipedia: Couette flow]). *Right:* Not considered here the Taylor-Couette flow (see [Wikipedia: Taylor-Couette flow]).

gilt (nach I.1.5), wenn sie als Funktionen von x betrachtet werden,

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r &= 0, & \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_r &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta, \\ \partial_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_\vartheta &= 0, & \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta &= -\frac{1}{r} \mathbf{e}_r,\end{aligned}$$

oder, wenn sie als Funktionen von (r, ϑ, x_3) betrachtet werden,

$$\begin{aligned}\partial_r \mathbf{e}_r &= 0, & \partial_\vartheta \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\vartheta, \\ \partial_r \mathbf{e}_\vartheta &= 0, & \partial_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta &= -\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Also hat unsere Geschwindigkeit die Divergenz

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v &= \mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} v + \mathbf{e}_\vartheta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} v \\ &= \mathbf{e}_r \bullet \partial_r v + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta \bullet \partial_\vartheta v = v'_\vartheta \mathbf{e}_r \bullet \mathbf{e}_\vartheta - \frac{v_\vartheta}{r} \mathbf{e}_\vartheta \bullet \mathbf{e}_r = 0,\end{aligned}$$

da $\mathbf{e}_r \bullet \mathbf{e}_\vartheta = 0$. Die Differentialgleichung (IV8.1) lösen wir nacheinander für v und p , und zwar durch die speziellen Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0, & v &= v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta, \\ \nabla p &= -\varrho_0 (v \bullet \nabla) v.\end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass die zweite Gleichung für p lösbar ist wegen der speziellen Lösung v (obige Zerlegung ist konsistent mit der Zerlegung in 3.6).

Der Laplace-Operator von v ist

$$\begin{aligned}\Delta v &= \partial_r^2 v + \frac{1}{r} \partial_r v + \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta^2 v \\ &= v_\vartheta'' \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} v_\vartheta' \mathbf{e}_\vartheta + \frac{v_\vartheta}{r^2} \underbrace{\partial_\vartheta \partial_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta}_{= -\mathbf{e}_r} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= -\mathbf{e}_\vartheta} \\ &= \left(v_\vartheta'' + \frac{1}{r} v_\vartheta' - \frac{1}{r^2} v_\vartheta \right) \mathbf{e}_\vartheta,\end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung von

$$v_\vartheta'' + \frac{1}{r} v_\vartheta' - \frac{1}{r^2} v_\vartheta = 0$$

ist

$$v_\vartheta(r) = Ar + \frac{B}{r}.$$

Die zweite Gleichung für den Druck ergibt

$$\begin{aligned}\nabla p &= -\varrho_0 (v \bullet \nabla) v = -\varrho_0 v_\vartheta (\mathbf{e}_\vartheta \bullet \nabla) (v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \\ &= -\varrho_0 v_\vartheta^2 \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta = \frac{\varrho_0}{r} v_\vartheta^2 \mathbf{e}_r,\end{aligned}$$

und das ergibt

$$p = p(r), \quad \partial_r p(r) = \frac{\varrho_0}{r} |v_\vartheta(r)|^2.$$

Damit sind die Aussagen bewiesen. \square

Beweis (2). Die Voraussetzung besagt, dass wir folgende Dirichlet-Bedingungen haben

$$v_\vartheta(R) = \omega R, \quad v_\vartheta(R') = \omega' R'.$$

Einsetzen in (1) ergibt

$$AR + \frac{B}{R} = \omega R, \quad AR' + \frac{B}{R'} = \omega' R',$$

was äquivalent ist zu den angegebenen Formeln für A und B . \square

Entartet der innere Zylinder $Z_{R'}$, d.h. geht $R' \rightarrow 0$, so konvergiert bei beschränkter Winkelgeschwindigkeit ω' der Koeffizient $A \rightarrow \omega$ und $B \rightarrow 0$, so dass für v_ϑ nur die lineare Geschwindigkeit

$$v_\vartheta = \omega r$$

übrigbleibt. Konvergiert allerdings $\omega' \rightarrow \infty$, wenn $R' \rightarrow 0$, also etwa

$$R'^2 \omega' \rightarrow C \text{ mit } C \in \mathbb{R},$$

so gilt

$$B = \frac{1}{1 - \frac{R'^2}{R^2}} (R'^2 \omega' - R'^2 \omega) \rightarrow C$$

$$A = \frac{1}{1 - \frac{R'^2}{R^2}} \left(\omega - \frac{\omega' R'^2}{R^2} \right) \rightarrow \omega - \frac{C}{R^2} \quad \text{für } R' \rightarrow 0,$$

und die Lösung (v, p) konvergiert gegen den **freien *vr*-Wirbel**

$$\boxed{\begin{aligned} v_{\vartheta}(r) &= \left(\omega - \frac{C}{R^2} \right) r + \frac{C}{r}, \\ \partial_r p(r) &= \frac{\varrho_0 |v_{\vartheta}(r)|^2}{r}. \end{aligned}} \quad (\text{IV8.2})$$

Strömungen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man auch als “*vr*-Wirbel”, denn die Geschwindigkeit v geht in der Singularität gegen unendlich, während man ein beschränktes Vektorfeld erhält, wenn man die Geschwindigkeit v mit dem Abstand r von der Singularität multipliziert. Also bleibt in obigem Beispiel $v_{\vartheta}(r) \cdot r$ beschränkt. Der Wirbel in 8.1 wird dann auch “freier *vr*-Wirbel” genannt. Diesen Limes $\omega' \rightarrow \infty$ kann man auch erhalten, indem man zunächst das System aufschreibt (siehe den Rankine-Wirbel 4.7 und die Arbeit von Giaioiti & Stel [42]), das aus der Flüssigkeit und einem starren Körper $Z_{R'}$ besteht, der sehr schnell mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega' = \frac{C + o(1)}{R'^2}$$

rotiert. Man muss dann zum Limes $R' \rightarrow 0$ übergehen.

Man kann nun Folgendes zeigen:

8.2 Theorem. Für die Lösung des freien *vr*-Wirbels in (IV8.2) gilt in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus W}) &= 0, \\ \operatorname{div}\left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} M(v) \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\varepsilon}(W)} - N \mu_W\right) &= 0, \end{aligned}$$

wobei der Grenzwert in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ existiert. Hierbei ist

$$M(v) := \varrho_0 v v^T + p \operatorname{Id} - 2a(Dv)^S \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus W,$$

$$N := \frac{C\pi}{2} \begin{bmatrix} C\varrho_0 & 4a & 0 \\ -4a & C\varrho_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\langle \eta, \mu_W \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)} := \int_{\mathbb{R}} \eta(0, 0, x_3) \, dL^1(x_3)$$

mit der Singularität $W := \{(0, 0, x_3); x_3 \in \mathbb{R}\}$. Es ist $\mu_{\mathbb{R}^3 \setminus W}$ bzw. $\mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\varepsilon}(W)}$ das Lebesguemaß L^3 auf $\mathbb{R}^3 \setminus W$ bzw. $\mathbb{R}^3 \setminus B_{\varepsilon}(W)$, wobei $L^3(W) = 0$, sowie μ_W das Hausdorffmaß H^1 auf W . Beachte die Singularität von v .

Achtung: Der Grenzwert “ $\lim_{\varepsilon \searrow 0}$ ” steht innerhalb des Divergenzoperators, d.h. “ $\operatorname{div} \lim_{\varepsilon \searrow 0}$ ”, obwohl im Beweis erst einmal nur “ $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{div}$ ” betrachtet wird. Für die Aussage des Theorems ist also der Beweisteil “Existenz des Limes” erforderlich. *Definition:* Die angegebenen Funktionen in $\mathbb{R}^3 \setminus W$ sind nicht im Wirbel W erklärt, so ist Dv nur in der offenen Menge $\mathbb{R}^3 \setminus W$ als Ableitung von v definiert.

Der nichttriviale Anteil der Matrix N wirkt horizontal und ist

$$\begin{bmatrix} C_{\varrho_0} & 4a \\ -4a & C_{\varrho_0} \end{bmatrix} = C_{\varrho_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er besteht also aus einem Expansionsterm der Stärke C_{ϱ_0} und einem antisymmetrischen Anteil der Stärke $4a$. Das Theorem sagt aus, dass die Massen- und Impulserhaltung im ganzen Raum erfüllt sind, und zwar im Distributionssinne, wobei der hier beschriebene Cauchy-Limes als Cauchy-Hauptwert im Raum der Distributionen existiert (siehe [71, 6 Cauchy’s principal value] und [79, (for $n = 1$)]). Es sei bemerkt, dass wir hier auf die ursprüngliche Form der Impulserhaltung zurückgreifen, d.h. wir verwenden den Term $\operatorname{div} S$ mit dem Stresstensor $S = a(Dv)^S$ und nicht $a\Delta v$. Außerhalb der Singularität W erfüllt die Lösung die stationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \\ \operatorname{div} M(v) &= 0. \end{aligned}$$

Übrigens ist es ein offenes Problem, den Wirbel durch Lösungen der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen zu approximieren.

Beweis (Massenerhaltung). Es ist mit $\tilde{A} := \omega - \frac{C}{R^2}$

$$v = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} = \frac{v_{\vartheta}}{r} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\tilde{A} + \frac{C}{r^2} \right) \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{IV8.3}$$

was von der Ordnung $\frac{1}{r}$ nahe W ist, und daher ist v im \mathbb{R}^3 integrierbar. Es gilt $\operatorname{div} v = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus W$ und für $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \operatorname{div}(v \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\varepsilon}(W)}) \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} &= - \langle \nabla \zeta, v \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\varepsilon}(W)} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\varepsilon}(W)} \nabla \zeta \bullet v \, dL^3 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial B_{\varepsilon}(0)} \zeta \nu_{B_{\varepsilon}(0)} \bullet v \, dH^1 \, dL^1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{A} \varepsilon + \frac{C}{\varepsilon} \right) \int_{\partial B_{\varepsilon}(0)} \underbrace{\zeta \nu_{B_{\varepsilon}(0)} \bullet \mathbf{e}_{\vartheta}}_{= \mathbf{e}_r} \, dH^1 \, dL^1 = 0, \\ &\qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0} \end{aligned}$$

also auch $\langle \zeta, \operatorname{div}(v \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus W}) \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = 0$. □

Beweis (Impulserhaltung). Die Lösung von (IV8.3) ergibt in $\mathbb{R}^3 \setminus W$

$$\begin{aligned} Dv &= D\left(\left(\tilde{A} + \frac{C}{r^2}\right) \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\tilde{A} + \frac{C}{r^2}\right) D\left(\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} D\left(\frac{C}{r^2}\right) \\ &= \left(\tilde{A} + \frac{C}{r^2}\right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2C}{r^4} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{[x_1 \quad x_2 \quad 0]}_{= r^2 \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T}, \end{aligned}$$

somit ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta$ sind im Beweis von 8.1 definiert)

$$(Dv)^S = \frac{1}{2}(Dv + (Dv)^T) = -\frac{C}{r^2}(\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\vartheta^T).$$

Also ist in $\mathbb{R}^3 \setminus W$

$$\begin{aligned} M(v) &:= \varrho_0 v v^T + p \text{Id} - 2a(Dv)^S \\ &= \varrho_0 v_\vartheta^2 \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta^T + p \text{Id} + \frac{2aC}{r^2}(\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\vartheta^T), \end{aligned} \tag{IV8.4}$$

somit

$$\begin{aligned} \text{div} M(v) &= (\mathbf{e}_r \bullet \partial_{\mathbf{e}_r} + \mathbf{e}_\vartheta \bullet \partial_{\mathbf{e}_\vartheta}) M(v) \\ &= (\partial_{\mathbf{e}_r} M(v)) \mathbf{e}_r + (\partial_{\mathbf{e}_\vartheta} M(v)) \mathbf{e}_\vartheta \\ &= \varrho_0 \partial_r (v_\vartheta^2) \underbrace{(\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta^T) \mathbf{e}_r}_{=0} + \varrho_0 v_\vartheta^2 \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} (\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta^T) \mathbf{e}_\vartheta + \partial_r p(r) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \partial_r \left(\frac{2aC}{r^2}\right) (\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\vartheta^T) \mathbf{e}_r + \frac{2aC}{r^2} \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} (\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\vartheta^T) \mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad \underbrace{= \frac{2aC}{r^2} \left(-\frac{2}{r} \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \bullet (\partial_{\mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_\vartheta + \partial_{\mathbf{e}_\vartheta} \mathbf{e}_r\right)}_{=0} \\ &= \left(-\frac{\varrho_0 v_\vartheta^2}{r} + \partial_r p(r)\right) \mathbf{e}_r = 0, \end{aligned}$$

da p eine Lösung von (IV8.2) ist. Nun ist für $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \text{div}(M(v) \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(W)}) \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} &= -\langle D\zeta, M(v) \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(W)} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(W)} \sum_{ij} \partial_j \zeta_i M_{ij}(v) \, dL^3 \\ &= \sum_{ij} \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (\nu_{B_\varepsilon(0)} \bullet \mathbf{e}_j) \zeta_i M_{ij}(v) \, dH^1 \, dL^1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \zeta \bullet (M(v) \mathbf{e}_r) \, dH^1 \, dL^1. \end{aligned}$$

Since from (IV8.4)

$$M(v)\mathbf{e}_r = p\mathbf{e}_r + \frac{2aC}{r^2}\mathbf{e}_\vartheta$$

this is

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \zeta \bullet \left(p(\varepsilon)\mathbf{e}_r + \frac{2aC}{\varepsilon^2}\mathbf{e}_\vartheta \right) dH^1 dL^1 = (*).$$

Nun ist offensichtlich (\mathbf{e}_r und \mathbf{e}_ϑ hängen nur von $e^{i\vartheta}$ ab)

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \left(p(\varepsilon)\mathbf{e}_r + \frac{2aC}{\varepsilon^2}\mathbf{e}_\vartheta \right) dH^1 = 0,$$

und da

$$\begin{aligned} \zeta(x_1, x_2, x_3) &= \zeta(0, x_3) + \sum_{j=1,2} x_j \partial_j \zeta(0, x_3) + \mathcal{O}(r^2) \\ &= \zeta(0, x_3) + r \sum_{j=1,2,3} (\mathbf{e}_r)_j \partial_j \zeta(0, x_3) + \mathcal{O}(r^2), \end{aligned}$$

sowie von (IV8.2)

$$\partial_r p(r) = \varrho_0 \tilde{A}^2 r + \frac{2\varrho_0 \tilde{A} C}{r} + \frac{\varrho_0 C^2}{r^3},$$

woraus folgt

$$p(r) = -\frac{\varrho_0 C^2}{2r^2} + \mathcal{O}(|\log r|) \text{ für } r \rightarrow 0, \quad (\text{IV8.5})$$

erhalten wir für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\zeta(x_1, x_2, x_3) - \zeta(0, x_3)}{\varepsilon} \bullet \left(\varepsilon^2 p(\varepsilon)\mathbf{e}_r + 2aC\mathbf{e}_\vartheta \right) dH^1(x_1, x_2) dL^1(x_3) \\ &= \sum_{ij} \int_{\mathbb{R}} \partial_j \zeta_i(0, x_3) \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (\mathbf{e}_r)_j \left(\varepsilon^2 p(\varepsilon)\mathbf{e}_r + 2aC\mathbf{e}_\vartheta \right)_i dH^1 dL^1(x_3) + \mathcal{O}(1) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} D\zeta(0, x_3) \bullet \underbrace{\int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{\varrho_0 C^2}{2} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T - 2aC\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T \right) dH^1}_{=: N} dL^1(x_3) + \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

da $\varepsilon^2 \log \varepsilon \rightarrow 0$. Damit folgt im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle D\zeta, M(v)\mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(W)} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \langle D\zeta, N\mu_W \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)}.$$

Die behauptete Darstellung von N folgt, wenn man

$$\int_{\partial B_1(0)} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T dH^1 = \pi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \int_{\partial B_1(0)} \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T dH^1 = \pi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

berücksichtigt. □

Beweis (Existenz des Limes). Wir haben noch zu zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle \Xi, M(v) \mu_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(W)} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)}$$

für alle $\Xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ existiert. (Bisher ist dies nur für $\Xi = D\zeta$ mit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ gezeigt.) Es reicht, die im Limes nichtintegrierbaren Anteile zu betrachten, weswegen wir nur $\Xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times B_1(0); \mathbb{R}^{3 \times 3})$ betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} M(v) &= \varrho_0 v v^T + p \text{Id} - 2a (Dv)^S \\ &= \underbrace{\frac{\varrho_0 C^2}{r^2} \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta^T - \frac{\varrho_0 C^2}{2r^2} \text{Id} + \frac{2aC}{r^2} (\mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r^T + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\vartheta^T)}_{=: \widetilde{M}(r, \vartheta)} + \mathcal{O}(|\log r|). \end{aligned}$$

All three terms of \widetilde{M} are not integrable near W , and we decompose

$$\widetilde{M}(r, \vartheta) = M^0(r, \vartheta) + M^1(r, \vartheta),$$

$$\begin{aligned} M^0(r, \vartheta) &:= \frac{\varrho_0 C^2}{r^2} \begin{bmatrix} \sin^2 \vartheta & -\sin \vartheta \cos \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\varrho_0 C^2}{2r^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{2aC}{r^2} \begin{bmatrix} -2\sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta & 0 \\ \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta & -2\sin \vartheta \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ M^1(r, \vartheta) &:= -\frac{\varrho_0 C^2}{2r^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Now we compute

$$\begin{aligned} &\int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} M^0 \, dL^2 \\ &= \int_\varepsilon^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varrho_0 C^2}{r} \begin{bmatrix} \sin^2 \vartheta & -\sin \vartheta \cos \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\varrho_0 C^2}{2r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2aC}{r} \begin{bmatrix} -2\sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta & 0 \\ \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta & -2\sin \vartheta \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) d\vartheta \, dr \\ &= 2\pi \int_\varepsilon^1 \left(\frac{\varrho_0 C^2}{r} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\varrho_0 C^2}{2r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2aC}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) dr \\ &= 0. \end{aligned}$$

From this it follows that

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0))} \Xi \bullet M^0 \, dL^3 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0)} (\Xi(x_1, x_2, x_3) - \Xi(0, 0, x_3)) \bullet M^0 \, d(x_1, x_2) \, dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0)} \int_0^1 \partial_{e_r} \Xi(sx_1, sx_2, x_3) \, ds \bullet (rM^0) \, d(x_1, x_2) \, dx_3 \end{aligned}$$

where $rM_0 = \mathcal{O}(\frac{1}{r})$ is integrable over $\mathbb{R} \times \mathbb{B}_1(0)$, that is,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0))} \Xi \bullet M^0 \, dL^3$$

exists. To deal with the term

$$\int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0))} \Xi \bullet M^1 \, dL^3 = -\frac{\varrho_0 C^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \Xi_{33} \mathcal{X}_{\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0)} \frac{1}{r^2} \, dL^2 \, dL^1$$

we choose $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ as the solution of

$$-\Delta \varphi_\varepsilon = \frac{1}{r^2} \mathcal{X}_{\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0)} \text{ in } \mathbb{B}_1(0), \quad \varphi_\varepsilon = 0 \text{ on } \partial \mathbb{B}_1(0),$$

that is, $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ (it is $\varphi_\varepsilon = \varphi$ on $\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0)$) where

$$\varphi = \widehat{\varphi}(r) = \int_r^1 \frac{|\log r'|}{r'} \, dr'$$

is an integrable function in $\mathbb{B}_1(0)$. From this we conclude

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Xi_{33} \mathcal{X}_{\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0)} \frac{1}{r^2} \, dL^2 = - \int_{\mathbb{B}_1(0)} \Xi_{33} \Delta \varphi_\varepsilon \, dL^2 \\ &= - \int_{\mathbb{B}_1(0)} \Delta \Xi_{33} \cdot \varphi_\varepsilon \, dL^2 \longrightarrow - \int_{\mathbb{B}_1(0)} \Delta \Xi_{33} \cdot \varphi \, dL^2, \end{aligned}$$

so that also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{B}_1(0) \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(0))} \Xi \bullet M^1 \, dL^3$$

exists. □

The Swirling Vortex

Wir geben jetzt das Beispiel eines Wirbels mit Bodenkontakt. Es wird die Randbedingung $v = 0$ am Boden gestellt, der Gravitationsterm wird (berechtigterweise) vernachlässigt, ebenso Fliehkräfte für den im Zentrum aufgestellten Beobachter. Beachte, dass wir jetzt Polarkoordinaten im \mathbb{R}^3

J. SERRIN

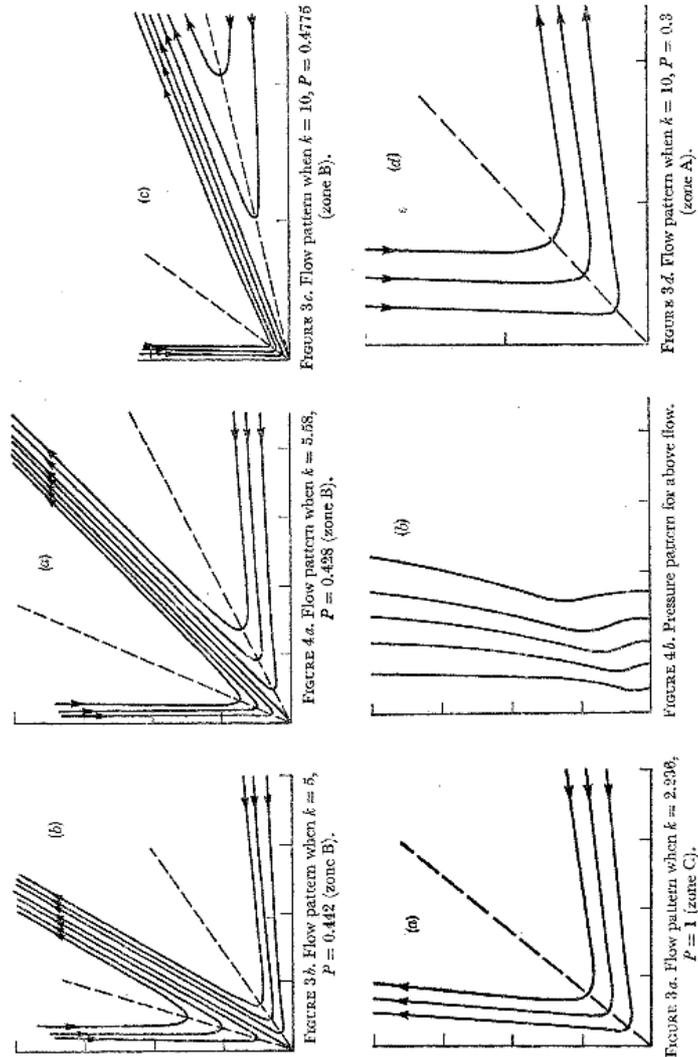


Abb. 26: Page from Serrin [63]

benutzen,⁶ welche definiert sind durch

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \alpha \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r} \sin \alpha \cos \vartheta \\ \tilde{r} \sin \alpha \sin \vartheta \\ \tilde{r} \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$\tilde{r} > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad (\text{IV8.6})$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{r}} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \vartheta \\ \sin \alpha \sin \vartheta \\ \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \vartheta \\ \cos \alpha \sin \vartheta \\ -\sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\vartheta} = \begin{bmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix},$$

also ist $\{\mathbf{e}_{\tilde{r}}, \mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{e}_{\vartheta}\}$ das zugehörige Orthonormalsystem bezüglich dieser Polarkoordinaten. Das Strömungsgebiet ist $\{x \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{r}} \mathbf{e}_{\tilde{r}} &= 0, & \partial_{\alpha} \mathbf{e}_{\tilde{r}} &= \mathbf{e}_{\alpha}, & \partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\tilde{r}} &= \sin \alpha \mathbf{e}_{\vartheta}, \\ \partial_{\tilde{r}} \mathbf{e}_{\alpha} &= 0, & \partial_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} &= -\mathbf{e}_{\tilde{r}}, & \partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\alpha} &= \cos \alpha \mathbf{e}_{\vartheta}, \\ \partial_{\tilde{r}} \mathbf{e}_{\vartheta} &= 0, & \partial_{\alpha} \mathbf{e}_{\vartheta} &= 0, & \partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} &= -\sin \alpha \mathbf{e}_{\tilde{r}} - \cos \alpha \mathbf{e}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Define $\tilde{v} := v \circ \tau$ and $\tilde{p} := p \circ \tau$. Then (we use the basis vectors in both coordinate systems)

$$\partial_{\tilde{r}} \tilde{v} = (\partial_{\mathbf{e}_{\tilde{r}}} v) \circ \tau, \quad \partial_{\alpha} \tilde{v} = \tilde{r} (\partial_{\mathbf{e}_{\alpha}} v) \circ \tau, \quad \partial_{\vartheta} \tilde{v} = r (\partial_{\mathbf{e}_{\vartheta}} v) \circ \tau,$$

and similarly for p .

8.3 Laplace Operator in Polarkoordinaten im \mathbb{R}^3 . Es gilt

$$\begin{aligned} (\Delta v) \circ \tau &= \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin \alpha} \left(\partial_{\tilde{r}} (\tilde{r}^2 \sin \alpha \partial_{\tilde{r}} \tilde{v}) + \partial_{\alpha} (\sin \alpha \partial_{\alpha} \tilde{v}) + \partial_{\vartheta} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \partial_{\vartheta} \tilde{v} \right) \right) \\ &= \partial_{\tilde{r}}^2 \tilde{v} + \frac{2}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} \tilde{v} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \partial_{\alpha}^2 \tilde{v} + \frac{\cot \alpha}{\tilde{r}^2} \partial_{\alpha} \tilde{v} + \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin \alpha} \partial_{\vartheta}^2 \tilde{v}. \end{aligned}$$

Beweis. Here for $l = 1, 2, 3$ the equation in (I5.11) with $Z = 1$ and $N = 1$ is

$$\operatorname{div} q = \mathbf{r} \quad \text{with } u = 0, \quad q = -\nabla v_l, \quad \mathbf{r} = -\Delta v_l,$$

and the transformation $x = \tau(x^*)$ where $x^* = (\tilde{r}, \alpha, \vartheta)$. The invariance of the equation gives

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q^* &= \mathbf{r}^* \quad \text{with } u^* = 0, \\ \text{if } q \circ \tau &= \frac{1}{J} D\tau q^*, \quad \mathbf{r} \circ \tau = \frac{1}{J} \mathbf{r}^*, \quad J = \det D\tau. \end{aligned}$$

Now $v_l \circ \tau = \tilde{v}_l$ and this implies

$$\begin{aligned} \partial_j \tilde{v}_l &= \sum_i \tau_{i'j} (\partial_i v_l) \circ \tau = - \sum_i \tau_{i'j} q_i \circ \tau = - \frac{1}{J} \sum_{ik} \tau_{i'j} \tau_{i'k} q_k^* \\ &= - \frac{1}{J} \sum_k c_{jk} q_k^* \quad \text{with } c_{jk} := \sum_i \tau_{i'j} \tau_{i'k} = \tau_{i'j} \bullet \tau_{i'k}. \end{aligned}$$

⁶ Auch unter den Namen “Kugelkoordinaten” oder “sphärische Koordinaten” bekannt

Then, if

$$\tau'_{j \bullet} \tau'_{k \bullet} = \lambda_j \delta_{jk}, \quad (\text{IV8.7})$$

this implies $-q_j^* = \frac{J}{\lambda_j} \partial_j \tilde{v}_l$, hence the differential equation

$$\begin{aligned} J(\Delta v_l) \circ \tau &= -J \mathbf{r} \circ \tau = -\mathbf{r}^* = -\operatorname{div} q^* = \sum_j \partial_j \left(\frac{J}{\lambda_j} \partial_j \tilde{v}_l \right) \\ &= \partial_{\tilde{r}} \left(\frac{J}{\lambda_1} \partial_{\tilde{r}} \tilde{v}_l \right) + \partial_\alpha \left(\frac{J}{\lambda_2} \partial_\alpha \tilde{v}_l \right) + \partial_\vartheta \left(\frac{J}{\lambda_3} \partial_\vartheta \tilde{v}_l \right). \end{aligned}$$

Here $J = \det D\tau = \tilde{r}^2 \sin \alpha > 0$ and (IV8.7) is satisfied with

$$\lambda_1 = |\tau'_{11}|^2 = 1, \quad \lambda_2 = |\tau'_{12}|^2 = \tilde{r}^2, \quad \lambda_3 = |\tau'_{13}|^2 = \tilde{r}^2 \sin^2 \alpha.$$

(Remark: The classical alternative is a proof by direct computation.) □

8.4 J. Serrin: “The Swirling Vortex”. Wir betrachten stationäre Lösungen der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung in

$$\{x \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0 \text{ und } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > 0\}$$

von der Form

$$v(x) = \frac{G(s)}{r} \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \frac{F(s)}{r} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\Omega(s)}{r} \mathbf{e}_\vartheta$$

mit Polarkoordinaten $(\tilde{r}, \alpha, \vartheta)$ (siehe (IV8.6)) und

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \tilde{r} \sin \alpha, \quad s = \cos \alpha.$$

Hierbei seien F, G und Ω beschränkte Funktionen. Es gilt:

(1) For the gradient of the velocity

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{r}} v &= -\frac{G}{\tilde{r}r} \mathbf{e}_{\tilde{r}} - \frac{F}{\tilde{r}r} \mathbf{e}_\alpha - \frac{\Omega}{\tilde{r}r} \mathbf{e}_\vartheta, \\ \partial_\alpha v &= \left(\partial_\alpha \left(\frac{G}{r} \right) - \frac{F}{r} \right) \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \left(\partial_\alpha \left(\frac{F}{r} \right) + \frac{G}{r} \right) \mathbf{e}_\alpha + \partial_\alpha \left(\frac{\Omega}{r} \right) \mathbf{e}_\vartheta, \\ \partial_\vartheta v &= -\frac{\Omega \sin \alpha}{r} \mathbf{e}_{\tilde{r}} - \frac{\Omega \cos \alpha}{r} \mathbf{e}_\alpha + \left(\frac{G \sin \alpha}{r} + \frac{F \cos \alpha}{r} \right) \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

(2) Die Randbedingung $v = 0$ auf $\{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0, \tilde{r} > 0\}$ ist erfüllt, wenn

$$G(s) \rightarrow 0, \quad F(s) \rightarrow 0, \quad \Omega(s) \rightarrow 0 \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

(3) Es gilt die Massenerhaltung in $\{x \in \mathbb{R}^3; r > 0, x_3 > 0\}$ falls

$$G(\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot F'(\cos \alpha).$$

(4) Die inkompressible Navier-Stokes Gleichung in $\{x \in \mathbb{R}^3; r > 0, x_3 > 0\}$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} FF'' + F'^2 + (F^2 + \Omega^2)\operatorname{cosec}^2 \alpha &= \frac{\tilde{r}^3}{\varrho_0} \partial_{\tilde{r}} p - \frac{a}{\varrho_0} (F''' \sin^2 \alpha - 2F'' \cos \alpha), \\ FF' + (F^2 + \Omega^2) \cot \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{\tilde{r}^2 \sin \alpha}{\varrho_0} \partial_{\alpha} p + \frac{a}{\varrho_0} F'' \sin^2 \alpha, \\ F\Omega' &= \frac{\tilde{r}^2}{\varrho_0} \partial_{\vartheta} p - \frac{a}{\varrho_0} \Omega'' \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Referenz: Siehe Serrin [63, Chap I. Formulation of the problem, 1. Basic equations]. See also the rest of the paper of [63] and the exercise in [21, “The swirling vortex”].

Beweis (1). The definition of \tilde{v} is

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\tilde{r}, \alpha, \vartheta) &= \frac{G(s)}{r} \mathbf{e}_{\tilde{r}}(\alpha, \vartheta) + \frac{F(s)}{r} \mathbf{e}_{\alpha}(\alpha, \vartheta) + \frac{\Omega(s)}{r} \mathbf{e}_{\vartheta}(\vartheta), \\ r &= \tilde{r} \sin \alpha, \quad s = \cos \alpha. \end{aligned}$$

This implies

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{r}} \tilde{v} &= -\frac{1}{\tilde{r}} \tilde{v}, \\ \partial_{\alpha} \tilde{v} &= \partial_{\alpha} \left(\frac{G}{r} \right) \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \partial_{\alpha} \left(\frac{F}{r} \right) \mathbf{e}_{\alpha} + \partial_{\alpha} \left(\frac{\Omega}{r} \right) \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{G}{r} \partial_{\alpha} \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \frac{F}{r} \partial_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \\ &= \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{G}{r} \right) - \frac{F}{r} \right) \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{F}{r} \right) + \frac{G}{r} \right) \mathbf{e}_{\alpha} + \partial_{\alpha} \left(\frac{\Omega}{r} \right) \mathbf{e}_{\vartheta}, \\ \partial_{\vartheta} \tilde{v} &= \frac{G}{r} \partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \frac{F}{r} \partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{\Omega}{r} \partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta}, \\ &= -\frac{\Omega \sin \alpha}{r} \mathbf{e}_{\tilde{r}} - \frac{\Omega \cos \alpha}{r} \mathbf{e}_{\alpha} + \left(\frac{G \sin \alpha}{r} + \frac{F \cos \alpha}{r} \right) \mathbf{e}_{\vartheta}. \end{aligned}$$

In the following proofs we do not write \tilde{v} and \tilde{p} . □

Beweis (2). Ist offensichtlich. □

Beweis (3). We compute using (1)

$$\begin{aligned} 0 &= (\operatorname{div} v) \circ \tau = (\mathbf{e}_{\tilde{r}} \bullet \partial_{\mathbf{e}_{\tilde{r}}} v + \mathbf{e}_{\alpha} \bullet \partial_{\mathbf{e}_{\alpha}} v + \mathbf{e}_{\vartheta} \bullet \partial_{\mathbf{e}_{\vartheta}} v) \\ &= \mathbf{e}_{\tilde{r}} \bullet \partial_{\tilde{r}} v + \frac{1}{\tilde{r}} \mathbf{e}_{\alpha} \bullet \partial_{\alpha} v + \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\vartheta} \bullet \partial_{\vartheta} v \\ &= -\frac{G}{\tilde{r}r} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{F}{r} \right) + \frac{G}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{G \sin \alpha}{r} + \frac{F \cos \alpha}{r} \right) \\ &= \frac{1}{\tilde{r}^2} \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{F}{\sin \alpha} \right) + \frac{G}{\sin \alpha} + \frac{F \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin \alpha} (\partial_{\alpha} F + G), \end{aligned}$$

which implies the assertion $\partial_{\alpha} F + G = 0$. □

Beweis (4). With

$$M(v) := \varrho_0 v v^T + p \text{Id} - 2a(\text{D}v)^S$$

the stationary Navier-Stokes equation reads $\text{div} v = 0$ and

$$0 = \text{div} M = \varrho_0(v \bullet \nabla)v + \nabla p - a \text{div} \text{D}v.$$

We compute the individual terms. With $p = \tilde{p}(\tilde{r}, \alpha, \vartheta)$ it is

$$\begin{aligned} \nabla p &= \partial_{\tilde{r}} p \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \partial_{\alpha} p \mathbf{e}_{\alpha} + \partial_{\vartheta} p \mathbf{e}_{\vartheta} \\ &= \partial_{\tilde{r}} p \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \partial_{\alpha} p \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{1}{r} \partial_{\vartheta} p \mathbf{e}_{\vartheta}. \end{aligned} \quad (\text{IV8.8})$$

Next we deal with the nonlinear term. Using (1) we get

$$\begin{aligned} (v \bullet \nabla)v &= v \bullet \mathbf{e}_{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} v + v \bullet \mathbf{e}_{\alpha} \partial_{\alpha} v + v \bullet \mathbf{e}_{\vartheta} \partial_{\vartheta} v \\ &= v \bullet \mathbf{e}_{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} v + \frac{v \bullet \mathbf{e}_{\alpha}}{\tilde{r}} \partial_{\alpha} v + \frac{v \bullet \mathbf{e}_{\vartheta}}{r} \partial_{\vartheta} v \\ &= \frac{G}{r} \left(-\frac{G}{\tilde{r}r} \mathbf{e}_{\tilde{r}} - \frac{F}{\tilde{r}r} \mathbf{e}_{\alpha} - \frac{\Omega}{\tilde{r}r} \mathbf{e}_{\vartheta} \right) \\ &\quad + \frac{F}{\tilde{r}r} \left(\left(\partial_{\alpha} \left(\frac{G}{r} \right) - \frac{F}{r} \right) \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{F}{r} \right) + \frac{G}{r} \right) \mathbf{e}_{\alpha} + \partial_{\alpha} \left(\frac{\Omega}{r} \right) \mathbf{e}_{\vartheta} \right) \\ &\quad + \frac{\Omega}{r^2} \left(-\frac{\Omega \sin \alpha}{r} \mathbf{e}_{\tilde{r}} - \frac{\Omega \cos \alpha}{r} \mathbf{e}_{\alpha} + \left(\frac{G \sin \alpha}{r} + \frac{F \cos \alpha}{r} \right) \mathbf{e}_{\vartheta} \right) \\ &= \left(-\frac{G^2}{\tilde{r}r^2} + \frac{F}{\tilde{r}r} \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{G}{r} \right) - \frac{F}{r} \right) - \frac{\Omega^2}{r^3} \sin \alpha \right) \mathbf{e}_{\tilde{r}} \\ &\quad + \left(-\frac{GF}{\tilde{r}r^2} + \frac{F}{\tilde{r}r} \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{F}{r} \right) + \frac{G}{r} \right) - \frac{\Omega^2}{r^3} \cos \alpha \right) \mathbf{e}_{\alpha} \\ &\quad + \left(-\frac{G\Omega}{\tilde{r}r^2} + \frac{F}{\tilde{r}r} \partial_{\alpha} \left(\frac{\Omega}{r} \right) + \frac{\Omega}{r^3} (G \sin \alpha + F \cos \alpha) \right) \mathbf{e}_{\vartheta}. \end{aligned} \quad (\text{IV8.9})$$

Now we treat the viscous term. Using 8.3 we have the following representation for the Laplace operator in polar coordinates

$$\begin{aligned}
\tilde{r}r(\operatorname{div}Dv)\circ\tau &= \partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}^2\sin\alpha\partial_{\tilde{r}}v) + \partial_{\alpha}(\sin\alpha\partial_{\alpha}v) + \partial_{\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\partial_{\vartheta}v\right) \\
&= \partial_{\tilde{r}}(-G\mathbf{e}_{\tilde{r}} - F\mathbf{e}_{\alpha} - \Omega\mathbf{e}_{\vartheta}) \\
&+ \partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{G}{r}\right) - \frac{F}{r}\right)\mathbf{e}_{\tilde{r}} + \sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{F}{r}\right) + \frac{G}{r}\right)\mathbf{e}_{\alpha} + \sin\alpha\partial_{\alpha}\left(\frac{\Omega}{r}\right)\mathbf{e}_{\vartheta}\right) \\
&+ \partial_{\vartheta}\left(-\frac{\Omega}{r}\mathbf{e}_{\tilde{r}} - \frac{\Omega\cot\alpha}{r}\mathbf{e}_{\alpha} + \left(\frac{G}{r} + \frac{F\cot\alpha}{r}\right)\mathbf{e}_{\vartheta}\right) \\
&= \partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{G}{r}\right) - \frac{F}{r}\right)\right)\mathbf{e}_{\tilde{r}} + \partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{F}{r}\right) + \frac{G}{r}\right)\right)\mathbf{e}_{\alpha} \\
&\qquad\qquad\qquad + \partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\cdot\partial_{\alpha}\left(\frac{\Omega}{r}\right)\right)\mathbf{e}_{\vartheta} \\
&+ \sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{G}{r}\right) - \frac{F}{r}\right)\partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\tilde{r}} + \sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{F}{r}\right) + \frac{G}{r}\right)\partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} \\
&\qquad\qquad\qquad (\partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\tilde{r}} = \mathbf{e}_{\alpha}, \partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} = -\mathbf{e}_{\tilde{r}}, \partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\vartheta} = 0) \\
&- \frac{\Omega}{r}\partial_{\vartheta}\mathbf{e}_{\tilde{r}} - \frac{\Omega\cot\alpha}{r}\partial_{\vartheta}\mathbf{e}_{\alpha} + \left(\frac{G}{r} + \frac{F\cot\alpha}{r}\right)\partial_{\vartheta}\mathbf{e}_{\vartheta} \\
&\qquad\qquad\qquad (\partial_{\vartheta}\mathbf{e}_{\tilde{r}} = \sin\alpha\mathbf{e}_{\vartheta}, \partial_{\vartheta}\mathbf{e}_{\alpha} = \cos\alpha\mathbf{e}_{\vartheta}, \partial_{\vartheta}\mathbf{e}_{\vartheta} = -\sin\alpha\mathbf{e}_{\tilde{r}} - \cos\alpha\mathbf{e}_{\alpha}) \\
&= \left(\partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{G}{r}\right) - \frac{F}{r}\right)\right) - \sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{F}{r}\right) + \frac{G}{r}\right) - \sin\alpha\left(\frac{G}{r} + \frac{F\cot\alpha}{r}\right)\right)\mathbf{e}_{\tilde{r}} \\
&+ \left(\partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{F}{r}\right) + \frac{G}{r}\right)\right) + \sin\alpha\left(\partial_{\alpha}\left(\frac{G}{r}\right) - \frac{F}{r}\right) - \cos\alpha\left(\frac{G}{r} + \frac{F\cot\alpha}{r}\right)\right)\mathbf{e}_{\alpha} \\
&+ \left(\partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\partial_{\alpha}\left(\frac{\Omega}{r}\right)\right) - \frac{\Omega}{r\sin\alpha}\right)\mathbf{e}_{\vartheta}.
\end{aligned}$$

Now one computes

$$\partial_{\alpha}\left(\sin\alpha\partial_{\alpha}\left(\frac{\Omega}{r}\right)\right) - \frac{\Omega}{r\sin\alpha} = \frac{\Omega''\sin^2\alpha}{\tilde{r}}$$

and (after some computation) using the mass conservation $G = \sin\alpha \cdot F'$

$$\begin{aligned}
A &:= \partial_{\alpha}\left(\frac{F}{r}\right) + \frac{G}{r} = -\frac{1}{\tilde{r}}\frac{F\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
B &:= \partial_{\alpha}\left(\frac{G}{r}\right) - \frac{F}{r} = -\frac{1}{\tilde{r}}\left(F''\sin\alpha + \frac{F}{\sin\alpha}\right) \\
E &:= \frac{G}{r} + \frac{F\cot\alpha}{r} = \frac{1}{\tilde{r}}\left(F' + \frac{F\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right) \\
\partial_{\alpha}(\sin\alpha \cdot B) - \sin\alpha \cdot A - \sin\alpha \cdot E &= \frac{1}{\tilde{r}}\left(F''' \sin^2\alpha - F''\partial_{\alpha}(\sin^2\alpha)\right) \\
\partial_{\alpha}(\sin\alpha \cdot A) + \sin\alpha \cdot B - \cos\alpha \cdot E &= -\frac{1}{\tilde{r}}F''\sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

Altogether this gives

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}Dv)\circ\tau &= \frac{1}{\tilde{r}r}\left(\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}^2\sin\alpha\partial_{\tilde{r}}v) + \partial_{\alpha}(\sin\alpha\partial_{\alpha}v) + \partial_{\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\partial_{\vartheta}v\right)\right) \\
&= \frac{1}{\tilde{r}^3}\left((F''' \sin^2\alpha - 2F''\cos\alpha)\mathbf{e}_{\tilde{r}} - F''\sin\alpha\mathbf{e}_{\alpha} + \Omega''\sin\alpha\mathbf{e}_{\vartheta}\right).
\end{aligned}$$

We do the same for the $(v \bullet \nabla)v$ -term to get

$$\begin{aligned} -\frac{G^2}{\tilde{r}r^2} + \frac{F}{\tilde{r}r}B - \frac{\Omega^2}{r^3}\sin\alpha &= -\frac{1}{\tilde{r}^3}\left(F'^2 + F''F + \frac{F^2 + \Omega^2}{\sin^2\alpha}\right), \\ -\frac{GF}{\tilde{r}r^2} + \frac{F}{\tilde{r}r}A - \frac{\Omega^2}{r^3}\cos\alpha &= -\frac{1}{\tilde{r}^3}\left(\frac{F'F}{\sin\alpha} + \frac{(F^2 + \Omega^2)\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right), \\ -\frac{G\Omega}{\tilde{r}r^2} + \frac{F}{\tilde{r}r}\partial_\alpha\left(\frac{\Omega}{r}\right) + \frac{\Omega}{r^3}(G\sin\alpha + F\cos\alpha) &= -\frac{\Omega'F}{\tilde{r}^3\sin\alpha}. \end{aligned}$$

With this we finally add all terms of M and obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{r}^3(\operatorname{div}M) \circ \tau \\ &= -\varrho_0\left(\left(F'^2 + F''F + \frac{F^2 + \Omega^2}{\sin^2\alpha}\right)\mathbf{e}_{\tilde{r}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{F'F}{\sin\alpha} + \frac{(F^2 + \Omega^2)\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right)\mathbf{e}_\alpha + \frac{\Omega'F}{\sin\alpha}\mathbf{e}_\vartheta\right) \quad (\text{IV8.10}) \\ &\quad + \tilde{r}^2\left(\tilde{r}\partial_{\tilde{r}}p\mathbf{e}_{\tilde{r}} + \partial_\alpha p\mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial_\vartheta p}{\sin\alpha}\mathbf{e}_\vartheta\right) \\ &\quad - a\left((F'''\sin^2\alpha - 2F''\cos\alpha)\mathbf{e}_{\tilde{r}} - F''\sin\alpha\mathbf{e}_\alpha + \Omega''\sin\alpha\mathbf{e}_\vartheta\right). \end{aligned}$$

We only have to collect now the terms in the $\mathbf{e}_{\tilde{r}}$, in the \mathbf{e}_α , and the \mathbf{e}_ϑ directions to achieve the three equations in the assertion ($\operatorname{cosec}\alpha := (\sin\alpha)^{-1}$ and the second and third equation is multiplied by $\sin\alpha$). \square

Bei der Funktion v handelt es sich um einen vr -Wirbel mit der positiven x_3 -Achse als Singularität. Über den Druck gilt folgende Aussage, die man vergleichen kann mit dem Druck des freien vr -Wirbels in (IV8.5).

8.5 The pressure. From the equations in 8.4(4) we conclude that

$$p = \tilde{p}(\tilde{r}, \alpha, \vartheta) = \frac{\pi(\cos\alpha)}{\tilde{r}^2\sin^2\alpha} = \frac{\pi}{r^2}$$

where $s \mapsto \pi(s)$ is the reduced pressure with finite value $\pi(0)$. Here the pressure p is normalized to be 0 at infinity.

The pressure on the ground is

$$p = \frac{\pi(0)}{\tilde{r}} \text{ on } \{x; \tilde{r} > 0, x_3 = 0\},$$

und nahe der Singularität $\{x; \tilde{r} > 0, r = 0\}$ erfüllt der Druck

$$\partial_\alpha p = -\frac{a}{\tilde{r}^2}F''\sin\alpha + \frac{\varrho_0}{\tilde{r}^2}\left(\frac{F'F}{\sin\alpha} + \frac{(F^2 + \Omega^2)\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right).$$

Da hier die Randbedingung $v = 0$ gewählt wurde, ist die dargestellte Lösung realistisch besonders nahe des Bodens.



Abb. 27: “Tornado at Elbow Lake, Minnesota, 5 September 1969 (Photograph by Olaf Dybdal)” from [63]

Beweis. Wir betrachten die Funktionen in $\{x; \tilde{r} > 0, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\}$ und nehmen an, dass $p = \tilde{p}(\tilde{r}, \alpha, \vartheta)$. Nach der zweiten Gleichung in 8.4(4) ist

$$\partial_{\alpha}(\tilde{r}^2 p) = \tilde{r}^2 \partial_{\alpha} p = \text{fcn}_2(\alpha)$$

daher

$$\tilde{r}^2 p = \text{fcn}(\alpha) + \text{fcn}_0(\tilde{r}, \vartheta).$$

Die dritte Gleichung in 8.4(4) besagt

$$\text{fcn}_3(\alpha) = \tilde{r}^2 \partial_{\vartheta} p = \partial_{\vartheta}(\tilde{r}^2 p) = \partial_{\vartheta} \text{fcn}_0.$$

Now $\partial_{\vartheta} \text{fcn}_0$ is independent of α , so that $\partial_{\vartheta}(\tilde{r}^2 p) = \text{con}_3$, a constant. We conclude that $\tilde{r}^2 p$ is linear in ϑ , but is 2π -periodic in ϑ , hence it is independent of ϑ . Therefore $\text{fcn}_0 = \text{fcn}_0(\tilde{r})$, so that

$$p = \frac{\text{fcn}(\alpha) + \text{fcn}_0(\tilde{r})}{\tilde{r}^2}.$$

Let us use the first equation in 8.4(4) which means

$$\text{fcn}_1(\alpha) = \tilde{r}^3 \partial_{\tilde{r}} p = -2\text{fcn}(\alpha) - 2\text{fcn}_0(\tilde{r}) + \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} \text{fcn}_0(\tilde{r})$$

which says that $\tilde{r} \partial_{\tilde{r}} \text{fcn}_0(\tilde{r}) - 2\text{fcn}_0(\tilde{r})$ is independent of \tilde{r} and this is equivalent to

$$\text{fcn}_0(\tilde{r}) = \text{con}_0 \tilde{r}^2 + c_0$$

with constants con_0 and c_0 . Thus we obtain for p

$$p = \frac{\text{fcn}(\alpha) + c_0}{\tilde{r}^2} + \text{con}_0.$$

If we normalize p by 0 at infinity and define $\pi := (\text{fcn}(\alpha) + c_0) \sin^2 \alpha$, we get the assertion. \square

Die Strömung entwickelt eine Singularität an der positiven x_3 -Achse. Im Gegensatz zu 8.2 wurde in 8.4 diese Singularität in den Differentialgleichungen ausgespart. Wir holen das nach in [21, “The swirling vortex”]. Eine Lösung mittels kompressibler Navier-Stokes Gleichung wird eine Approximation des hier beschriebenen singulären Verhaltens sein.

9 Fraktionierung

Wir betrachten eine Mischung von verschiedenen Flüssigkeiten mit der Eigenschaft, dass die Anziehungskräfte der Moleküle derselben Sorte der Mischung dominant ist. Dann erfordert diese Mischung mehrere Impulsbilanzen, und zwar eine für jede einzelne Komponente. Wenn ϱ_α die Dichte der α -ten Komponente der Mischung und v_α deren Geschwindigkeit ist, ist der allgemeine Ansatz der Massen- und Impulsbilanzen (see [II.3.13](#))

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha + \mathbf{J}_\alpha) &= \mathbf{r}_\alpha, \\ \partial_t(\varrho_\alpha v_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha v_\alpha^\top + v_\alpha \mathbf{J}_\alpha^\top + \Pi_\alpha) &= \tilde{\mathbf{f}}_\alpha, \\ \tilde{\mathbf{f}}_\alpha &:= \mathbf{r}_\alpha v_\alpha + Dv_\alpha \mathbf{J}_\alpha + \mathbf{f}_\alpha \end{aligned} \quad (\text{IV9.1})$$

für $\alpha = 1, \dots, m$, where the representation for $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha$ is from [\(II3.17\)](#). Hierbei ist m die Anzahl der Komponenten. Neben den Scheinkräften wird hierbei \mathbf{f}_α hauptsächlich aus der Schwerkraft bestehen, und Π_α sind zunächst beliebige, auch nichtsymmetrische, Matrizen (siehe [9.2](#)). Darüberhinaus gibt es noch eine Gleichung für die (totale) Energie e , die weiter unten hergeleitet wird.

Das System [\(IV9.1\)](#) wurde schon in [\(III3.9\)](#) als Mischung der Klasse II dargestellt, also ist in der Massenerhaltung

$$\varrho_\alpha v_\alpha + \mathbf{J}_\alpha = \varrho_\alpha v + (\varrho_\alpha u_\alpha + \mathbf{J}_\alpha)$$

gegeben, wobei die objektiven Vektoren $\varrho_\alpha u_\alpha$ und \mathbf{J}_α die relative Bewegung und die Diffusion der Spezies α beschreiben. Wir wollen in diesem Abschnitt systematisch die Energiegleichung und die Residualungleichung, welche aus dem Entropieprinzip folgt, herleiten. Wir kommen somit zu Bedingungen, welche die Terme \mathbf{J}^α und Π^α sowie \mathbf{r}^α und \mathbf{f}^α für verschiedene Komponenten α miteinander koppeln. Wir können also entgeltig sagen, dass die Gleichungen des Systems wie vermutet voneinander abhängen.

Referenzen: The mixture theory has been originally described in two papers by Green & Naghdi [\[107\]](#) and I.Müller [\[117\]](#), where “each used a different entropy inequality” [\[27, 1.7. Comments on the Formulation of Mixture Theories\]](#). For the non-uniqueness of the entropy principle, which is meant here, we make the statement [9.8](#), and we use in the case that there is no diffusion an entropy flux which was already proposed by Clausius-Duhem, see below [9.6](#). Later publications, all following the I.Müller paper, you find in I.Müller [\[87, 6 Thermodynamics of Mixtures of Non-viscous Fluids\]](#) where also shortly the history is addressed, and in Hutter & Jöhnk [\[47, 7 Theory of Mixtures\]](#) where the different classes of a mixture are introduced. Both & Dreyer give in [\[26\]](#) a detailed theory of the mixture problem. All these publications are based on the fact that $\mathbf{J}_\alpha = \varrho_\alpha u_\alpha$ is meant.

Define the total mass density and the mean velocity (this is III.3.1(1)) by

$$\varrho := \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha}, \quad v := \frac{1}{\varrho} \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} v_{\alpha}, \quad \varrho > 0, \quad (\text{IV9.2})$$

and the “relative velocities” (these are objective vectors) by

$$u_{\alpha} := v_{\alpha} - v \quad \text{so that} \quad \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} u_{\alpha} = 0, \quad (\text{IV9.3})$$

which follows from the definitions of ϱ and v in (IV9.2)

$$\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} u_{\alpha} = \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} (v_{\alpha} - v) = \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} v_{\alpha} - \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \right) v = 0.$$

With these definitions we obtain

9.1 Total mass-momentum system. Define

$$\mathbf{J} := \sum_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}, \quad \mathbf{r} := \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}, \quad \tilde{\mathbf{f}} := \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha}.$$

Then as sum of the individual balance laws one gets

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^{\mathbf{T}} + v \mathbf{J}^{\mathbf{T}} + \Pi_{mix}) &= \tilde{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (\text{IV9.4})$$

where

$$\begin{aligned} \Pi_{mix} &:= \sum_{\alpha} (\varrho_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}^{\mathbf{T}} + u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}^{\mathbf{T}} + \Pi_{\alpha}), \\ \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{r}v + Dv\mathbf{J} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} := \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} u_{\alpha} + Du_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{IV9.5})$$

Beweis. Since u_{α} satisfy (IV9.3) we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} v_{\alpha} v_{\alpha}^{\mathbf{T}} &= \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} (v + u_{\alpha}) (v + u_{\alpha})^{\mathbf{T}} \\ &= \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} v v^{\mathbf{T}} + \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}^{\mathbf{T}} = \varrho v v^{\mathbf{T}} + \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}^{\mathbf{T}} \end{aligned}$$

and therefore

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha} (\varrho_{\alpha} v_{\alpha} v_{\alpha}^{\mathbf{T}} + v_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}^{\mathbf{T}} + \Pi_{\alpha}) \\ &= \varrho v v^{\mathbf{T}} + \sum_{\alpha} (\varrho_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}^{\mathbf{T}} + (v + u_{\alpha}) \mathbf{J}_{\alpha}^{\mathbf{T}} + \Pi_{\alpha}) \\ &= \varrho v v^{\mathbf{T}} + v \mathbf{J}^{\mathbf{T}} + \Pi_{mix}, \end{aligned}$$

if the matrix Π_{mix} is defined as in the statement. Moreover

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}} &= \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} v_{\alpha} + Dv_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} v + Dv \mathbf{J}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} u_{\alpha} + Du_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\alpha}) \\ &= \mathbf{r}v + Dv\mathbf{J} + \mathbf{f} \end{aligned}$$

if the force \mathbf{f} is defined as in the statement. Thus the formula for the momentum balance follows. \square

9.2 Symmetry of Π . Assume $\Pi_\alpha = \Pi_\alpha^{sym} + \Pi_\alpha^{rest}$ and

$$\Pi_{mix} = \underbrace{\sum_\alpha (\rho_\alpha u_\alpha u_\alpha^T + \Pi_\alpha^{sym})}_{=: \Pi_{mix}^{sym}} + \underbrace{\sum_\alpha (u_\alpha \mathbf{J}_\alpha^T + \Pi_\alpha^{rest})}_{=: \Pi_{mix}^{rest}}$$

with a symmetric part Π_α^{sym} and a rest Π_α^{rest} , both objective tensors. Such a splitting is performed in II.3.13. *Hinweis:* Falls $\mathbf{J}_\alpha = 0$ kann Π_α und dann auch Π_{mix} als symmetrisch angenommen werden.

In addition to the mass-momentum equations in (IV9.1) we now assume for the mixture a total energy equation

$$\begin{aligned} \partial_t e + \operatorname{div} \tilde{q} &= \tilde{g}, \quad e := \varepsilon_{mix} + \frac{\rho}{2} |v|^2, \\ \tilde{q} &= ev + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J} + \Pi_{mix}^T v + q_{mix}, \\ \tilde{g} &= \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet Dv \mathbf{J} + v \bullet \mathbf{f} + Dv \bullet \Pi_{mix}^{rest} + g, \end{aligned} \quad (\text{IV9.6})$$

subject to the condition that this energy equation together with the total mass-momentum equation (IV9.4) is a mass-momentum-energy system as in II.3.13. In particular it follows that ε_{mix} and g are objective scalars and q_{mix} an objective vector. Eventually, we want the objective scalar g set to 0 in order to satisfy the total energy conservation.

Hypothetische Energiegleichung

But now we ask the question, what should be the constitutive relation of these quantities ε_{mix} and q_{mix} in the energy equation? As answer we write down the (hypothetical) energy balance of the phase α and treat the sum of these equations as total energy equation. This is an idea going back to Truesdell [122], see I.Müller [87, 3.2.2.7 Metaphysical principles] and the text in Hutter & Jöhnk [47, 7.1 General Introduction], also see Case III in section III.3. We follow this procedure. That is, we state the equation

$$\begin{aligned} \partial_t e_\alpha + \operatorname{div} \tilde{q}_\alpha &= \tilde{g}_\alpha, \\ e_\alpha &= \varepsilon_\alpha + \frac{\rho_\alpha}{2} |v_\alpha|^2, \quad \varepsilon_\alpha \text{ objective scalar}, \\ \tilde{q}_\alpha &= e_\alpha v_\alpha + \frac{1}{2} |v_\alpha|^2 \mathbf{J}_\alpha + \Pi_\alpha^T v_\alpha + q_\alpha, \\ \tilde{g}_\alpha &= \frac{\mathbf{r}_\alpha}{2} |v_\alpha|^2 + v_\alpha \bullet Dv_\alpha \mathbf{J}_\alpha + v_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha + Dv_\alpha \bullet \Pi_\alpha^{rest} + g_\alpha, \end{aligned} \quad (\text{IV9.7})$$

where q_α is an objective vector and g_α an objective scalar. This energy equation for phase α together with the mass-momentum equation of phase α is a mass-momentum-energy system as in II.3.13. Therefore also the sum over α of these systems stays to be a mass-momentum-energy system as in II.3.13. This means that we are able to define the quantities of the total energy equation by

$$e := \sum_{\alpha} e_{\alpha}, \quad \tilde{q} := \sum_{\alpha} \tilde{q}_{\alpha}, \quad \tilde{g} := \sum_{\alpha} \tilde{g}_{\alpha}. \quad (\text{IV9.8})$$

Thus by construction these terms have the transformation properties described above and satisfy (IV9.6), where the mixing terms are as follows.

9.3 Theorem. With definitions (IV9.8) the energy equation (IV9.6) is satisfied with

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mix} &= \sum_{\alpha} \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}, \\ q_{mix} &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 u_{\alpha} + \frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T u_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha} u_{\alpha} + q_{\alpha}), \\ g &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet \mathbf{D}u_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + \mathbf{D}u_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g_{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Beweis. For e we have by definition, since $v_{\alpha} = v + u_{\alpha}$,

$$\begin{aligned} e &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left(\varepsilon_{\alpha} + \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |v + u_{\alpha}|^2 \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\varepsilon_{\alpha} + \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |v|^2 + \varrho_{\alpha} u_{\alpha} \bullet v + \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 \right) \\ &= \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} + \frac{\varrho}{2} |v|^2 + \sum_{\alpha} \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2, \end{aligned}$$

also

$$e_{mix} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2.$$

Next we have for \tilde{q}

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \sum_{\alpha} \tilde{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left(e_{\alpha} v_{\alpha} + \frac{1}{2} |v_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T v_{\alpha} + q_{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left(e_{\alpha} (v + u_{\alpha}) + \frac{1}{2} |v + u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \left(\Pi_{\alpha}^T (v + u_{\alpha}) + q_{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left(e_{\alpha} v + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \left(e_{\alpha} u_{\alpha} + (v \bullet u_{\alpha}) \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T v \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T u_{\alpha} + q_{\alpha} \right), \end{aligned}$$

Now using the identity of e_α in (IV9.7)

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} e_{\alpha} u_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} u_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |v + u_{\alpha}|^2 u_{\alpha} \\ &= \underbrace{\sum_{\alpha} \frac{1}{2} |v|^2 \varrho_{\alpha} u_{\alpha}}_{=0} + \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} (v \bullet u_{\alpha}) u_{\alpha} + \sum_{\alpha} \left(\varepsilon_{\alpha} + \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 \right) u_{\alpha},\end{aligned}$$

it follows that \tilde{q} equals

$$\begin{aligned}&= \sum_{\alpha} \left(e_{\alpha} v + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \left(\varrho_{\alpha} (v \bullet u_{\alpha}) u_{\alpha} + (v \bullet u_{\alpha}) \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T v \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha} \left(\left(\varepsilon_{\alpha} + \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 \right) u_{\alpha} + \frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T u_{\alpha} + q_{\alpha} \right) \\ &= e v + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J} + \Pi_{mix}^T v \\ &\quad + \sum_{\alpha} \left(\frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 u_{\alpha} + \frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T u_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha} u_{\alpha} + q_{\alpha}),\end{aligned}$$

also

$$q_{mix} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 u_{\alpha} + \frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T u_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha} u_{\alpha} + q_{\alpha}).$$

For the right side we get since $\mathbf{f} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} u_{\alpha} + D u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}$ by (IV9.5) and writing $v_{\alpha} = v + u_{\alpha}$

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \sum_{\alpha} \tilde{g}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 + v_{\alpha} \bullet D v_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + v_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + D v_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g_{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |v|^2 + \mathbf{r}_{\alpha} v \bullet u_{\alpha} + v \bullet D v \mathbf{J}_{\alpha} + v \bullet D u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + v \bullet \mathbf{f}_{\alpha} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet D v \mathbf{J}_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet D u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + D v_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g_{\alpha} \right) \\ &= \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet D v \mathbf{J} + v \bullet \mathbf{f} + \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet D v \mathbf{J}_{\alpha} \\ &\quad + \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet D u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + D v_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g_{\alpha} \right),\end{aligned}$$

Since by 9.2

$$D v \bullet \Pi_{mix}^{rest} = \sum_{\alpha} D v \bullet (u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}^T + \Pi_{\alpha}^{rest}) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet D v \mathbf{J}_{\alpha} + \sum_{\alpha} D v \bullet \Pi_{\alpha}^{rest}$$

it follows again since $v_{\alpha} = v + u_{\alpha}$

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet D v \mathbf{J} + v \bullet \mathbf{f} + D v \bullet \Pi_{mix}^{rest} + g, \\ g &:= \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet D u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} - D v \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + D v_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g_{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet D u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + D u_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g_{\alpha} \right).\end{aligned}$$

The assertion follows. \square

Thus we have derived, as wanted, a total energy equation, but with one essential exception: The last terms of ε_{mix} and q_{mix} contain quantities which are known only in this derivation and not in the original mixture system. Therefore we define

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}, \quad q := \sum_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha} u_{\alpha} + q_{\alpha}), \\ g &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet Du_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + Du_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g_{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (\text{IV9.9})$$

and one can understand this definition as the fact that mixtures of Case III are also mixtures of Case II. For us it is important that replacing the terms ε_{α} , q_{α} and g_{α} in 9.3 by ε , q and g defined in (IV9.9), we obtain an equation which is relevant for the Case II mixture. Therefore in the following we take ε and q as independent variables, and forget about (IV9.9).

References: The equation in 9.3, resp. (IV9.10), of different internal energies one also finds in DeGroot & Mazur [6, Chap.III §4], in Hutter & Jöhnk [47, Theory of mixtures (7.6.15)], and in Bothe & Dreyer [26, Mixture balances, after (19)]. In [26, eq.(38)] the entropy is assumed to be a function of this “thermal energy” ε and the densities ϱ_{α} , as we will do in (IV9.15) and in (IV10.7).

Mischungssystem der Klasse II

We come in a sense back to the mixture problem at the beginning. In addition to the mass-momentum equations in (IV9.1) we assume for the mixture the single energy equation (IV9.6), in which we define

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mix} &:= \varepsilon + \sum_{\alpha} \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2, \\ q_{mix} &:= q + \sum_{\alpha} \left(\frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 u_{\alpha} + \frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T u_{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV9.10})$$

Hence (IV9.1) together with (IV9.6), and with the free variables ε and q in (IV9.10), describes the full mass-momentum and energy system of Case II

mixture. We write this down again

$$\begin{aligned}
 & \textbf{Mischungssystem der Klasse II:} \\
 & \partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha + \mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha, \\
 & \partial_t(\varrho_\alpha v_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha v_\alpha^\mathbf{T} + v_\alpha \mathbf{J}_\alpha^\mathbf{T} + \Pi_\alpha) = \tilde{\mathbf{f}}_\alpha, \\
 & \partial_t e + \operatorname{div} \tilde{q} = \tilde{g}, \quad e := \varepsilon_{mix} + \frac{\varrho}{2} |v|^2
 \end{aligned} \tag{IV9.11}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{f}}_\alpha & := \mathbf{r}_\alpha v_\alpha + Dv_\alpha \mathbf{J}_\alpha + \mathbf{f}_\alpha, \text{ zu } \mathbf{f} \text{ and } \tilde{\mathbf{f}} \text{ siehe (IV9.5),} \\
 \tilde{q} & = ev + \frac{1}{2} |v|^2 \mathbf{J} + \Pi_{mix}^\mathbf{T} v + q_{mix}, \\
 \tilde{g} & = \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet Dv \mathbf{J} + v \bullet \mathbf{f} + Dv \bullet \Pi_{mix}^{rest} + g,
 \end{aligned}$$

where Π_{mix} is defined in (IV9.5) and ε_{mix} and q_{mix} in (IV9.10). We want to consider the energy conservation for the total energy equation, which is represented by the objective scalar g . But before we discuss this further we first study the entropy principle

$$\sigma := \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \geq 0$$

for this system (IV9.11). The entropy will depend on the variable ε in (IV9.10). Therefore we need the following

9.4 Thermal energy equation. The energy equation of (IV9.11) can be written, modulo the other equations of (IV9.11), as an equation for the objective scalar ε

$$\begin{aligned}
 \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) & = g - \sum_\alpha Dv_\alpha \bullet \Pi_\alpha^{sym} \\
 & - \sum_\alpha \left(\frac{\mathbf{r}_\alpha}{2} |u_\alpha|^2 + u_\alpha \bullet Du_\alpha \mathbf{J}_\alpha + u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha + Du_\alpha \bullet \Pi_\alpha^{rest} \right).
 \end{aligned}$$

Here Π_α is in general antisymmetric matrix. The right-hand side of this equation is, as it should be, an objective scalar.

Bemerkung: This identity is identical with [26, Eq.(21)], and essentially identical with [60, Eq.(2.46)] (e.g. replace there velocities by relative velocities).

Beweis. It is by (IV9.10)

$$e = \varepsilon_{mix} + \frac{\varrho}{2} |v|^2 = \varepsilon + \sum_\alpha \frac{\varrho_\alpha}{2} (|u_\alpha|^2 + |v|^2) = \varepsilon + \sum_\alpha \frac{\varrho_\alpha}{2} |v_\alpha|^2.$$

The second summand satisfies the differential identity III.2.2 (follows from the mass and momentum equation)

$$\begin{aligned}
 \partial_t \left(\frac{\varrho_\alpha}{2} |v_\alpha|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\varrho_\alpha}{2} |v_\alpha|^2 v_\alpha + \frac{1}{2} |v_\alpha|^2 \mathbf{J}_\alpha + \Pi_\alpha^\mathbf{T} v_\alpha \right) \\
 = v_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha + \frac{\mathbf{r}_\alpha}{2} |v_\alpha|^2 + v_\alpha \bullet (Dv_\alpha \mathbf{J}_\alpha) + Dv_\alpha \bullet \Pi_\alpha.
 \end{aligned}$$

Subtracting this from the differential equation (IV9.6) we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\tilde{q} - \sum_{\alpha} (\frac{\rho_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 v_{\alpha} + \frac{1}{2} |v_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T v_{\alpha})) \\ = \tilde{g} - \sum_{\alpha} (\frac{1}{2} |v_{\alpha}|^2 \mathbf{r}_{\alpha} + v_{\alpha} \bullet (Dv_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}) + v_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}). \end{aligned} \quad (\text{IV9.12})$$

Since by (IV9.5)

$$\Pi_{mix} := \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}^T + u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}^T) + \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha},$$

the flux is by (IV9.11)

$$\begin{aligned} \tilde{q} - \sum_{\alpha} (\frac{\rho_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 v_{\alpha} + \frac{1}{2} |v_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T v_{\alpha}) \\ = (\varepsilon + \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2) v + \frac{1}{2} |v|^2 \sum_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{mix}^T v + q_{mix} \\ \quad - \sum_{\alpha} (\frac{\rho_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 v_{\alpha} + \frac{1}{2} |v_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} + \Pi_{\alpha}^T v_{\alpha}) \\ = \varepsilon v - \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 u_{\alpha} - \sum_{\alpha} (\frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 + v \bullet u_{\alpha}) \mathbf{J}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha}^T v_{\alpha} \\ \quad + \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} v \bullet u_{\alpha}) u_{\alpha} + \sum_{\alpha} (v \bullet u_{\alpha}) \mathbf{J}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha}^T v + q_{mix} \\ = \varepsilon v - \underbrace{\sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha}}{2} |v|^2 u_{\alpha}}_{=0} - \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 u_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{1}{2} |u_{\alpha}|^2 \mathbf{J}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha}^T u_{\alpha} + q_{mix} \\ = \varepsilon v + q \end{aligned}$$

where we have used (IV9.10) for q_{mix} . Since

$$Dv \bullet \Pi_{mix}^{rest} = \sum_{\alpha} Dv \bullet (u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}^T + \Pi_{\alpha}^{rest}) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet (Dv \mathbf{J}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} Dv \bullet \Pi_{\alpha}^{rest}$$

we obtain for the right-hand side of (IV9.12) by the formula for \tilde{g} in (IV9.11)

and since $\mathbf{f} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} u_{\alpha} + Du_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\alpha})$

$$\begin{aligned}
& \tilde{g} - \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 + v_{\alpha} \bullet (Dv_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}) + v_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha} \right) \\
&= \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet (Dv \mathbf{J}) + v \bullet \mathbf{f} + Dv \bullet \Pi_{mix}^{rest} + g \\
&\quad - \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 + v_{\alpha} \bullet (Dv_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}) + v_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |v|^2 - \frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 \right) + \sum_{\alpha} \left(v \bullet (\mathbf{r}_{\alpha} u_{\alpha} + Du_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\alpha}) - v_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} \right) \\
&\quad + \sum_{\alpha} \left(v \bullet (Dv \mathbf{J}_{\alpha}) + u_{\alpha} \bullet (Dv \mathbf{J}_{\alpha}) - v_{\alpha} \bullet (Dv_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}) \right) \\
&\quad + \sum_{\alpha} Dv \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g - \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha} \\
&= - \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet Du_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \\
&\quad + \sum_{\alpha} Dv \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} + g - \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha} \\
&= - \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + u_{\alpha} \bullet Du_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + Du_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest} \right) \\
&\quad + g - \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet (\Pi_{\alpha} - \Pi_{\alpha}^{rest}),
\end{aligned}$$

the assertion. \square

Beweis der Objektivität. It is $\sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha}$ an objective scalar since

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} \right) \circ Y = \sum_{\alpha} (u_{\alpha} \circ Y) \bullet (\mathbf{f}_{\alpha} \circ Y) \\
&= \sum_{\alpha} (Qu_{\alpha}^*) \bullet (\varrho_{\alpha}^* \ddot{X} + 2\varrho_{\alpha}^* \dot{Q}(v^* + u_{\alpha}^*)) + \sum_{\alpha} (Qu_{\alpha}^*) \bullet (Q\mathbf{f}_{\alpha}^*) \\
&= \underbrace{\left(Q \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha}^* u_{\alpha}^* \right) \bullet (\ddot{X} + 2\dot{Q}v^*)}_{=0} + 2 \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha}^* \underbrace{(Qu_{\alpha}^*) \bullet (\dot{Q}u_{\alpha}^*)}_{= Q^T \dot{Q} \bullet u_{\alpha}^* u_{\alpha}^{*T} = 0} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}^* \bullet \mathbf{f}_{\alpha}^*,
\end{aligned}$$

since $Q^T \dot{Q}$ is antisymmetric. And the functions $Du_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{rest}$ are objective scalars, since Π_{α}^{rest} is an objective tensor by 9.2, and the fact that u_{α} is an objective scalar implies that Du_{α} is an objective tensor. \square

Wir behandeln nun zunächst nichtreagierende Substanzen, zu den reagierenden siehe den nächsten Abschnitt 10.

Entropieprinzip für nichtreagierende Substanzen

We now consider the case that there is no reaction or diffusion

$$\mathbf{r}_{\alpha} = 0, \quad \mathbf{J}_{\alpha} = 0, \quad \text{hence} \quad \mathbf{f} = \sum_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}, \quad (\text{IV9.13})$$

and we assume (for simplicity) that Π_α and therefore also Π_{mix} are symmetric. In this situation the mixture system (IV9.11), with the energy equation replaced by the thermal energy equation from 9.4, reads

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha) &= 0, \\ \partial_t(\varrho_\alpha v_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha v_\alpha^\top + \Pi_\alpha) &= \mathbf{f}_\alpha, \\ \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) &= g - \sum_\alpha u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha - \sum_\alpha Dv_\alpha \bullet \Pi_\alpha,\end{aligned}\tag{IV9.14}$$

where ϱ_α , v_α , and ε are the unknown variables. We now assume that the entropy itself is a function of these variables. Therefore we have to use the following theorem.

9.5 Theorem. System (IV9.14) is equivalent to the system

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varrho}_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div}_x v_\alpha &= 0, \\ \varrho_\alpha (\overset{\circ}{v}_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla v_\alpha) + \operatorname{div}_x \Pi_\alpha &= \mathbf{f}_\alpha, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_x q &= g - \sum_\alpha u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha - \sum_\alpha Dv_\alpha \bullet \Pi_\alpha.\end{aligned}$$

Here $\overset{\circ}{h} := (\partial_t + v \bullet \nabla_x)h$ for every function h .

Beweis. The mass equation of species α is with $v_\alpha = v + u_\alpha$

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t \varrho_\alpha + v_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div}_x v_\alpha \\ &= (\partial_t + v \bullet \nabla) \varrho_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div}_x v_\alpha,\end{aligned}$$

the momentum equation

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_\alpha &= \underbrace{(\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}_x(\varrho_\alpha v_\alpha))}_{=0} v_\alpha + \varrho_\alpha (\partial_t v_\alpha + v_\alpha \bullet \nabla v_\alpha) + \operatorname{div}_x \Pi_\alpha \\ &= \varrho_\alpha (\partial_t + v \bullet \nabla) v_\alpha + \varrho_\alpha u_\alpha \bullet \nabla v_\alpha + \operatorname{div}_x \Pi_\alpha,\end{aligned}$$

and the energy equation in the form of (IV9.14) with

$$\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}_x(\varepsilon v) = (\partial_t + v \bullet \nabla) \varepsilon + \varepsilon \operatorname{div}_x v.$$

□

We have to make sure, that the entropy is an objective scalar. The simplest way to achieve this is to assume that

$$\eta = \hat{\eta}((\varrho_\beta)_\beta, \varepsilon).\tag{IV9.15}$$

Then we obtain

$$\begin{aligned}
\sigma &= \partial_t \eta + \operatorname{div}_x \psi = \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v) \\
&= \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v) \\
&= - \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} (u_{\alpha} \bullet \nabla \varrho_{\alpha} + \varrho_{\alpha} \operatorname{div}_x v_{\alpha}) - \eta'_{\varepsilon} (\varepsilon \operatorname{div}_x v + \sum_{\alpha} (u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} + Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha})) \\
&\quad + \eta'_{\varepsilon} (-\operatorname{div}_x q + g) + \eta \operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v) \\
&= (\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{div}_x v - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}_x q + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v) + \eta'_{\varepsilon} g \\
&\quad - \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} \operatorname{div}_x v_{\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha} - \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet (\eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} + \eta'_{\varepsilon} \mathbf{f}_{\alpha}) \\
&= (\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{div}_x v - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}_x q + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v) + \eta'_{\varepsilon} g \\
&\quad + \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet (-\varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi_{\alpha}) - \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet (\eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} + \eta'_{\varepsilon} \mathbf{f}_{\alpha}).
\end{aligned}$$

Because

$$v = \sum_{\alpha} c_{\alpha} v_{\alpha}, \quad c_{\alpha} := \frac{\varrho_{\alpha}}{\varrho}, \quad \sum_{\alpha} c_{\alpha} = 1, \quad (\text{IV9.16})$$

we obtain

$$Dv = \sum_{\alpha} c_{\alpha} Dv_{\alpha} + \sum_{\alpha} v_{\alpha} (\nabla c_{\alpha})^{\text{T}},$$

and, since $v_{\alpha} = v + u_{\alpha}$ and $\nabla(\sum_{\alpha} c_{\alpha}) = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} v_{\alpha} \nabla c_{\alpha}^{\text{T}} &= \underbrace{\sum_{\alpha} v (\nabla c_{\alpha})^{\text{T}}}_{=0} + \sum_{\alpha} u_{\alpha} (\nabla c_{\alpha})^{\text{T}}.
\end{aligned}$$

So we arrive at the formula

$$Dv = \sum_{\alpha} c_{\alpha} Dv_{\alpha} + \sum_{\alpha} u_{\alpha} (\nabla c_{\alpha})^{\text{T}} \quad (\text{IV9.17})$$

and consequently $\operatorname{div}_x v = \sum_{\alpha} (c_{\alpha} \operatorname{div}_x v_{\alpha} + u_{\alpha} \bullet \nabla c_{\alpha})$, a formula one finds in [26, (62)]. Plugging this in the expression for the entropy production σ we obtain

$$\begin{aligned}
\sigma &= (\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{div}_x v - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}_x q + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v) + \eta'_{\varepsilon} g \\
&+ \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet (-\varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi_{\alpha}) - \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet (\eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} + \eta'_{\varepsilon} \mathbf{f}_{\alpha}) \\
&= -\eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}_x q + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v) + \eta'_{\varepsilon} g \\
&\quad + \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet ((c_{\alpha} (\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) - \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}) \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi_{\alpha}) \\
&\quad + \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet ((\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \nabla c_{\alpha} - \eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \mathbf{f}_{\alpha}) \\
&= \operatorname{div}_x (\psi - \eta v - \eta'_{\varepsilon} q) + \eta'_{\varepsilon} g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \\
&\quad + \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} Dv_{\alpha} \bullet S_{\alpha} + \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} u_{\alpha} \bullet \tilde{s}_{\alpha}
\end{aligned} \quad (\text{IV9.18})$$

where we have performed the well known (classical) identity

$$-\eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}_x q = \operatorname{div}_x(-\eta'_{\varepsilon} q) + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q,$$

and we have defined S_{α} and \tilde{s}_{α} by

$$\begin{aligned} \eta'_{\varepsilon} \Pi_{\alpha} &= (c_{\alpha}(\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) - \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}) \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} S_{\alpha} \\ \eta'_{\varepsilon} \mathbf{f}_{\alpha} &= (\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \nabla c_{\alpha} - \eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \tilde{s}_{\alpha}. \end{aligned}$$

This we can define because the absolute temperature θ , given by

$$\frac{1}{\theta} := \eta'_{\varepsilon}((\varrho_{\beta})_{\beta}, \varepsilon) > 0,$$

is positive. Thus multiplying the definitions by θ gives

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha} &:= (c_{\alpha}(\theta \eta - \varepsilon) - \varrho_{\alpha} \theta \eta'_{\varrho_{\alpha}}) \operatorname{Id} - S_{\alpha} \\ \mathbf{f}_{\alpha} &:= (\theta \eta - \varepsilon) \nabla c_{\alpha} - \theta \eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} - \tilde{s}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{IV9.19})$$

Also since

$$\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} u_{\alpha} = 0,$$

we can define with any arbitrary vector field λ

$$\tilde{s}_{\alpha} = s_{\alpha} - c_{\alpha} \lambda$$

and obtain in the equation of the entropy production

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet \tilde{s}_{\alpha} = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet s_{\alpha}.$$

By (IV9.13) it follows

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \sum_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha} = \sum_{\alpha} ((\theta \eta - \varepsilon) \nabla c_{\alpha} - \theta \eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} - s_{\alpha}) + \sum_{\alpha} c_{\alpha} \lambda \\ &= \lambda - \sum_{\alpha} (\theta \eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} + s_{\alpha}) \end{aligned}$$

which gives λ in terms of the overall force \mathbf{f} . Thus the terms in the momentum equation become

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha} &:= (c_{\alpha}(\theta \eta - \varepsilon) - \theta \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}) \operatorname{Id} - S_{\alpha} \\ \mathbf{f}_{\alpha} &:= (\theta \eta - \varepsilon) \nabla c_{\alpha} - \theta \eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} - s_{\alpha} + c_{\alpha} \lambda \\ \lambda &:= \mathbf{f} + \sum_{\beta} (\theta \eta'_{\varrho_{\beta}} \nabla \varrho_{\beta} + s_{\beta}). \end{aligned} \quad (\text{IV9.20})$$

These are the restrictions in the system (IV9.14) which come from the entropy principle. Besides these equations there is the residual inequality

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma &= \operatorname{div}_x(\psi - \eta v - \eta'_{\varepsilon} q) + \eta'_{\varepsilon} g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \\ &\quad + \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} Dv_{\alpha} \bullet S_{\alpha} + \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} u_{\alpha} \bullet \tilde{s}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{IV9.21})$$

So far there are no other assumptions on the system (IV9.14) than the constitutive relation (IV9.15) on the entropy. Now making assumptions we obtain from the above calculations:

9.6 Theorem. For system (IV9.14) the entropy principle is satisfied for the entropy and the entropy flux

$$\eta = \widehat{\eta}((\varrho_\beta)_\beta, \varepsilon), \quad \psi := \eta v + \eta'_{\varepsilon} q,$$

if the following holds:

(1) In system (IV9.14) the identities (IV9.20) are true for Π_α and \mathbf{f}_α with symmetric tensors S_α and vector fields s_α . In the energy equation $g := 0$. The actual system you will find in (IV9.25).

(2) The functions in (IV9.14) fulfill the residual inequality

$$\sigma = \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q + \frac{1}{\theta} \sum_{\alpha} \text{D}v_{\alpha} \bullet S_{\alpha} + \frac{1}{\theta} \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet s_{\alpha} \geq 0. \quad (\text{IV9.22})$$

Important: The entropy flux ψ has the form of Clausius-Duhem.

The fact that the entropy flux is of the Clausius-Duhem form reflects the fact that it has this form for a single fluid and this here is a simple generalization to mixtures of fluids.

Beweis. See the above computation of σ resulting in the inequality (IV9.21). Then one can set $\psi = \eta v + \eta'_{\varepsilon} q$ and $g = 0$. \square

Having performed the entropy principle we can formulate the reaction-free mixture system. We do this with the free energy (it is $f = \widehat{f}((\varrho_\beta)_\beta, \theta)$)

$$f := \varepsilon - \theta \eta, \quad f'_{\theta} = -\eta, \quad f'_{\varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha}. \quad (\text{IV9.23})$$

Then the assumptions (IV9.20) read

$$\begin{aligned} f &= \widehat{f}((\varrho_\beta)_\beta, \theta), \quad \varepsilon = \widehat{\varepsilon}((\varrho_\beta)_\beta, \theta), \\ p_\alpha &:= \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} - c_\alpha f, \quad \Pi_\alpha := p_\alpha \text{Id} - S_\alpha, \\ \mathbf{f}_\alpha &:= f'_{\varrho_\alpha} \nabla \varrho_\alpha - f \nabla c_\alpha - s_\alpha + c_\alpha \lambda, \\ \lambda &:= \mathbf{f} - \sum_{\beta} (f'_{\varrho_\beta} \nabla \varrho_\beta - s_\beta), \end{aligned} \quad (\text{IV9.24})$$

and the system without reactions and with the assumptions in theorem 9.6 becomes

Nichtreagierende Mischung:

$$\begin{aligned}
\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha) &= 0, \\
\partial_t(\varrho_\alpha v_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v_\alpha v_\alpha^\top + p_\alpha \operatorname{Id} - S_\alpha) &= \mathbf{f}_\alpha, \\
\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) + \sum_\alpha p_\alpha \operatorname{div} v_\alpha &= \sum_\alpha Dv_\alpha \bullet S_\alpha - \sum_\alpha u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha
\end{aligned} \tag{IV9.25}$$

p_α and \mathbf{f}_α and ε as in (IV9.24),

q and s_α and S_α as in (IV9.22).

Here the gradient of the partial pressure ∇p_α and the partial force \mathbf{f}_α have certain common terms. Therefore these terms, because they are equal, will not contribute to the momentum equation. We show

9.7 Lemma. If for a non-reacting mixture (IV9.24) holds and

$$p_\alpha^{\text{sp}} := \frac{p_\alpha}{\varrho_\alpha}, \quad p := \sum_\alpha p_\alpha, \tag{IV9.26}$$

then for every species α

$$\nabla p_\alpha - \mathbf{f}_\alpha = \varrho_\alpha (\nabla p_\alpha^{\text{sp}} - \sum_\beta c_\beta \nabla p_\beta^{\text{sp}}) + c_\alpha (\nabla p - \mathbf{f}) + (s_\alpha - c_\alpha \sum_\beta s_\beta).$$

Beweis. We have that $p_\alpha = \varrho_\alpha p_\alpha^{\text{sp}}$ therefore

$$\nabla p_\alpha = \varrho_\alpha \nabla p_\alpha^{\text{sp}} + p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha.$$

By (IV9.24) we get for

$$p_\alpha = \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} - c_\alpha f = \varrho_\alpha \left(f'_{\varrho_\alpha} - \frac{f}{\varrho} \right)$$

that

$$p_\alpha^{\text{sp}} = f'_{\varrho_\alpha} - \frac{f}{\varrho}.$$

Now, since

$$\nabla c_\alpha = \nabla \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho} \right) = \frac{1}{\varrho} \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \nabla \left(\frac{1}{\varrho} \right) = \frac{1}{\varrho} \nabla \varrho_\alpha - \frac{c_\alpha}{\varrho} \sum_\beta \nabla \varrho_\beta,$$

we get also from (IV9.24) that

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_\alpha &= f'_{\varrho_\alpha} \nabla \varrho_\alpha - f \nabla c_\alpha - s_\alpha + c_\alpha \left(\mathbf{f} - \sum_\beta f'_{\varrho_\beta} \nabla \varrho_\beta + \sum_\beta s_\beta \right) \\
&= \left(f'_{\varrho_\alpha} - \frac{f}{\varrho} \right) \nabla \varrho_\alpha + c_\alpha \left(\mathbf{f} - \sum_\beta \left(f'_{\varrho_\beta} - \frac{f}{\varrho} \right) \nabla \varrho_\beta \right) - \left(s_\alpha - c_\alpha \sum_\beta s_\beta \right) \\
&= p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha + c_\alpha \left(\mathbf{f} - \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta \right) - \left(s_\alpha - c_\alpha \sum_\beta s_\beta \right).
\end{aligned}$$

This implies

$$\nabla p_\alpha - \mathbf{f}_\alpha = \varrho_\alpha \nabla p_\alpha^{\text{SP}} - c_\alpha \left(\mathbf{f} - \sum_\beta p_\beta^{\text{SP}} \nabla \varrho_\beta \right) + \left(s_\alpha - c_\alpha \sum_\beta s_\beta \right).$$

Now

$$\begin{aligned} \sum_\beta p_\beta^{\text{SP}} \nabla \varrho_\beta &= \nabla \left(\sum_\beta p_\beta^{\text{SP}} \varrho_\beta \right) - \sum_\beta \varrho_\beta \nabla p_\beta^{\text{SP}} \\ &= \underbrace{\sum_\beta p_\beta}_{= p} \end{aligned}$$

and $c_\alpha \varrho_\beta = \varrho_\alpha c_\beta$. Therefore we obtain

$$\nabla p_\alpha - \mathbf{f}_\alpha = \varrho_\alpha \left(\nabla p_\alpha^{\text{SP}} - \sum_\beta c_\beta \nabla p_\beta^{\text{SP}} \right) + c_\alpha (\nabla p - \mathbf{f}) + \left(s_\alpha - c_\alpha \sum_\beta s_\beta \right).$$

This is the assertion. □

By the way, the entropy inequality has no unique representation, although the answer given here is physically plausible. One should realize that a different entropy flux also implies a different momentum flux, hence it is important which entropy one takes. (Another problem with nonuniqueness of entropy one finds in section 12.)

9.8 Non uniqueness of entropy principle. We can add a term

$$0 = \sum_\alpha \left(\operatorname{div}_x (-\pi_\alpha u_\alpha) + Dv_\alpha \bullet (\tilde{\pi}_\alpha \operatorname{Id}) + u_\alpha \bullet \nabla \tilde{\pi}_\alpha \right), \quad \tilde{\pi}_\alpha := \pi_\alpha - c_\alpha \sum_\beta \pi_\beta, \quad (\text{IV9.27})$$

to the identity (IV9.18). This will lead to a family of solutions with

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha &= (c_\alpha (\theta \eta - \varepsilon) - \varrho_\alpha \theta \eta'_{\varrho_\alpha} + \theta \tilde{\pi}_\alpha) \operatorname{Id} - S_\alpha \\ \mathbf{f}_\alpha &= (\theta \eta - \varepsilon) \nabla c_\alpha - \theta \eta'_{\varrho_\alpha} \nabla \varrho_\alpha + \theta \nabla \tilde{\pi}_\alpha - \tilde{s}_\alpha \end{aligned} \quad (\text{IV9.28})$$

in place of the representation (IV9.19). The entropy flux will be

$$\psi = \eta v + \eta'_{\varepsilon} q + \sum_\alpha \pi_\alpha u_\alpha,$$

that is, the entropy flux will depend on the relative velocities.

Remark: In literature one finds $\pi_\alpha := \varrho_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha}$, which results in

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha &= c_\alpha (\theta \eta - \varepsilon - \theta \sum_\beta \varrho_\beta \eta'_{\varrho_\beta}) \operatorname{Id} - S_\alpha \\ \mathbf{f}_\alpha &= (\theta \eta - \varepsilon - \theta \sum_\beta \varrho_\beta \eta'_{\varrho_\beta}) \nabla c_\alpha + \theta \varrho_\alpha \nabla \eta'_{\varrho_\alpha} - \tilde{s}_\alpha, \end{aligned}$$

and it would imply $p_\alpha = c_\alpha p$ and \mathbf{f}_α would depend on $\nabla \theta$.

Beweis. To prove the identity we compute

$$\sum_\alpha \operatorname{div}_x (\pi_\alpha u_\alpha) = \sum_\alpha \operatorname{div}_x (\tilde{\pi}_\alpha u_\alpha) = \sum_\alpha \nabla \tilde{\pi}_\alpha \bullet u_\alpha + \sum_\alpha \tilde{\pi}_\alpha \operatorname{div}_x u_\alpha$$

and

$$\sum_\alpha \tilde{\pi}_\alpha \operatorname{div}_x u_\alpha = \sum_\alpha \tilde{\pi}_\alpha \operatorname{div}_x v_\alpha - \underbrace{\sum_\alpha \tilde{\pi}_\alpha \operatorname{div}_x v}_= 0,$$

since $\sum_{\alpha} \tilde{\pi}_{\alpha} = 0$, which gives the assertion (IV9.27). This added to (IV9.18) gives

$$\begin{aligned} \sigma &= -\eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}_x q + \operatorname{div}_x (\psi - \eta v - \sum_{\alpha} \pi_{\alpha} u_{\alpha}) + \eta'_{\varepsilon} g \\ &+ \sum_{\alpha} \mathbb{D}v_{\alpha} \bullet \left((c_{\alpha}(\eta - \varepsilon\eta'_{\varepsilon}) - \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} + \tilde{\pi}_{\alpha}) \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi_{\alpha} \right) \\ &+ \sum_{\alpha} u_{\alpha} \bullet \left((\eta - \varepsilon\eta'_{\varepsilon}) \nabla c_{\alpha} - \eta'_{\varrho_{\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} + \nabla \tilde{\pi}_{\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \mathbf{f}_{\alpha} \right) \end{aligned}$$

leading to (IV9.28). \square

Equilibria

We call an equilibrium a stationary solution with all $v_{\alpha} = 0$, hence $v = 0$ and all $u_{\alpha} = 0$, and in addition $S_{\alpha} = 0$ and $s_{\alpha} = 0$. Thus the mass-momentum equations (IV9.25) are equivalent to

$$\boxed{\nabla p_{\alpha} = \mathbf{f}_{\alpha} \quad \text{for all } \alpha} \quad (\text{IV9.29})$$

and the energy equation $\operatorname{div} q = 0$. Then the following holds.

9.9 Lemma. Consider a region where all $\varrho_{\alpha} > 0$. Then equilibria satisfy

$$\nabla p_{\alpha}^{\text{SP}} = \sum_{\beta} c_{\beta} \nabla p_{\beta}^{\text{SP}} \quad \text{for all } \alpha. \quad (\text{IV9.30})$$

That is, the gradient of the specific partial pressure $\nabla p_{\alpha}^{\text{SP}}$ is independent of the species α , therefore it is a function of the mixture, or (IV9.30) is equivalent to:

$$\nabla p_{\alpha}^{\text{SP}} \text{ is the same function for all } \alpha. \quad (\text{IV9.31})$$

Beweis. Since $\mathbf{f} = \sum_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}$ and $p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}$, we also have $\nabla p - \mathbf{f} = 0$. Hence the result of 9.7 is

$$\varrho_{\alpha} (\nabla p_{\alpha}^{\text{SP}} - \sum_{\beta} c_{\beta} \nabla p_{\beta}^{\text{SP}}) = 0.$$

If $\varrho_{\alpha} > 0$ the assertion follows. Since $\sum_{\beta} c_{\beta} = 1$ the result (IV9.30) is equivalent to (IV9.31). \square

Therefore if we consider a region where all $\varrho_{\alpha} > 0$, we can state that the system (IV9.25), and thus also (IV9.29), is equivalent to

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{f}, \quad p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad \mathbf{f} = \sum_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}, \\ \nabla p_{\alpha}^{\text{SP}} &\text{ is the same function for all } \alpha, \end{aligned}} \quad (\text{IV9.32})$$

9.10 Fundamental law. It follows from (IV9.32) that there are constants $\tilde{d}_{\alpha} \in \mathbb{R}$ such that

$$\boxed{\tilde{p}_{\alpha}^{\text{SP}} \text{ is the same function for all } \alpha,} \quad (\text{IV9.33})$$

where \tilde{p}_α are the “normalized” pressures

$$\tilde{p}_\alpha := \varrho_\alpha \tilde{f}'_{\varrho_\alpha} - c_\alpha \tilde{f}, \quad \tilde{f} := f - \sum_\beta \tilde{d}_\beta \varrho_\beta.$$

Remark: It is assumed that the space domain is connected. Here we talk about equilibria, in this case there is no time variable.

Note: Because \tilde{d}_α are numbers, the energy equation does not change, if we choose $\tilde{f} = \tilde{e} - \theta\eta$, that is, if we replace e by \tilde{e} .

It is

$$\tilde{p}_\alpha^{\text{sp}} = \tilde{f}'_{\varrho_\alpha} - \frac{\tilde{f}}{\varrho} \quad \text{where} \quad \tilde{\mu}_\alpha := \tilde{f}'_{\varrho_\alpha},$$

therefore the chemical potentials $\tilde{\mu}_\alpha$ also are independent of α . See the paper of Huggins, specially the equations [109, (1)-(4)].

Beweis. The equations (IV9.32) say that for all α and β

$$\nabla(p_\alpha^{\text{sp}} - p_\beta^{\text{sp}}) = 0 \text{ in the domain,}$$

so there are constants $k_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ with

$$p_\alpha^{\text{sp}} - p_\beta^{\text{sp}} = k_{\alpha\beta}. \quad (\text{IV9.34})$$

Then for a given γ_0 define

$$\tilde{d}_\alpha := k_{\alpha\gamma_0}.$$

Since

$$p_\alpha^{\text{sp}} = k_{\alpha\beta} + p_\beta^{\text{sp}} = k_{\alpha\beta} + k_{\beta\gamma} + p_\gamma^{\text{sp}}$$

and also $p_\alpha^{\text{sp}} = k_{\alpha\gamma} + p_\gamma^{\text{sp}}$, we conclude

$$k_{\alpha\gamma} = k_{\alpha\beta} + k_{\beta\gamma},$$

hence

$$k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\gamma_0} - k_{\beta\gamma_0} = \tilde{d}_\alpha - \tilde{d}_\beta.$$

Then (IV9.34) can be written as

$$p_\alpha^{\text{sp}} - \tilde{d}_\alpha = p_\beta^{\text{sp}} - \tilde{d}_\beta.$$

We compute for \tilde{p}_α defined in the statement

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\alpha^{\text{sp}} &= \frac{\tilde{p}_\alpha}{\varrho_\alpha} = \tilde{f}'_{\varrho_\alpha} - \frac{\tilde{f}}{\varrho} = \underbrace{f'_{\varrho_\alpha} - \frac{f}{\varrho} - \tilde{d}_\alpha}_{= p_\alpha^{\text{sp}} - \tilde{d}_\alpha} + \sum_\beta \tilde{d}_\beta c_\beta, \end{aligned}$$

and from there the assertion. \square

Wir nehmen nun an, dass auf die Mischung die Schwerkraft wirkt, z.B. die Erdanziehungskraft, wir bezeichnen daher den Kraftterm in der allgemeinen Situation mit

$$\mathbf{f} = \varrho \nabla(\mathbf{g}\phi), \quad (\text{IV9.35})$$

wir sind also ein Beobachter, der keine Scheinkräfte bewirkt, oder für den die Scheinkräfte vernachlässigbar sind. Befinden wir uns in einer Zentrifuge so haben wir die Zentrifugalkraft als eine Scheinkraft, also muss dann \mathbf{f} entsprechend abgeändert werden.

9.11 Einfache Mischung idealer Gase. Let us consider an ideal mixture of gases with free energy (see 2.5(4))

$$f((\varrho_\beta)_\beta, \theta) := \sum_\alpha \varrho_\alpha (R^\alpha \theta \log \varrho_\alpha - c_V^\alpha \theta \log \theta + d^\alpha \theta), \quad (\text{IV9.36})$$

where $R^\alpha = c_P^\alpha - c_V^\alpha > 0$, and c_P^α , c_V^α and d^α are constants. Then it follows for equilibria that the pressure p and the internal energy ε is given by

$$\begin{aligned} \left(\sum_\alpha \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} \right) - f &= p = \sum_\alpha R^\alpha \theta \varrho_\alpha, \\ f - \theta f'_{\theta} &= \varepsilon = \sum_\alpha c_V^\alpha \theta \varrho_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{IV9.37})$$

Remark: Here only Gibbs relation, the relation between f and p , is used. The relation $f - \theta f'_{\theta} = \varepsilon$ was a definition, see (III1.7) or (IV9.23).

If f satisfies (IV9.37) it follows that f is of the form (IV9.36) plus a term $\theta d(\frac{\vec{\varrho}}{|\vec{\varrho}|})$, which contains terms $\sum_\alpha \theta \varrho_\alpha d^\alpha(\vec{\varrho})$, provided $(\partial_{\varrho_\beta} d^\alpha)_{\alpha,\beta}$ satisfies $\sum_{\alpha,\beta} \varrho_\alpha \varrho_\beta \partial_{\varrho_\beta} d^\alpha(\vec{\varrho}) = 0$.

Beweis (IV9.36) \Rightarrow (IV9.37). Wir nehmen an, dass die freie Energie

$$f = \sum_\alpha \varrho_\alpha h_\alpha, \quad h_\alpha := a_\alpha(\theta) \log \varrho_\alpha - b_\alpha(\theta),$$

ist, wobei $a_\alpha(\theta) := R^\alpha \theta$ und $b_\alpha(\theta) := c_V^\alpha \theta \log \theta - d^\alpha \theta$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &:= f'_{\varrho_\alpha} = h_\alpha + \varrho_\alpha h'_{\varrho_\alpha} = h_\alpha + a_\alpha, \\ p_\alpha^{\text{sp}} &= f'_{\varrho_\alpha} - \frac{f}{\varrho} = h_\alpha - \sum_\beta c_\beta h_\beta + a_\alpha, \\ p &= \sum_\alpha \varrho_\alpha p_\alpha^{\text{sp}} = \varrho \sum_\alpha c_\alpha p_\alpha^{\text{sp}} = \varrho \sum_\alpha c_\alpha a_\alpha = \sum_\alpha \varrho_\alpha a_\alpha, \end{aligned} \quad (\text{IV9.38})$$

and

$$\varepsilon = f + \theta \eta = f - \theta f'_{\theta} = -\theta^2 \left(\frac{f}{\theta} \right)'_{\theta} = \theta^2 \left(\sum_\alpha \varrho_\alpha c_V^\alpha \log \theta \right)'_{\theta} = \sum_\alpha \theta \varrho_\alpha c_V^\alpha.$$

Hence (IV9.37) is proved. \square

Beweis of the other direction. Let $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \theta)$ be any function satisfying (IV9.37). If we subtract from this the function in (IV9.36) we are left with a function f satisfying the homogeneous differential equations

$$f - \theta f'_{\theta} = 0, \quad \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} f'_{\varrho_{\alpha}} \right) - f = 0.$$

The first equation means $\left(\frac{f}{\theta}\right)'_{\theta} = 0$ hence $f(\vec{\varrho}, \theta) = \theta d_1(\vec{\varrho})$. The second equation gives

$$0 = \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \left(\frac{f}{\varrho}\right)'_{\varrho_{\alpha}} = \vec{\varrho} \bullet \nabla_{\vec{\varrho}} \left(\frac{f}{\varrho}\right) = \theta \vec{\varrho} \bullet \nabla_{\vec{\varrho}} \left(\frac{d_1 \vec{\varrho}}{\varrho}\right)$$

hence

$$\frac{d_1(\vec{\varrho})}{\varrho} = d\left(\frac{\vec{\varrho}}{|\vec{\varrho}|}\right).$$

Therefore $f(\vec{\varrho}, \theta) = \theta \varrho d\left(\frac{\vec{\varrho}}{|\vec{\varrho}|}\right)$. A function $f = \sum_{\alpha} \theta \varrho_{\alpha} d^{\alpha}(\vec{\varrho})$ means that $d = \sum_{\alpha} c_{\alpha} d^{\alpha}$ and

$$0 = \sum_{\beta} \varrho_{\beta} \partial_{\varrho_{\beta}} d = \sum_{\alpha} \left(\underbrace{\sum_{\beta} \varrho_{\beta} \partial_{\varrho_{\beta}} c_{\alpha}}_{=0} \right) d^{\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \varrho c_{\beta} c_{\alpha} \partial_{\varrho_{\beta}} d^{\alpha}.$$

□

Warning: It is $p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}$ where p_{α} is the pressure of the moment equation of species α in (IV9.25), and also $p = \sum_{\alpha} R^{\alpha} \theta \varrho_{\alpha}$ in 9.11, but p_{α} is not $R^{\alpha} \theta \varrho_{\alpha}$ as one can see in the above proof.

9.12 Equilibrium für ideale Gase. Let the free energy be given as in 9.11 and define $a_{\alpha}(\theta) := R^{\alpha} \theta$. Then in the isothermal situation $\theta = \text{const}$ the system (IV9.32) under gravity (IV9.35) is equivalent to

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} a_{\alpha} \nabla c_{\alpha} + \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} c_{\alpha} \right) \nabla \log \varrho &= \nabla(\mathbf{g}\phi), \\ \frac{a_{\alpha}}{c_{\alpha}} \nabla c_{\alpha} + a_{\alpha} \nabla \log \varrho &\text{ is the same function for all } \alpha. \end{aligned} \tag{IV9.39}$$

Beweis. Die äußere Kraft \mathbf{f} ist in (IV9.35) gegeben und mit dem Druck p in (IV9.38) sind die Gleichungen in (IV9.32) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \nabla \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} \varrho_{\alpha} \right) &= \varrho \nabla(\mathbf{g}\phi), \\ \nabla(a_{\alpha} \log \varrho_{\alpha}) &\text{ is the same function for all } \alpha, \end{aligned} \tag{IV9.40}$$

denn, da wir den isothermen Fall behandeln,

$$\begin{aligned} \nabla p_{\alpha}^{\text{sp}} &= \nabla f'_{\varrho_{\alpha}} - \nabla \left(\frac{f}{\varrho} \right) \text{ is the same function for all } \alpha, \\ \iff \nabla f'_{\varrho_{\alpha}} &= \nabla h_{\alpha} = \nabla(a_{\alpha} \log \varrho_{\alpha}) \text{ is the same function for all } \alpha, \\ \iff \nabla(a_{\alpha} \log \varrho_{\alpha}) &= \nabla(a_{\alpha} \log(c_{\alpha} \varrho)) = a_{\alpha} \nabla \log c_{\alpha} + a_{\alpha} \nabla \log \varrho \\ &\text{ is the same function for all } \alpha. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}\nabla\left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}\varrho_{\alpha}\right) &= \nabla\left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}c_{\alpha}\varrho\right) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\varrho\nabla c_{\alpha} + c_{\alpha}\nabla\varrho) \\ &= \varrho\left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}\nabla c_{\alpha} + \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}c_{\alpha}\right)\nabla\log\varrho\right)\end{aligned}$$

ist (IV9.40) äquivalent zu

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} a_{\alpha}\nabla c_{\alpha} + \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}c_{\alpha}\right)\nabla\log\varrho &= \nabla(\mathbf{g}\phi), \\ \frac{a_{\alpha}}{c_{\alpha}}\nabla c_{\alpha} + a_{\alpha}\nabla\log\varrho &\text{ is the same function for all } \alpha,\end{aligned}$$

□

9.13 Binäre Mischung. Für eine binäre Mischung, d.h. $\alpha = 1, 2$, in 9.12 folgt im Fall $R^1 \neq R^2$ und im isothermen Fall aus (IV9.39)

$$\begin{aligned}\log\frac{c}{1-c} &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \cdot (-\mathbf{g}\phi) + \frac{k_{\phi}}{a_1 a_2} \quad \text{wobei } c := c_2, \\ \log\varrho &= \frac{a_1}{a_2 - a_1}\log c_1 + \frac{a_2}{a_1 - a_2}\log c_2 + \frac{k_{\varrho}}{a_2 - a_1}.\end{aligned}$$

Here k_{ϕ} and k_{ϱ} are constants.

Beweis. Da $c_1 + c_2 = 1$ ist die zweite Gleichung von (IV9.39) äquivalent zu

$$\frac{a_2}{c_2}\nabla c_2 + a_2\nabla\log\varrho = \frac{a_1}{c_1}\nabla c_1 + a_1\nabla\log\varrho,$$

also folgt mit $c := c_2$, dass (IV9.39) äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}(a_2 - a_1)\nabla c + (a_1 c_1 + a_2 c_2)\nabla\log\varrho &= \nabla(\mathbf{g}\phi), \\ \left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2}\right)\nabla c + (a_2 - a_1)\nabla\log\varrho &= 0.\end{aligned}$$

Taking $\nabla\log\varrho$ from the second equation and inserting it in the first equation one obtains

$$\begin{aligned}(a_2 - a_1)\nabla(\mathbf{g}\phi) &= \left((a_2 - a_1)^2 - (a_1 c_1 + a_2 c_2)\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2}\right) \right)\nabla c, \\ &= \underbrace{-a_1 a_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)}_{\text{since } c_1 + c_2 = 1}\end{aligned}$$

hence the system is equivalent to

$$\begin{aligned}(a_2 - a_1)\nabla(\mathbf{g}\phi) &= -a_1 a_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\nabla c = a_1 a_2 (\nabla\log c_1 - \nabla\log c_2), \\ (a_2 - a_1)\nabla\log\varrho &= -\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2}\right)\nabla c = a_1\nabla\log c_1 - a_2\nabla\log c_2.\end{aligned}$$

Now $a_1(\theta) = R^1\theta \neq R^2\theta = a_2(\theta)$ and a_1 and a_2 are constant, since it is assumed that the processes are isothermal. Therefore

$$\begin{aligned}\nabla((a_1 - a_2)\mathbf{g}\phi + a_1a_2(\log c_1 - \log c_2)) &= 0, \\ \nabla((a_1 - a_2)\log \varrho + (a_1\log c_1 - a_2\log c_2)) &= 0.\end{aligned}$$

It follows that there are constants $k_\phi, k_\varrho \in \mathbb{R}$ so that

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2)\mathbf{g}\phi + a_1a_2(\log c_1 - \log c_2) + k_\phi &= 0, \\ (a_1 - a_2)\log \varrho + (a_1\log c_1 - a_2\log c_2) + k_\varrho &= 0,\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\log \frac{c}{1-c} = \log c_2 - \log c_1 &= \frac{(a_1 - a_2)\mathbf{g}\phi + k_\phi}{a_1a_2} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \cdot (-\mathbf{g}\phi) + \frac{k_\phi}{a_1a_2}, \\ \log \varrho &= \frac{a_1}{a_2 - a_1} \log c_1 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} \log c_2 + \frac{k_\varrho}{a_2 - a_1},\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

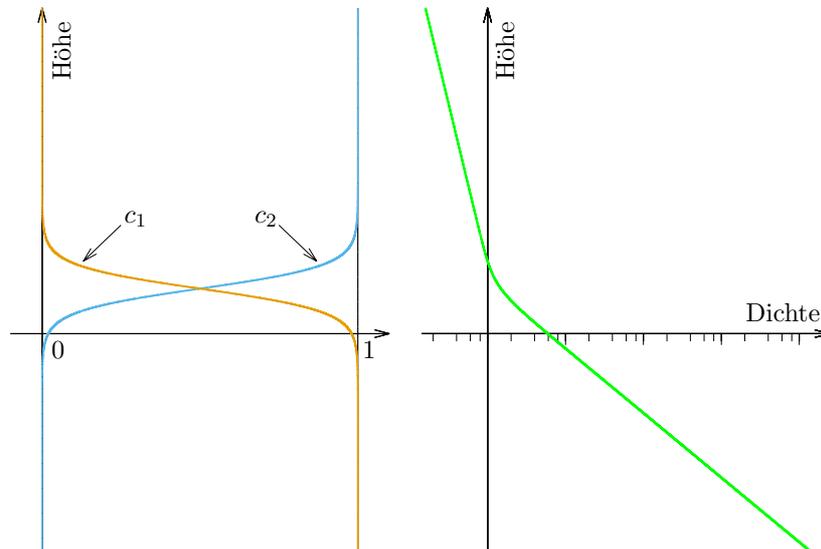


Abb. 28: Es wird die “Binäre Mischung” aus dem Text gezeigt. *Links:* Konzentrationen c_2 and c_1 . *Rechts:* Dichte ϱ im logarithmischen Maßstab. In einer vertikalen Säule setzt sich die “schwerere” Substanz nach unten ab und die “leichtere” nach oben.

Daraus folgt, dass ein Equilibrium von idealen Gasen die “Fraktionierung” auf der Erdoberfläche erklärt, sie wird verursacht durch die Gravitation.

9.14 Fraktionierung. Auf der Erdoberfläche gilt für Equilibria wie in 9.13, wenn $\mathbf{g}\phi(x) = \text{const} - g_{\text{Erde}} x_3$, wobei g_{Erde} die Erdbeschleunigung ist, und wenn $c := c_2$

(1) ist

$$\frac{\partial_{x_3} c}{c(1-c)} = \frac{g_{\text{Erde}}}{\mathcal{R}\theta} (M_1 - M_2),$$

was positiv ist, falls $M_1 > M_2$.

(2) gilt

$$\partial_{x_3} c(x_3) = \frac{g_{\text{Erde}}}{4\mathcal{R}\theta} (M_1 - M_2) \quad \text{if} \quad c(x_3) = \frac{1}{2},$$

was gegen $+\infty$ geht, falls $M_1 - M_2 \rightarrow \infty$.

(3) ist $\varrho_1 = \widehat{\varrho}_1(x_3)$ und erfüllt

$$\log \varrho_1 = -\frac{g_{\text{Erde}}}{\mathcal{R}\theta} M_1 x_3 + \text{const.}$$

Wir betrachten hier nur eindimensionale Lösungen, und die Gravitation ist durch eine lineare Funktion approximiert. Siehe dazu Abb. 28.

Beweis (1). It is from the equation in 9.13

$$\begin{aligned} \left(\log \frac{c}{1-c} \right)'_{x_3} &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \cdot (-\mathbf{g}\phi(x))'_{x_3} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) g_{\text{Erde}} = \frac{g_{\text{Erde}}}{\mathcal{R}\theta} (M_1 - M_2) \end{aligned}$$

and

$$\left(\log \frac{c}{1-c} \right)'_{x_3} = \frac{c'_{x_3}}{c(1-c)}.$$

□

Beweis (3). It is

$$\begin{aligned} \log \varrho_1 &= \log \varrho + \log c_1 = \left(\frac{a_1}{a_2 - a_1} + 1 \right) \log c_1 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} \log c_2 \\ &= \underbrace{\left(\frac{a_1}{a_2 - a_1} + 1 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} \right)}_{=0} \log c_1 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} \underbrace{\log \frac{c_2}{c_1}}_{= \log \frac{c}{1-c}} + \text{const} \\ &= \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \cdot (-\mathbf{g}\phi(x)) + \text{const} = -\frac{1}{a_1} \cdot (-\mathbf{g}\phi(x)) + \text{const} \\ &= -\frac{1}{\mathcal{R}\theta} g_{\text{Erde}} x_3 + \text{const} = -\frac{M_1 g_{\text{Erde}}}{\mathcal{R}\theta} x_3 + \text{const.} \end{aligned}$$

□

10 Mischungen in Bewegung

Wir betrachten die Mischung von verschiedenen Gasen und benutzen die Theorie, die in Abschnitt 9 entwickelt wurde. Wir hatten dort als Anwendung Equilibria untersucht, d.h. stationäre Lösungen, die sich in Ruhe befinden, also mit $v = 0$ und relativer Bewegung $u_\alpha = 0$. Hier betrachten wir nun Gase, für die die relative Bewegungen $u_\alpha \neq 0$ sind, aber nach wie vor nehmen wir $S_\alpha = 0$, also $\Pi_\alpha = p_\alpha \text{Id}$, an.

References: [Bothe & Dreyer \[26\]](#).

Zwei gegenläufige Substanzen

Here in the case $s_\alpha = 0$ we consider only two substances so that u_α have opposite direction, that is, one substance is moving in the opposite direction of the other. Hence the mass-momentum-energy equations (IV9.25) are equivalent to

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varrho_\alpha u_\alpha) &= 0, \\ \operatorname{div}(\varrho_\alpha u_\alpha u_\alpha^T + p_\alpha \text{Id}) &= \mathbf{f}_\alpha, \\ \operatorname{div}q + \sum_\alpha p_\alpha \operatorname{div}u_\alpha + \sum_\alpha u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV10.1})$$

for $\alpha = 1, 2$, where \mathbf{f}_α has the representation in (IV9.24), that is,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha &:= f'_{\varrho_\alpha} \nabla \varrho_\alpha - f \nabla c_\alpha + c_\alpha \lambda, \\ \lambda &:= \mathbf{f} - \sum_\beta f'_{\varrho_\beta} \nabla \varrho_\beta, \quad \mathbf{f} = \sum_\alpha \mathbf{f}_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{IV10.2})$$

Da $\varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2 = 0$ definieren wir

$$w := \varrho_1 u_1 = -\varrho_2 u_2, \quad u_1 = \frac{w}{\varrho_1}, \quad u_2 = -\frac{w}{\varrho_2},$$

also sind die Massenerhaltungen $\operatorname{div}(\varrho_\alpha u_\alpha) = 0$ äquivalent zu $\operatorname{div}w = 0$. Die Impulserhaltung für α wird zu

$$\mathbf{f}_\alpha - \nabla p_\alpha = \operatorname{div}(\varrho_\alpha u_\alpha u_\alpha^T) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\varrho_\alpha} w w^T\right),$$

also gelten für die Massen- und Impulserhaltung die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}w &= 0, \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{\varrho_\alpha} w w^T\right) &= \mathbf{f}_\alpha - \nabla p_\alpha \text{ für } \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{IV10.3})$$

Daraus folgt

10.1 Lemma. Für zwei Substanzen sind die Massen und Impulserhaltung äquivalent zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} w &= 0, \\ \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) w w^T \right) &= \mathbf{f} - \nabla p, \\ \frac{1}{\varrho_1} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\varrho_1} w w^T \right) + \nabla p_1^{\text{sp}} &= \frac{1}{\varrho_2} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\varrho_2} w w^T \right) + \nabla p_2^{\text{sp}}, \end{aligned}$$

where p is defined as in (IV9.26).

This is identical to the equations (IV9.32) in the case of equilibria, that is, to the case $w = 0$.

Beweis. Die Summe der zweiten Gleichung in (IV10.3) ergibt die zweite Gleichung. Zur Herleitung der dritten Gleichung schreiben wir 9.7 als

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\alpha - \nabla p_\alpha - c_\alpha \sum_\beta (\mathbf{f}_\beta - \nabla p_\beta) \\ = \mathbf{f}_\alpha - \nabla p_\alpha - c_\alpha (\mathbf{f} - \nabla p) = -\varrho_\alpha (\nabla p_\alpha^{\text{sp}} - \sum_\beta c_\beta \nabla p_\beta^{\text{sp}}), \end{aligned}$$

und daher für $\alpha = 1$

$$c_2 (\mathbf{f}_1 - \nabla p_1) - c_1 (\mathbf{f}_2 - \nabla p_2) = -\varrho_1 c_2 \nabla p_1^{\text{sp}} + \varrho_1 c_2 \nabla p_2^{\text{sp}},$$

was äquivalent ist zu

$$c_2 (\mathbf{f}_1 - \nabla p_1 + \varrho_1 \nabla p_1^{\text{sp}}) = c_1 (\mathbf{f}_2 - \nabla p_2 + \varrho_2 \nabla p_2^{\text{sp}}).$$

Division durch $\varrho c_1 c_2$ ergibt

$$\frac{1}{\varrho_1} (\mathbf{f}_1 - \nabla p_1) + \nabla p_1^{\text{sp}} = \frac{1}{\varrho_2} (\mathbf{f}_2 - \nabla p_2) + \nabla p_2^{\text{sp}},$$

was mit (IV10.3) äquivalent zur dritten Gleichung ist. \square

Die Gleichungen (IV10.1) sind auch äquivalent zu den Folgenden.

10.2 Lemma. Für zwei Substanzen ist das Masse-Impuls-Energie System (IV10.1) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} w &= 0, & \operatorname{div} q &= 0, \\ \nabla p_\alpha + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\varrho_\alpha} w w^T \right) &= c_\alpha \mathbf{f} + p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha - c_\alpha \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta \end{aligned}$$

für $\alpha = 1, 2$.

Beweis. The identity (IV10.2) gives for the partial forces

$$\mathbf{f}_\alpha - c_\alpha \mathbf{f} = f'_{\varrho_\alpha} \nabla \varrho_\alpha - f \nabla c_\alpha - c_\alpha \sum_\beta f'_{\varrho_\beta} \nabla \varrho_\beta,$$

and since the specific pressures satisfy

$$p_\alpha^{\text{sp}} = f'_{\varrho_\alpha} - \frac{f}{\varrho},$$

we obtain

$$\begin{aligned} & p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha - c_\alpha \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta \\ &= f'_{\varrho_\alpha} \nabla \varrho_\alpha - \frac{f}{\varrho} \nabla \varrho_\alpha - c_\alpha \sum_\beta f'_{\varrho_\beta} \nabla \varrho_\beta + c_\alpha \frac{f}{\varrho} \sum_\beta \nabla \varrho_\beta \\ &= f'_{\varrho_\alpha} \nabla \varrho_\alpha - f \underbrace{\left(\frac{1}{\varrho} \nabla \varrho_\alpha + \frac{1}{\varrho} c_\alpha \nabla \varrho \right)}_{= \nabla c_\alpha} - c_\alpha \sum_\beta f'_{\varrho_\beta} \nabla \varrho_\beta, \end{aligned}$$

hence

$$\mathbf{f}_\alpha - c_\alpha \mathbf{f} = p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha - c_\alpha \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta. \quad (\text{IV10.4})$$

Now the second equation of (IV10.1) gives by (IV10.4)

$$\begin{aligned} & \nabla p_\alpha + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\varrho_\alpha} w w^T \right) - c_\alpha \mathbf{f} \\ &= \mathbf{f}_\alpha - c_\alpha \mathbf{f} = p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha - c_\alpha \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta, \end{aligned}$$

which is part of the assertion. Since, using (IV10.4),

$$\begin{aligned} \sum_\alpha u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha &= \sum_\alpha u_\alpha \bullet (c_\alpha \mathbf{f} + p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha - c_\alpha \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta) \\ &= \underbrace{\sum_\alpha c_\alpha u_\alpha \bullet (\mathbf{f} - \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta)}_{= 0} + \sum_\alpha u_\alpha \bullet (p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha) = \sum_\alpha p_\alpha^{\text{sp}} u_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha, \end{aligned}$$

the third equation of (IV10.1) gives, using $\operatorname{div} w = 0$,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} q &= \sum_\alpha p_\alpha \operatorname{div} u_\alpha + \sum_\alpha u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha \\ &= \sum_\alpha p_\alpha \operatorname{div} u_\alpha + \sum_\alpha p_\alpha^{\text{sp}} u_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha \\ &= p_1 w \bullet \nabla \left(\frac{1}{\varrho_1} \right) - p_2 w \bullet \nabla \left(\frac{1}{\varrho_2} \right) + \frac{p_1^{\text{sp}}}{\varrho_1} w \bullet \nabla \varrho_1 - \frac{p_2^{\text{sp}}}{\varrho_2} w \bullet \nabla \varrho_2 = 0, \end{aligned}$$

which is the energy equation. \square

Hence the momentum balance of the α -th constituent has as force the α -part of the total force plus and an additional term whose sum over α is 0. Now we consider ideal Gases as in 9.11 and 9.12.

10.3 Ideale Mischung aus zwei Substanzen. Betrachte eine Mischung aus idealen Gasen, d.h. mit der freien Energie in (IV9.36). Außerdem sei $q = 0$ in isothermen Fall, d.h. $\theta = \text{const}$. Dann sind die Differentialgleichungen in 10.2 äquivalent zu der Massenerhaltung $\text{div} w = 0$ und den Impulserhaltungen

$$a_\alpha \nabla \varrho_\alpha + \text{div} \left(\frac{1}{\varrho_\alpha} w w^T \right) = c_\alpha \mathbf{f} \quad \text{für } \alpha = 1, 2.$$

Beweis. Betrachte die Impulserhaltung von 10.2

$$\nabla p_\alpha - \left(p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha - c_\alpha \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta \right) = - \text{div} \left(\frac{1}{\varrho_\alpha} w w^T \right) + c_\alpha \mathbf{f}.$$

Wegen $p_\alpha = \varrho_\alpha p_\alpha^{\text{sp}}$ ist

$$\nabla p_\alpha = \nabla (\varrho_\alpha p_\alpha^{\text{sp}}) = p_\alpha^{\text{sp}} \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \nabla p_\alpha^{\text{sp}},$$

also ist die linke Seite der Impulserhaltung

$$= \varrho_\alpha \nabla p_\alpha^{\text{sp}} + c_\alpha \sum_\beta p_\beta^{\text{sp}} \nabla \varrho_\beta = \sum_\beta (\varrho_\alpha p_{\alpha'}^{\text{sp}} + c_\alpha p_\beta^{\text{sp}}) \nabla \varrho_\beta + p_{\alpha'}^{\text{sp}} \nabla \theta,$$

da $p_\alpha^{\text{sp}} = \hat{p}_\alpha^{\text{sp}}((\varrho_\beta)_\beta, \theta)$. Dies ist deshalb richtig, da die freie Energie (IV9.36) impliziert, dass

$$p_\alpha^{\text{sp}} = a_\alpha + h_\alpha - \sum_\gamma c_\gamma h_\gamma, \quad a_\alpha(\theta) := R^\alpha \theta$$

$$h_\alpha := a_\alpha(\theta) \log \varrho_\alpha - b_\alpha(\theta), \quad b_\alpha(\theta) := c_V^\alpha \theta \log \theta - d^\alpha \theta$$

(siehe den Beweis von 9.11, eine Aussage, die in der Situation hier gilt). Nun ist $\nabla \theta = 0$, da $\theta = \text{const}$ angenommen wurde. also ist die linke Seite obiger Impulserhaltung

$$= \sum_\beta (\varrho_\alpha p_{\alpha'}^{\text{sp}} + c_\alpha p_\beta^{\text{sp}}) \nabla \varrho_\beta = \varrho_\alpha \sum_\beta (p_{\alpha'}^{\text{sp}} + \frac{1}{\varrho} p_\beta^{\text{sp}}) \nabla \varrho_\beta.$$

Wegen

$$p_{\alpha'}^{\text{sp}} = h_{\alpha'} - \sum_\gamma c_\gamma h_{\gamma'} - \sum_\gamma c_{\gamma'} h_\gamma$$

$$= \frac{a_\alpha}{\varrho_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} - c_\beta \frac{a_\beta}{\varrho_\beta} - \sum_\gamma \left(\frac{\delta_{\gamma,\beta}}{\varrho} - \frac{\varrho_\gamma}{\varrho^2} \right) h_\gamma$$

$$= \frac{a_\alpha}{\varrho_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} - \frac{a_\beta}{\varrho} - \frac{h_\beta}{\varrho} + \sum_\gamma \frac{\varrho_\gamma}{\varrho^2} h_\gamma = \frac{a_\alpha}{\varrho_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} - \frac{p_\beta^{\text{sp}}}{\varrho}$$

ist

$$p_{\alpha'}^{\text{sp}} + \frac{p_{\beta}^{\text{sp}}}{\varrho} = \frac{a_{\alpha}}{\varrho_{\alpha}} \delta_{\alpha,\beta},$$

also die linke Seite obiger Impulserhaltung

$$= \varrho_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{a_{\alpha}}{\varrho_{\alpha}} \delta_{\alpha,\beta} \nabla \varrho_{\beta} = a_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha},$$

also die Behauptung. □

10.4 Bemerkung. Im Falle $w = 0$ lautet **10.3**

$$a_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} = c_{\alpha} \mathbf{f} \quad \text{für } \alpha = 1, 2.$$

Dies ist unter den Voraussetzungen in **9.13** äquivalent zu den beiden Gleichungen in **9.13**.

Beweis. □

In Bearbeitung

.....

Entropieprinzip für miteinander reagierende Substanzen

We now consider the general case, where the substances will react with each other or/and will diffuse, that is,

$$\mathbf{r}_{\alpha} \text{ arbitrary, } \mathbf{J}_{\alpha} \text{ arbitrary, hence } \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha}. \quad (\text{IV10.5})$$

In this situation the pressure tensors Π_{α} and consequently also Π_{mix} are assumed to be nonsymmetric. Replacing the energy equation in **(IV9.11)** by the thermal energy equation in **9.4**, the system to solve is

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_{\alpha} + \text{div}(\varrho_{\alpha} v_{\alpha} + \mathbf{J}_{\alpha}) &= \mathbf{r}_{\alpha}, \\ \partial_t(\varrho_{\alpha} v_{\alpha}) + \text{div}(\varrho_{\alpha} v_{\alpha} v_{\alpha}^T + v_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}^T + \Pi_{\alpha}) &= \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha}, \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha} &:= \mathbf{r}_{\alpha} v_{\alpha} + Dv_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\alpha}, \\ \partial_t \varepsilon + \text{div}(\varepsilon v + q) &= g - \sum_{\alpha} Dv_{\alpha} \bullet \Pi_{\alpha}^{sym} \\ &- \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 + Du_{\alpha} \bullet (\Pi_{\alpha}^{rest} + u_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}^T) + u_{\alpha} \bullet \mathbf{f}_{\alpha} \right), \end{aligned}$$

(IV10.6)

where g is the quantity which we will set to 0 in order to satisfy the energy principle for the entire energy

$$e = \varepsilon + \sum_{\alpha} \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |v_{\alpha}|^2 = \left(\varepsilon + \sum_{\alpha} \frac{\varrho_{\alpha}}{2} |u_{\alpha}|^2 \right) + \frac{\varrho}{2} |v|^2$$

and ε will be the internal energy independent of the $u_\alpha = v_\alpha - v$, that is, we will have the constitutive equation $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}((\varrho_\beta)_\beta, \theta)$. But the main part is to exploit the entropy principle, where we will also assume that $\eta = \widehat{\eta}((\varrho_\beta)_\beta, \theta)$. Therefore we need in analogy to 9.5

10.5 Theorem. System (IV10.6) is equivalent to the system

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div}_x v_\alpha + \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha, \\ \varrho_\alpha (\overset{\circ}{v}_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla v_\alpha) + \operatorname{div}_x \Pi_\alpha &= \mathbf{f}_\alpha, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_x q &= g - \sum_\alpha Dv_\alpha \bullet \Pi_\alpha^{sym} \\ &\quad - \sum_\alpha \left(\frac{\mathbf{r}_\alpha}{2} |u_\alpha|^2 + Du_\alpha \bullet (\Pi_\alpha^{rest} + u_\alpha \mathbf{J}_\alpha^T) + u_\alpha \bullet \mathbf{f}_\alpha \right). \end{aligned}$$

Here $\overset{\circ}{h} := (\partial_t + v \bullet \nabla_x)h$ for every function h .

Bemerkung: The right-hand side of the thermal energy equation is an objective scalar, see the proof of 9.4.

Beweis. The mass equation of species α is with $v_\alpha = v + u_\alpha$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha &= \partial_t \varrho_\alpha + v_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div}_x v_\alpha + \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha \\ &= (\partial_t + v \bullet \nabla) \varrho_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla \varrho_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div}_x v_\alpha + \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha, \end{aligned}$$

the momentum equation

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{f}}_\alpha &= \underbrace{(\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}_x (\varrho_\alpha v_\alpha))}_{= -\operatorname{div}_x \mathbf{J}_\alpha + \mathbf{r}_\alpha} v_\alpha + \varrho_\alpha (\partial_t v_\alpha + v_\alpha \bullet \nabla v_\alpha) + \operatorname{div}_x (v_\alpha \mathbf{J}_\alpha^T + \Pi_\alpha) \\ &= \mathbf{r}_\alpha v_\alpha + \varrho_\alpha (\partial_t v_\alpha + v \bullet \nabla v_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla v_\alpha) + (D_x v_\alpha) \mathbf{J}_\alpha + \operatorname{div}_x \Pi_\alpha \\ &= \mathbf{r}_\alpha v_\alpha + (D_x v_\alpha) \mathbf{J}_\alpha + \varrho_\alpha \overset{\circ}{v}_\alpha + \varrho_\alpha u_\alpha \bullet \nabla v_\alpha + \operatorname{div}_x \Pi_\alpha, \end{aligned}$$

hence

$$\mathbf{f}_\alpha = \varrho_\alpha (\overset{\circ}{v}_\alpha + u_\alpha \bullet \nabla v_\alpha) + \operatorname{div}_x \Pi_\alpha.$$

And the energy equation in the form of (IV10.6) with

$$\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}_x (\varepsilon v) = (\partial_t + v \bullet \nabla) \varepsilon + \varepsilon \operatorname{div}_x v = \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div}_x v.$$

□

We assume that the entropy depends on the same variables as before, that is (IV9.15)

$$\eta = \widehat{\eta}((\varrho_\beta)_\beta, \varepsilon) \quad (\text{IV10.7})$$

is satisfied. Then defining

$$M_\alpha := \Pi_\alpha^{rest} + u_\alpha \mathbf{J}_\alpha^T, \quad M := \sum_\beta M_\beta, \quad (\text{IV10.8})$$

(finally M_α will be chosen to be 0) we obtain

In Bearbeitung

11 Reaktions-Diffusionsgleichungen

Wir betrachten ein System von Massen mit Massendichten ϱ_α (mit $\alpha = 1, \dots, m$), für die wir die Massenbilanz

$$\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, m \quad (\text{IV11.1})$$

fordern. Dies heißt, dass die einzelnen Massen miteinander reagieren (mit

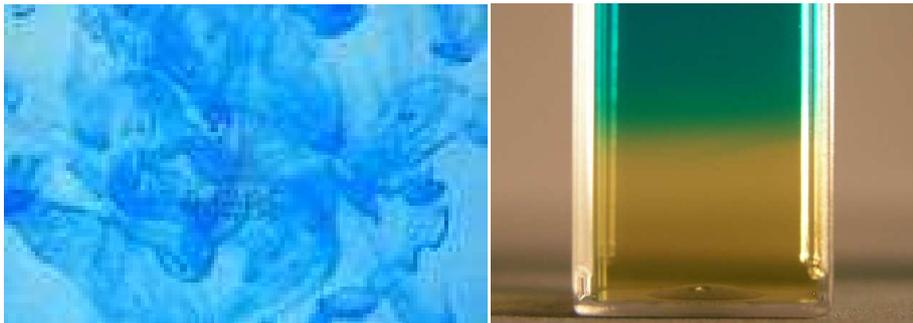


Abb. 29: *Links:* Bewegung einer Mischung. *Rechts:* Diffusion

Rate \mathbf{r}_α), und dass sie räumlich expandieren, also diffundieren (mit Fluss \mathbf{J}_α). Wir werden hier von einer Mischung der Klasse I im Sinne von Abschnitt III.3 ausgehen, d.h. die Massen werden (nur) mit einer Geschwindigkeit v transportiert, und es ist die Frage, was die Geschwindigkeit v ist. Wir werden in diesem Abschnitt die folgenden Geschwindigkeitsmittel von III.3.1 behandeln:

- Geschwindigkeit einer dominierenden Komponente (siehe III.3.1(3)),
- Baryzentrische Geschwindigkeit (siehe III.3.1(1)).

Referenzen: Landau & Lifschitz [10, Kapitel VI Diffusion], DeGroot & Mazur [6, Chap. XI Heat Conduction, Diffusion and Cross-Effects], I. Müller [87, 6.6.1.1 Phenomenological equations]. Und aus der mathematischen Literatur mit vielen Beispielen B. Perthame [90] und G.R. Gavalas [41, Chap. 2 Distributed Chemical Reaction Systems].

Insgesamt werden zu den Gleichungen in (IV11.1) für die Gesamtmasse

$$\varrho := \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha}$$

eine einzelne Impulserhaltung und eine gemeinsame Energieerhaltung gefor-

dert, so dass wir also ein System aus $m + 2$ Gleichungen erhalten:

Allgemeines Diffusionssystem:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) &= \mathbf{r}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \dots, m, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + v \mathbf{J}^T + \Pi) &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \frac{1}{2}|v|^2 \mathbf{J} + \Pi^T v + q) &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

Π symmetrischer Drucktensor (siehe weiter unten),
 $e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2$ Energie,
 zu \mathbf{J} , \mathbf{r} , $\tilde{\mathbf{f}}$, \tilde{g} siehe (IV11.3) und (IV11.4).

(IV11.2)

Hier ist die Energiebilanz aufgeführt, was einen Grund hat, nämlich dass die Temperatur bei Reaktionen teilweise eine wesentliche Rolle spielt, so etwa bei der Flammenausbreitung. Aber auch das Zusammenschütten zweier Substanzen, die dann reagieren, geschieht in der Regel mit einer Temperaturänderung. Die rechten Seiten \tilde{f} und \tilde{g} erfüllen (II3.32), da Π symmetrisch ist,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}} &= (\mathbf{r} + \mathbf{J} \bullet \nabla) v + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \text{ a } \mathbf{force} \text{ (see II.3.8),} \\ \tilde{g} &= \frac{\mathbf{r}}{2} |v|^2 + v \bullet Dv \mathbf{J} + v \bullet \mathbf{f} + g, \quad g \text{ an objective scalar,} \end{aligned}$$
(IV11.3)

und \mathbf{J} und \mathbf{r} sind die aufsummierten Größen

$$\mathbf{J} := \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha, \quad \mathbf{r} := \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha. \quad (\text{IV11.4})$$

Es sei bemerkt, dass die Massenerhaltung für die Gesamtmasse lautet

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) = \mathbf{r}, \quad (\text{IV11.5})$$

was durch Aufsummieren der Gleichungen für die Partialmassen folgt. Diese Massengleichung (IV11.5) und die Impuls-Energie Gleichungen transformieren sich wie das Masse-Impuls-Energie-System in III.2.1 bzw. in II.3.13. Das bestimmt die vorhandenen Größen Π als objektiven Tensor und q als objektiven Vektor. Wenn wir den abhängigen Erhaltungssatz (IV11.5) fordern, bleiben noch $m - 1$ unabhängige Gleichungen für die einzelnen Komponenten und die folgende Versionen der Impulserhaltung und der Energieerhaltung für die innere Energie ε (siehe III.2.3):

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v + \mathbf{J}) &= \mathbf{r}, \quad \varrho \text{ Gesamtmasse,} \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \quad \Pi \text{ symmetrisch,} \\ \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) &= -Dv \bullet \Pi + g, \quad \varepsilon \text{ innere Energie.} \end{aligned}$$

(IV11.6)

Schließlich postulieren wir das Entropieprinzip

$$\sigma := \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \geq 0 \quad (\text{IV11.7})$$

für Lösungen des Systems (IV11.2), wobei η die Entropie und ψ der Entropiefluss ist, beides sind Größen, die wir noch zu bestimmen haben. Bei dieser Bestimmung sind folgende Größen von eminenter Bedeutung:

11.1 Chemisches Potential. Falls für die Entropie $\eta = \widehat{\eta}(\vec{\varrho}, \varepsilon)$ gilt, wobei $\vec{\varrho} = (\varrho_\alpha)_\alpha$ der Vektor der Dichten, ist das *chemische Potential* μ_α der Spezies $\alpha \in \{1, \dots, m\}$ gegeben durch

$$\mu_\alpha := -\theta \eta'_{\varrho_\alpha} = f'_{\varrho_\alpha},$$

wobei entsprechend $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \theta)$ mit $f = \varepsilon - \theta \eta$ gilt und wie immer die *Temperatur* θ gegeben ist durch

$$\frac{1}{\theta} := \eta'_{\varepsilon}(\vec{\varrho}, \varepsilon).$$

Hinweis: Für eine einzelne Substanz hatten wir in 3.2 schon eine Definition gegeben. In 11.9 werden wir noch eine allgemeinere Definition machen für den Fall, dass die konstitutiven Funktionen noch von den Gradienten der Massendichten abhängen.

Gas in einem porösen Medium

Wir betrachten die Diffusion eines Gases in einem festen Körper. Es sei ein fester Körper mit Dichte ϱ_s und eine Flüssigkeit oder ein Gas mit der Dichte ϱ_g gegeben. Die Diffusionsgleichungen lauten (mit $m = 2$, $\varrho_1 = \varrho_g$ die Dichte des Gases, $\varrho_2 = \varrho_s$ die Dichte des festen Körpers)

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_g + \operatorname{div}(\varrho_g v + \mathbf{J}_g) &= 0, \\ \partial_t \varrho_s + \operatorname{div}(\varrho_s v) &= 0, \\ \varrho &= \varrho_s + \varrho_g, \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \\ \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) &= -Dv \bullet \Pi. \end{aligned} \quad (\text{IV11.8})$$

Hier haben wir die Formulierung der Impuls- und Energiegleichung so geschrieben, wie sie in III.2.3 (mit $\mathbf{J} = \mathbf{J}_g$ und $g = 0$) bewiesen wurde. Der Drucktensor Π wurde als symmetrisch vorausgesetzt und außerdem ist \mathbf{f} die klassische Kraft. Wir verlangen nun, dass für Lösungen von (IV11.8) das Entropieprinzip gilt.

11.2 Entropieprinzip (Gas im festen Körper). Das Entropieprinzip gilt für das System (IV11.8), falls für die Entropiedichte und den Entropiefluss

$$\eta = \widehat{\eta}(\varrho_g, \varrho_s, \varepsilon), \quad \psi = \eta v + \eta'_{\varrho_g} \mathbf{J}_g + \eta'_{\varepsilon} q,$$

und in der Impuls- und Energiegleichung (IV11.8)

$$\Pi = p \text{Id}, \quad p = \theta(\eta - \varrho_g \eta'_{\varrho_g} - \varrho_s \eta'_{\varrho_s}) - \varepsilon, \quad g = 0,$$

und wenn die Residualungleichung

$$\sigma = \nabla \eta'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q \geq 0$$

erfüllt ist. Mit den Identitäten (siehe 11.1)

$$\frac{1}{\theta} = \eta'_{\varepsilon}(\vec{\varrho}, \varepsilon), \quad -\frac{\mu_g}{\theta} = \eta'_{\varrho_g}(\vec{\varrho}, \varepsilon)$$

muss

$$\sigma = -\nabla\left(\frac{\mu_g}{\theta}\right) \bullet \mathbf{J}_g + \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) \bullet q \geq 0$$

sein. Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn skalare Funktionen $d \geq 0$ und $k \geq 0$ existieren mit

$$\mathbf{J}_g = -d \nabla\left(\frac{\mu_g}{\theta}\right), \quad q = k \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\frac{k}{\theta^2} \nabla \theta.$$

Beweis. Die Massengleichungen und die Energiegleichung im System können geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_g + \varrho_g \operatorname{div} v &= -\operatorname{div} \mathbf{J}_g, \\ \dot{\varrho}_s + \varrho_s \operatorname{div} v &= 0, \\ \dot{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div} v &= -Dv \bullet \Pi - \operatorname{div} q + g. \end{aligned}$$

Da $\eta = \widehat{\eta}(\varrho_g, \varrho_s, \varepsilon)$ sagt das Entropieprinzip, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma &= \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi = \dot{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \eta'_{\varrho_g} \dot{\varrho}_g + \eta'_{\varrho_s} \dot{\varrho}_s + \eta'_{\varepsilon} \dot{\varepsilon} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= (\eta - \varrho_g \eta'_{\varrho_g} - \varrho_s \eta'_{\varrho_s} - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{div} v - \eta'_{\varepsilon} Dv \bullet \Pi \\ &\quad - \eta'_{\varrho_g} \operatorname{div} \mathbf{J}_g - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q + \eta'_{\varepsilon} g + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= Dv \bullet \left((\eta - \varrho_g \eta'_{\varrho_g} - \varrho_s \eta'_{\varrho_s} - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \text{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi \right) \\ &\quad + \nabla \eta'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q + \eta'_{\varepsilon} g \\ &\quad + \operatorname{div}(\psi - \eta v - \eta'_{\varrho_g} \mathbf{J}_g - \eta'_{\varepsilon} q). \end{aligned}$$

The representation of Π and ψ in the statement give that the first term and the last term vanish. Thus

$$\sigma = \nabla \eta'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q + \eta'_{\varepsilon} g.$$

Finally, we choose $g = 0$ in accordance with the energy conservation. \square

Wenn wir nun zum isothermen Fall $\theta = \text{const}$ übergehen, so wird die Energiegleichung zusammen mit der Entropiegleichung ersetzt durch die freie Energiegleichung (siehe dazu III.5.4 und III.5.5), also bleiben zur Beschreibung des Systems nur die Massenerhaltungen und die Impulserhaltung übrig, d.h. mit $\varrho := \varrho_g + \varrho_s$

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho_g + \text{div}(\varrho_g v + \mathbf{J}_g) &= 0, \\ \partial_t \varrho_s + \text{div}(\varrho_s v) &= 0, \\ \varrho(\partial_t v + v \bullet \nabla v) + \text{div} \Pi &= \mathbf{f}.\end{aligned}\tag{IV11.9}$$

Zusätzlich haben wir die freie Energiegleichung III.5.4 zu berücksichtigen, die wir nun unabhängig diskutieren.

11.3 Freie Energiegleichung. Für das System (IV11.9) ist die freie Energiegleichung III.5.5 erfüllt, falls

$$f = \widehat{f}(\varrho_g, \varrho_s), \quad \varphi = f v + f'_{\varrho_g} \mathbf{J}_g,$$

und in der Impulsgleichung (IV11.9)

$$\Pi = p \text{Id}, \quad p = \varrho_g f'_{\varrho_g} + \varrho_s f'_{\varrho_s} - f,$$

und wenn die Residualungleichung

$$\sigma_f = \nabla f'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g \leq 0$$

erfüllt ist. *Beispiel:* Mit $d \geq 0$ sei etwa $\mathbf{J}_g = -d \nabla f'_{\varrho_g}(\varrho_g, \varrho_s)$.

Beweis. Für $\varrho = \varrho_g + \varrho_s$ ist $\partial_t \varrho + \text{div}(\varrho v + \mathbf{J}_g) = 0$ die Massengleichung für die gesamte Masse, und die gesamte Impulserhaltung ist in (IV11.9) enthalten. Daraus ergibt sich für die innere freie Energie $f = \widehat{f}(\varrho_g, \varrho_s)$, nach III.5.5 mit $g = 0$, die Ungleichung

$$\begin{aligned}0 &\geq \sigma_f = \partial_t f + \text{div} \varphi + Dv \bullet \Pi = \partial_t f + \text{div}(f v + f'_{\varrho_g} \mathbf{J}_g) + Dv \bullet \Pi \\ &= \overset{\circ}{f} + \text{div}(f'_{\varrho_g} \mathbf{J}_g) + Dv \bullet (f \text{Id} + \Pi) \\ &= f'_{\varrho_g} \overset{\circ}{\varrho}_g + f'_{\varrho_s} \overset{\circ}{\varrho}_s + \text{div}(f'_{\varrho_g} \mathbf{J}_g) + Dv \bullet (f \text{Id} + \Pi).\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varrho}_g + \varrho_g \text{div} v + \text{div} \mathbf{J}_g &= 0, \\ \overset{\circ}{\varrho}_s + \varrho_s \text{div} v &= 0,\end{aligned}$$

und daher ist

$$\begin{aligned}\sigma_f &= f'_{\varrho_g}(\overset{\circ}{\varrho}_g + \text{div} \mathbf{J}_g) + f'_{\varrho_s} \overset{\circ}{\varrho}_s + \nabla f'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g + Dv \bullet (f \text{Id} + \Pi) \\ &= \nabla f'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g + Dv \bullet ((f - \varrho_g f'_{\varrho_g} - \varrho_s f'_{\varrho_s}) \text{Id} + \Pi).\end{aligned}$$

If we choose Π so that the second term vanishes, we are left with

$$0 \geq \sigma_f = \nabla f'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g.$$

This proves the theorem. \square

Wir hatten noch nichts über die Geschwindigkeit v gesagt. Bei beliebigen Massendichten ϱ_g und ϱ_s gehen wir von einem baryzentrischen Mittel aus. Wenn jedoch ϱ_g sehr viel kleiner als ϱ_s ist, ist v nicht von der Geschwindigkeit des festen Körper zu unterscheiden, also ist v die Geschwindigkeit der dominierenden Komponente des festen Körper. Wie dem auch sei, wenn wir nun davon ausgehen, dass wir einen starren Körper haben, also $\varrho_s = \text{const}$ ist, und wenn der Beobachter, in den wir uns versetzen, von diesem starren Körper aus die Diffusion beobachtet, also wenn $v = 0$ ist, so bleiben nur noch zwei Gleichungen übrig, die Massenerhaltung für das Gas

$$\partial_t \varrho_g + \text{div} \mathbf{J}_g = 0 \quad (\text{IV11.10})$$

und die davon entkoppelte Impulserhaltung $\text{div} \Pi = \mathbf{f}$. Eine spezielle Lösung für diese erste Gasgleichung wurde von Barenblatt in [97] angegeben und zwar für den nichtlinearen Diffusionsfall. Die Lösung ist von der Gestalt $\varrho_g = u$ und $\mathbf{J}_g = -a(u, \nabla u)$, wobei im einfachsten Fall $f = \hat{f}(\varrho_g) = \frac{1}{2} |\varrho_g|^2$ die Elliptizität $0 \geq \nabla f'_{\varrho_g} \bullet \mathbf{J}_g$ der Gleichung aus dem Entropieprinzip 11.2 bzw. der freien Energieungleichung 11.3 herrührt. Also gilt die Massenerhaltung, dies falls u stetig differenzierbar ist,

$$\partial_t u - \text{div} a(u, \nabla u) = 0, \quad (\text{IV11.11})$$

was in 11.6 gezeigt wird. Der Beweis benutzt

11.4 Ähnlichkeitslösungen. Wir suchen Lösungen $(t, x) \mapsto u(t, x)$ von (IV11.11), wobei die Funktion a stetig sei, so dass $u(t, \bullet)$ für alle t "dieselbe Gestalt" hat, d.h. es gibt Funktionen $t \mapsto s(t)$ und $t \mapsto r(t) > 0$, so dass

$$u(t, x) = s(t) \tilde{u}(r(t)x) \quad (\text{IV11.12})$$

mit einer Funktion $y \mapsto \tilde{u}(y)$. Hier ist gemeint, dass die Funktionen r und s auf einem Zeitintervall stetig sind, und dass \tilde{u} eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^n ist.

11.5 Theorem. Betrachte (IV11.11) mit der folgenden Eigenschaft für die Funktion $(w, p) \mapsto a(w, p)$: Es gibt ein $m \geq 1$ und ein $l > 0$ mit

$$a(\sigma w, \sigma \tau q) = \sigma^m \tau^l a(w, q) \text{ für alle } \sigma > 0, \tau > 0, w \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^n.$$

Beachte: Für $\tau \rightarrow 0$ folgt $a(w, 0) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}$.

Weiter sei u nicht negativ und selbstähnlich zu \tilde{u} wie in (IV11.12) und $\nabla_y \tilde{u}(y)$ existiere klassisch in fast allen Punkten $y \in \mathbb{R}^n$. Darüberhinaus habe \tilde{u} ein geeignetes Abklingverhalten im Unendlichen. Dann sind äquivalent:

(1) Es ist u eine schwache Lösung von (IV11.11) und für ein $t = t_0$, z.B. zum Anfangszeitpunkt, existiert die "Gesamtmasse" $M(t) := \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx$ und ist ungleich 0.

(2) Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt die Differentialgleichung

$$\operatorname{div}_y [a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) + \lambda \tilde{u} y] = 0$$

wobei $\tilde{M} := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(y) dy \neq 0$ existiert und

$$\begin{aligned} r(t) &= c_0 t^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad s(t) = c_1 r(t)^n, \\ \alpha &= n(m-1) + l + 1, \quad \lambda \alpha c_0^\alpha c_1^{m-1} = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $r = \text{const}$ ist dies die Separation in den Variablen t und x .

Beweis. Für die gesamte Masse gilt

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} s(t) \tilde{u}(r(t)x) dx = \frac{s(t)}{r^n(t)} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(y) dy = \frac{s(t)}{r^n(t)} \tilde{M}$$

so dass also $M(t_0) \neq 0$ äquivalent ist zu $\tilde{M} \neq 0$. Wir betrachten Testfunktionen

$$\zeta(t, x) = r(t)^n \tilde{\zeta}(t, y) \text{ for } y = r(t)x.$$

Dann gilt (ohne Argumente)

$$\begin{aligned} u &= s\tilde{u}, \quad \nabla u = rs\nabla\tilde{u}, \quad a(u, \nabla u) = s^m r^l a(\tilde{u}, \nabla\tilde{u}), \\ \zeta &= r^n \tilde{\zeta}, \quad \nabla \zeta = r^{n+1} \nabla \tilde{\zeta}, \quad \partial_t \zeta = r^{n-1} (nr' \tilde{\zeta} + r \partial_t \tilde{\zeta} + r' y \bullet \nabla \tilde{\zeta}), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} &\langle \zeta, \partial_t [u] - \operatorname{div} [a(u, \nabla u)] \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} (-\partial_t \zeta \cdot u + \nabla \zeta \bullet a(u, \nabla u)) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{s}{r} (nr' \tilde{\zeta} + r \partial_t \tilde{\zeta} + r' y \bullet \nabla \tilde{\zeta}) \tilde{u} + r^{l+1} s^m \nabla \tilde{\zeta} \bullet a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \right) dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\tilde{\zeta} \cdot \left(s' - \frac{sn}{r} r' \right) \tilde{u} + \nabla \tilde{\zeta} \bullet \left(r^{l+1} s^m a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) - \frac{s}{r} r' \tilde{u} y \right) \right) dy dt. \end{aligned}$$

We use this calculation to derive two things. First we conclude that (2) implies (1). In fact, the definition of s and r implies

$$\frac{s'}{s} = n \frac{r'}{r}, \quad r^{l+1} s^m = c_0^{n+\alpha} c_1^m t^{-\frac{n+\alpha}{\alpha}}, \quad -s \frac{r'}{r} = \lambda c_0^{n+\alpha} c_1^m t^{-\frac{n+\alpha}{\alpha}},$$

therefore the term with $\tilde{\zeta}$ vanishes and the integral equals

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \tilde{\zeta} \bullet \left(r^{l+1} s^m a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) - \frac{s}{r} r' \tilde{u} y \right) dy dt \\ &= c_0^{n+\alpha} c_1^m \int_{\mathbb{R}} t^{-\frac{n+\alpha}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \tilde{\zeta} \bullet \left(a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) + \lambda \tilde{u} y \right) dy \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Second we prove that (1) implies (2). Then (1) says that u is a weak solution of (IV11.11) and we derive writing $\tilde{\zeta}(t, y) = \xi(t)\varphi(y)$ with $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ and $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \zeta, \partial_t[u] - \operatorname{div}[a(u, \nabla u)] \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\tilde{\zeta} \cdot \left(s' - \frac{sn}{r} r' \right) \tilde{u} + \nabla \tilde{\zeta} \bullet \left(r^{l+1} s^m a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) - \frac{s}{r} r' \tilde{u} y \right) \right) dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\xi \varphi \cdot \left(s' - \frac{sn}{r} r' \right) \tilde{u} + \xi \nabla \varphi \bullet \left(r^{l+1} s^m a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) - \frac{s}{r} r' \tilde{u} y \right) \right) dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi \cdot \left(s' - \frac{sn}{r} r', -\frac{s}{r} r', r^{l+1} s^m \right) dt \\ &\quad \bullet \int_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi \tilde{u}, \nabla \varphi \bullet (\tilde{u} y), \nabla \varphi \bullet a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \right) dy. \end{aligned}$$

If we denote by

$$\begin{aligned} I_1(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}} \xi \cdot \left(s' - \frac{sn}{r} r', -\frac{s}{r} r', r^{l+1} s^m \right) dt \in \mathbb{R}^3, \\ I_2(\varphi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi \tilde{u}, \nabla \varphi \bullet (\tilde{u} y), \nabla \varphi \bullet a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \right) dy \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

the two integrals, we have proved that for every ξ and φ

$$0 = I_1(\xi) \bullet I_2(\varphi) \quad (\text{IV11.13})$$

We conclude that there exist two subspaces U_1 and U_2 for which $U_1 \perp U_2$ is a subset of \mathbb{R}^3 such that $I_1(\xi) \in U_1$ and $I_2(\varphi) \in U_2$ for all ξ and φ .

From (IV11.13) it follows that for every ξ and φ

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \xi(t) \left(s' - \frac{sn}{r} r', -\frac{s}{r} r', r^{l+1} s^m \right) (t) \bullet I_2(\varphi) dt$$

and therefore that for almost all t (hence for t outside a null set which depends on φ), say for all $t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}_\varphi$ with a zero set \mathcal{N}_φ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(s' - \frac{sn}{r} r', -\frac{s}{r} r', r^{l+1} s^m \right) (t) \bullet I_2(\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mu(t) \varphi \tilde{u} + \nu(t) \nabla \varphi \bullet (\tilde{u} y) + \kappa(t) \nabla \varphi \bullet a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \right) dy \quad (\text{IV11.14}) \\ &\text{where } \mu := s' - \frac{sn}{r} r', \quad \nu := -\frac{s}{r} r', \quad \kappa := r^{l+1} s^m. \end{aligned}$$

If we choose a denumerable dense set $\{\varphi_i; i \in \mathbb{N}\}$ of test functions, we conclude that (IV11.14) holds for all $\varphi = \varphi_i, i \in \mathbb{N}$, and all

$$t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}, \text{ where } \mathcal{N} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{\varphi_i}$$

is also a null set. Now since the set $\{\varphi_i; i \in \mathbb{N}\}$ is a dense set in the space of test functions one can approach all characteristic functions $\mathcal{X}_{B_R(0)}$ with $R > 0$ (in the weak sense of BV -functions) by this numerable subset of test functions. Therefore one obtains as limit of (IV11.14) for $t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$

$$0 = \int_{B_R(0)} \mu(t) \tilde{u} \, dL^n - \int_{\partial B_R(0)} \nu_{B_R(0)} \bullet \left(\nu(t) \tilde{u} y + \kappa(t) a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \right) \, dH^{n-1}.$$

Hence, since by assumption $\tilde{u}(y)$ decays fast enough as $|y| \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \mu(t) \tilde{M} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} \mu(t) \tilde{u} \, dL^n \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R(0)} \nu_{B_R(0)} \bullet \left(\nu(t) \tilde{u} y + \kappa(t) a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u}) \right) \, dH^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Therefore, since $\tilde{M} \neq 0$, one concludes $\mu(t) = 0$ for $t \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$. Since

$$\lambda := \frac{\nu}{\kappa}$$

is continuous it follows that for $\varphi = \varphi_i, i \in \mathbb{N}$, equation (IV11.14) reads

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi \bullet (\lambda(t) \tilde{u} y + a(\tilde{u}, \nabla \tilde{u})) \, dy = 0, \quad (\text{IV11.15})$$

and therefore also for all test functions φ . Now, if the subset U_1 is more than one-dimensional, there would exist two different values $\lambda(t_1)$ and $\lambda(t_2)$ satisfying the differential equation (IV11.15). Then $\operatorname{div}_y(\tilde{u} y) = 0$, hence $y \bullet \nabla_y \tilde{u} + n \tilde{u} = 0$ and thus $\tilde{u}(y) = u_0 |y|^{-n}$ is unbounded, im Widerspruch zur vorausgesetzten Stetigkeit von \tilde{u} . Also ist die Dimension vom Unterraum U_1 eins und das impliziert, dass λ unabhängig von der Zeit ist, also $U_1 = \operatorname{span}(0, \lambda, 1)$. And for this λ the equation (IV11.15) holds, that is $\operatorname{div}_y [a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) + \lambda \tilde{u} y] = 0$.

And we have the properties from above

$$\mu(t) = 0, \quad \nu(t) = \lambda \kappa(t),$$

or

$$s' - \frac{sn}{r} r' = 0, \quad -\frac{s}{r} r' = \lambda r^{l+1} s^m.$$

The first equation says $s = c_1 r^n$, c_1 a constant, and than the second implies, if $c_1 \neq 0$,

$$-r' = \lambda c_1^{m-1} r^{\alpha+1}, \quad \alpha = n(m-1) + l + 1,$$

that is $(r^{-\alpha})' = \alpha \lambda c_1^{m-1}$ and therefore $r(t) = c_0 t^{-\frac{1}{\alpha}}$, with time shifted so that 0 becomes the singularity. Here c_0 is as in the formulation of the statement. \square

Now we choose the elliptic term as $a(u, \nabla u) := d(u) \nabla u$ with a scalar $d(u)$. Hence the condition in 11.4 it satisfied, if $l = 1$ and

$$d(u) := \begin{cases} 1 & \text{for } m = 1, \\ mu^{m-1} & \text{for } m > 1. \end{cases}$$

It is $u = r^n \tilde{u}(rx)$, where \tilde{u} is by 11.4 the solution of

$$\operatorname{div}_y(d(\tilde{u}) \nabla_y \tilde{u} + \lambda \tilde{u} y) = 0.$$

If $m = 1$ (and as above $d = 1$) the differential equation is the linear diffusion equation $\partial_t u - \operatorname{div} \nabla u = 0$. It is $u = s \tilde{u}(rx)$, where $r(t) = c_0 t^{-\frac{1}{2}}$, $s(t) = c_1 t^{-\frac{n}{2}}$, and $2\lambda c_0^2 = 1$, and where $\tilde{u}(y) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2}|y|^2\right)$, hence

$$u(t, x) = \frac{c_1}{t^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\left|\frac{x}{2\sqrt{t}}\right|^2\right), \quad (\text{IV11.16})$$

wich is, up to the constant c_1 , the fundamental solution of the heat operator.

If $m > 1$ (and as above $d(u) = mu^{m-1}$) the differential equation is a nonlinear equation $\partial_t u - \operatorname{div} \nabla(u^m) = 0$. There is the Barenblatt solution, which has compact support and for $m \geq 2$ is a distributional solution.

11.6 Barenblatt Lösung. Sei $m \in \mathbb{R}$ und $m > 1$. Eine Lösung der distributionellen Differentialgleichung

$$\partial_t[u] + \operatorname{div}(-[\nabla(u^m)]) = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(]0, \infty[\times \mathbb{R}^n)$$

ist gegeben durch

$$u(t, x) = Ct^{-\frac{n}{\alpha}} \max\left(0, w(t, x)\right)^{\frac{1}{m-1}}, \\ w(t, x) = R^2 - \left|\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right|^2,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ und $R > 0$ stetig sind. Die Lösung ist radial symmetrisch und hat kompakten Träger im Raum. Die Funktion u^m ist stetig differenzierbar, also ist $\nabla(u^m)$ stetig. Für $1 < m < 2$ ist u eine klassische Lösung, d.h.

$$\partial_t u - \Delta(u^m) = 0 \text{ in }]0, \infty[\times \mathbb{R}^n.$$

Beweis in $\{u > 0\}$. It is $m > 1$ and $d(u) = mu^{m-1}$. By 11.4 we have the equation for \tilde{u}

$$\operatorname{div}_y(\nabla_y \tilde{u}^m + \lambda \tilde{u} y) = 0,$$

which is satisfied, if $\lambda \tilde{u}y = -\nabla_y \tilde{u}^m$. This is true for

$$\tilde{u}(y) := (a - b|y|^2)^{\frac{1}{m-1}} \text{ for } a - b|y|^2 > 0 \text{ where } a, b \in \mathbb{R},$$

if $\lambda = \frac{2mb}{m-1}$. Indeed, $\tilde{u}(y)^m = (a - b|y|^2)^{\frac{m}{m-1}}$ and

$$\begin{aligned} \nabla_y \tilde{u}^m &= \frac{m}{m-1} (a - b|y|^2)^{\frac{1}{m-1}-1} 2by \\ &= \frac{2bm}{m-1} \tilde{u}(y)y = \lambda \tilde{u}(y)y \text{ if } \lambda = \frac{2mb}{m-1}. \end{aligned}$$

And $r(t) = c_0 t^{-\frac{1}{\alpha}}$, $s(t) = c_1 t^{-\frac{n}{\alpha}}$ (if the time is shifted) with $\alpha \lambda c_1^{m-1} c_0^{\alpha+1} = 1$ imply that

$$\begin{aligned} u(t, x) &= r(t) \tilde{u}(s(t)x) = c_1 t^{-\frac{n}{\alpha}} \left(a - b \left| c_0 \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &= c_1 t^{-\frac{n}{\alpha}} \left(a - b c_0^2 \left| \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &= (c_1 (b c_0^2)^{\frac{1}{m-1}}) t^{-\frac{n}{\alpha}} \left(\frac{a}{b c_0^2} - \left| \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &= C t^{-\frac{n}{\alpha}} \left(R^2 - \left| \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} C &= c_1 (b c_0^2)^{\frac{1}{m-1}}, \quad R = \left(\frac{a}{b c_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ b &= \frac{(m-1)\lambda}{2m}, \quad \alpha \lambda c_1^{m-1} c_0^{\alpha+1} = 1. \end{aligned}$$

Here C , R , and λ are three independent constants. \square

Beweis im ganzen Raum. Auf jeden Fall ist die Lösung u stetig im ganzen Raum. Für $m < 2$, d.h. $\frac{1}{m-1} > 1$, ist die Lösung am Rande von $D := \{(t, x); |x| < R t^{\frac{1}{\alpha}}\}$ stetig differenzierbar, also eine klassische Lösung in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Im allgemeinen ist in D

$$u^m = C^m t^{-\frac{nm}{\alpha}} \left(R^2 - \left| \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^2 \right)^{\frac{m}{m-1}},$$

und da $\frac{m}{m-1} > 1$ ist, ist u^m auf dem Rand von D stetig differenzierbar. Also ist $\nabla(u^m)$ punktweise auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert und dort eine stetige Funktion. Daher ist es eine Distribution. Man kann dies auch einsehen, indem man $\nabla(u^m)$ auf D berechnet

$$\begin{aligned} \nabla(u^m) &= -C^m \frac{1}{t^{\frac{nm}{\alpha}}} \frac{m}{m-1} \left(R^2 - \left| \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{2}{t^{\frac{2}{\alpha}}} x \\ &= -C^m \frac{1}{t^{\frac{nm+2}{\alpha}}} \frac{m}{m-1} \frac{t^{\frac{n}{\alpha}}}{C} 2ux = -C^{m-1} \frac{1}{t^{\frac{n(m-1)+2}{\alpha}}} \frac{m}{m-1} 2ux. \end{aligned}$$

\square

Baryzentrische Geschwindigkeit

Beim baryzentrischen Mittel in III.3.1(1) werden die Konzentrationen der einzelnen Phasen

$$c_\alpha := \frac{\varrho_\alpha}{\varrho} \text{ für die Phase } \alpha, \text{ mit } \sum_\alpha c_\alpha = 1, \quad (\text{IV11.17})$$

betrachtet. Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen.

11.7 Lemma. Die Massenbilanzen sind äquivalent zu

$$\varrho(\partial_t c_\alpha + v \bullet \nabla c_\alpha) + \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha - c_\alpha \operatorname{div} \mathbf{J} = \mathbf{r}_\alpha - c_\alpha \mathbf{r}$$

für $\alpha = 1, \dots, m$ und der Gesamtmassenbilanz in (IV11.6). Dabei sind \mathbf{J} und \mathbf{r} wie in (IV11.4) definiert. *Häufiger Standardfall:* Sind die Gesamtgrößen $\mathbf{J} = 0$ und $\mathbf{r} = 0$, so gelten für die Konzentration c_α

$$\varrho(\partial_t c_\alpha + v \bullet \nabla c_\alpha) + \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha. \quad (\text{IV11.18})$$

Beweis. Die Massenerhaltung für die Phase α ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha &= \partial_t(\varrho c_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho c_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) \\ &= \varrho(\partial_t c_\alpha + v \bullet \nabla c_\alpha) + \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha + c_\alpha \underbrace{(\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v))}_{= \mathbf{r} - \operatorname{div} \mathbf{J}}, \end{aligned}$$

which is the assertion. Remember that the m equations for the concentrations are $m - 1$ independent equations. \square

Wichtig bei der Berechnung von σ wird folgende Definition sein. Hierbei wird g ein “Funktional” sein, d.h. es hängt von Funktionen, hier $\vec{\varrho}$ und \vec{u} , ab. Dies kann dadurch gegeben sein, dass $g(\vec{\varrho}, \vec{u})(y) = \widehat{g}(\vec{\varrho}(y), \vec{u}(y))$ oder dass zum Beispiel $g(\vec{\varrho}, \vec{u})(y) = \widehat{g}(\vec{\varrho}(y), \nabla \vec{\varrho}(y), \vec{u}(y))$, also eine “lokale Abhängigkeit”.

11.8 Definition (Erste Variation). Es sei g ein *Funktional* abhängig von Funktionen $\vec{\varrho} = (\varrho_\alpha)_\alpha$ und $\vec{u} = (u_k)_k$ in $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$, also

$$g = g(\vec{\varrho}, \vec{u}) \text{ im Funktionenraum.}$$

Dann existiert die *erste Variation* $\frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}}$ von g nach $\vec{\varrho}$, falls $\frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}}$ eine \mathcal{L}^1 -Funktion ist, für die für $\zeta = (\zeta_\alpha)_\alpha$ mit $\zeta_\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ gilt

$$\int_{\mathcal{U}} \zeta \bullet \frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}} dL^N = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\delta} (g(\vec{\varrho} + \delta \zeta, \vec{u}) - g(\vec{\varrho}, \vec{u})) dL^N.$$

Es gelten die folgenden Aussagen:

(1) Ist g eine konstitutive Funktion $y \mapsto g(\vec{\varrho}, \vec{u})(y) = \widehat{g}(\vec{\varrho}(y), \vec{u}(y))$, so gilt

$$\frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}} = \left(\frac{\delta g}{\delta \varrho_\alpha} \right)_\alpha, \quad \frac{\delta g}{\delta \varrho_\alpha} = \widehat{g}'_{\varrho_\alpha}.$$

(2) Ist g eine konstitutive Funktion $y \mapsto g(\vec{\varrho}, \vec{u})(y) = \widehat{g}(\vec{\varrho}(y), \nabla \vec{\varrho}(y), \vec{u}(y))$, so gilt

$$\frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}} = \left(\frac{\delta g}{\delta \varrho_\alpha} \right)_\alpha, \quad \frac{\delta g}{\delta \varrho_\alpha} = \widehat{g}'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div}(\widehat{g}'_{\nabla \varrho_\alpha}).$$

Hinweis: Die Darstellung in (1) bedeutet $g(\vec{\varrho}, \vec{u}) = \widehat{g}(\vec{\varrho}(\cdot), \vec{u}(\cdot))$, in (2) entsprechend $g(\vec{\varrho}, \vec{u}) = \widehat{g}(\vec{\varrho}(\cdot), \nabla \vec{\varrho}(\cdot), \vec{u}(\cdot))$.

Beweis (1).

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \zeta \bullet \frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}} dL^N &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\delta} (g(\vec{\varrho} + \delta \zeta, \vec{u}) - g(\vec{\varrho}, \vec{u})) dL^N \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\delta} (\widehat{g}(\vec{\varrho} + \delta \zeta, \vec{u}) - \widehat{g}(\vec{\varrho}, \vec{u})) dL^N \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}} \int_0^1 (\nabla_{\vec{\varrho}} \widehat{g})(\vec{\varrho} + s\delta \zeta, \vec{u}) \bullet \zeta ds dL^N = \int_{\mathcal{U}} (\nabla_{\vec{\varrho}} \widehat{g})(\vec{\varrho}, \vec{u}) \bullet \zeta dL^N. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle Testfunktionen ζ , also

$$\frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}} = \nabla_{\vec{\varrho}} g = g'_{\vec{\varrho}}.$$

□

Beweis (2). Wir nehmen an, dass $g(\vec{\varrho}, \vec{u}) = \widehat{g}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \vec{u})$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \zeta \bullet \frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}} dL^N &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\delta} (g(\vec{\varrho} + \delta \zeta, \vec{u}) - g(\vec{\varrho}, \vec{u})) dL^N \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\delta} \left(\widehat{g}((\partial^\beta \vec{\varrho} + \delta \partial^\beta \zeta)_{|\beta| \leq 1}, \vec{u}) - \widehat{g}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \vec{u}) \right) dL^N \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}} \int_0^1 \sum_{\alpha: |\alpha| \leq 1} \widehat{g}'_{\partial^\alpha \vec{\varrho}}((\partial^\beta \vec{\varrho} + s\delta \partial^\beta \zeta)_{|\beta| \leq 1}, \vec{u}) \bullet \partial^\alpha \zeta ds dL^N \\ &= \int_{\mathcal{U}} \sum_{\alpha: |\alpha| \leq 1} \widehat{g}'_{\partial^\alpha \vec{\varrho}}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \vec{u}) \bullet \partial^\alpha \zeta dL^N \\ &= \int_{\mathcal{U}} \sum_{\alpha: |\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \left(\widehat{g}'_{\partial^\alpha \vec{\varrho}}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \vec{u}) \right) \bullet \zeta dL^N. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle Testfunktionen ζ , also ist

$$\frac{\delta g}{\delta \vec{\varrho}} = \sum_{\alpha: |\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \left(\widehat{g}'_{\partial^\alpha \vec{\varrho}}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \vec{u}) \right) = g'_{\vec{\varrho}} - \operatorname{div}(g'_{\nabla \vec{\varrho}}).$$

□

Dass die Gleichungen in 11.8(2) eine Bedeutung haben, werden wir bei der Allen-Cahn und der Cahn-Hilliard Gleichung sehen, in der Mathematik sind die Euler-Lagrange Gleichungen ein Beispiel. Wir benutzen die erste Variation zur Definition des

11.9 Chemisches Potential. Sei η die Entropie und es sei mit $\vec{\varrho} = (\varrho_\alpha)_\alpha$ entweder $\eta = \widehat{\eta}(\vec{\varrho}, \varepsilon)$ oder $\eta = \widehat{\eta}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho}, \varepsilon)$. Wir setzen wieder

$$f = \varepsilon - \theta \eta, \quad \theta = \frac{1}{\eta'_{\varepsilon}},$$

wobei $\eta'_{\varepsilon} := \widehat{\eta}'_{\varepsilon}$, sowie ε die innere Energie, θ die Temperatur und f die innere freie Energie ist. Dann ist das **chemische Potential** bzgl. der Komponente ϱ_α einerseits definiert durch die Entropie η

$$\mu_\alpha^s := -\theta \frac{\delta \eta}{\delta \varrho_\alpha}$$

und andererseits durch die innere freie Energie f

$$\mu_\alpha^f := \frac{\delta f}{\delta \varrho_\alpha},$$

was im Allgemeinen ein anderes Potential ist.

(1) Im Falle dass $\eta = \widehat{\eta}(\vec{\varrho}, \varepsilon)$, entsprechend $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \theta)$, gilt, sind die chemischen Potentiale $\mu_\alpha := \mu_\alpha^s = \mu_\alpha^f$ beide gleich, also

$$\mu_\alpha := -\theta \eta'_{\varrho_\alpha} = f'_{\varrho_\alpha}.$$

(2) Gilt $\eta = \widehat{\eta}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho}, \varepsilon)$, entsprechend $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho}, \theta)$, so ist

$$\mu_\alpha^f = f'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div}(f'_{\nabla \varrho_\alpha}), \quad \mu_\alpha^s = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha} + \theta \operatorname{div}(\eta'_{\nabla \varrho_\alpha}),$$

und die Differenz zwischen μ_α^f und μ_α^s ist

$$\mu_\alpha^f - \mu_\alpha^s = \eta'_{\nabla \varrho_\alpha} \bullet \nabla \theta.$$

Bemerkung: Eine einheitliche Definition von μ_α findet sich auch in 12.3.

(3) **Falls die freie Energiegleichung benutzt wird.** Ist $\theta = \text{const}$, so wird nur f gebraucht und falls $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho}, \theta)$ gilt

$$\mu_\alpha := \mu_\alpha^f = f'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div} f'_{\nabla \varrho_\alpha}.$$

Historie: Zur Definition des chemischen Potentials $\mu_\alpha = -\theta\eta'_{\varrho_\alpha}$ siehe die Formel [87, (6.47) S. 185] im Buch von I. Müller. Zur Historie sei bemerkt, dass der Begriff des “chemischen Potentials” von Gibbs stammt, siehe dazu [Wikipedia: Chemical potential – History].

In diesem Zusammenhang sei auch auf die Stetigkeit des chemischen Potentials an der Grenze verschiedener Medien in 12.2 Bezug genommen.

Referenzen: Es sei auf I. Müller [87, 6.3.2.5 Chemical potentials] verwiesen. Siehe auch [Wikipedia: Chemical potential], wo chemische Potentiale bzgl. der N_α (siehe III.3.1(2)) betrachtet werden.

Beweis. Wenn wir konstitutive Funktionen annehmen, also

$$\begin{aligned}\eta &= \widehat{\eta}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \varepsilon), & f &= \widehat{f}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \theta) \\ \theta &= \widehat{\theta}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \varepsilon),\end{aligned}$$

dann gelten die Gleichungen

$$f = \varepsilon - \theta\eta, \quad \theta\eta'_{\varepsilon} = 1, \quad (\text{IV11.19})$$

wobei bemerkt sei, dass wie immer die Ableitung $\eta'_{\varepsilon} := \widehat{\eta}'_{\varepsilon}$ ist. Also können wir schreiben

$$\widehat{f}'_{\theta}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \widehat{\theta}'_{\varepsilon}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \varepsilon)) = \varepsilon - \widehat{\theta}'_{\varepsilon}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \varepsilon) \widehat{\eta}'_{\varepsilon}((\partial^\beta \vec{\varrho})_{|\beta| \leq 1}, \varepsilon).$$

Wenn wir dies nach ε ableiten, erhalten wir (ohne Argumente)

$$\widehat{f}'_{\theta} \widehat{\theta}'_{\varepsilon} = \underbrace{1 - \widehat{\theta}'_{\varepsilon} \widehat{\eta}'_{\varepsilon}}_{= 0} - \widehat{\theta}'_{\varepsilon} \widehat{\eta}'_{\varepsilon},$$

also $\widehat{f}'_{\theta} = -\widehat{\eta}'_{\varepsilon}$ (falls $\widehat{\theta}'_{\varepsilon} \neq 0$, or $\eta'_{\varepsilon\varepsilon} \neq 0$). Nun betrachten wir die Ableitung nach $\partial^\gamma \vec{\varrho}$ für $|\gamma| \leq 1$. Sie ist gleich

$$\widehat{f}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}} + \widehat{f}'_{\theta} \widehat{\theta}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}} = -\widehat{\theta}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}} \widehat{\eta}'_{\varepsilon} - \widehat{\theta}'_{\varepsilon} \widehat{\eta}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}}.$$

Da schon $\widehat{f}'_{\theta} = -\widehat{\eta}'_{\varepsilon}$ gezeigt war, ist also $\widehat{f}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}} - \widehat{\theta}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}} \widehat{\eta}'_{\varepsilon}$. Wir haben also gezeigt, dass

$$\begin{aligned}\widehat{f}'_{\theta} &= -\widehat{\eta}'_{\varepsilon}, \\ \widehat{f}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}} &= -\widehat{\theta}'_{\partial^\gamma \vec{\varrho}} \widehat{\eta}'_{\varepsilon} \text{ für } |\gamma| \leq 1.\end{aligned}$$

Oder anders geschrieben

$$\begin{aligned}\widehat{f}'_{\theta} &= -\widehat{\eta}'_{\varepsilon}, \\ f'_{\varrho_\alpha} &= -\theta \eta'_{\varrho_\alpha}, \\ f'_{\nabla \varrho_\alpha} &= -\theta \eta'_{\nabla \varrho_\alpha}.\end{aligned}$$

Zum Beweis von (2) gilt daher

$$\begin{aligned}\mu_\alpha^f - \mu_\alpha^s &= f'_{\varrho_\alpha} + \theta \eta'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div}(f'_{\nabla \varrho_\alpha}) - \theta \operatorname{div}(\eta'_{\nabla \varrho_\alpha}) \\ &= \operatorname{div}(\theta \eta'_{\nabla \varrho_\alpha}) - \theta \operatorname{div}(\eta'_{\nabla \varrho_\alpha}) = \eta'_{\nabla \varrho_\alpha} \bullet \nabla \theta.\end{aligned}$$

Die Aussage (1) ergibt sich als Spezialfall, da dann

$$\mu_\alpha^s = -\theta \frac{\delta \eta}{\delta \varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha} = f'_{\varrho_\alpha} = \frac{\delta f}{\delta \varrho_\alpha} = \mu_\alpha^f$$

da ja $f'_{\varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha}$. □

Isothermer Fall

Häufig werden Reaktions-Diffusionsgleichungen in der isothermen Situation $\theta = \theta_0 = \text{const}$ behandelt, wobei wir hier der Einfachheit halber nur den Fall

$$\mathbf{r} = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0, \quad \mathbf{J} = \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = 0 \quad (\text{IV11.20})$$

betrachten. In dieser Situation ist das Entropieprinzip durch die freie Energiegleichung zu ersetzen, siehe dazu Abschnitt III.5. Das System der Erhaltungsgleichungen besteht in diesem Fall nur aus den Massenerhaltungen und der gemeinsamen Impulserhaltung (die Kraft ist die klassische Kraft, da $\mathbf{r} = 0$ und $\mathbf{J} = 0$ ist)

Isothermes Reaktions-Diffusions-System:

$$\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \dots, m,$$

$$\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) = \mathbf{f},$$

$$\varrho := \sum_\alpha \varrho_\alpha \text{ Gesamtmasse, } \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0,$$

$$\Pi \text{ symmetrischer Drucktensor, } \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = 0,$$

\mathbf{f} klassische Kraft (siehe II.3.8).

(IV11.21)

Es wird die freie Energiegleichung (siehe im Abschnitt III.5 das Axiom III.5.4)

$$\sigma_f := \partial_t f^{tot} + \operatorname{div} \varphi^{tot} - v \bullet \mathbf{f} \leq 0$$

gefordert, also mit

$$f^{tot} = f + \frac{\varrho}{2} |v|^2, \quad f \text{ die innere freie Energie,}$$

ergeben sich folgenden Gleichungen.

11.10 Lemma. Wenn

$$f^{tot} = f + f^{kin}, \quad \varphi^{tot} = f^{tot}v + \Pi^T v + \varphi. \quad (\text{IV11.22})$$

so gilt für die kinetische Energie $f^{kin} := \frac{\rho}{2}|v|^2$

$$\partial_t f^{kin} + \operatorname{div}(f^{kin}v + \Pi^T v) = v \bullet \mathbf{f} + Dv \bullet \Pi.$$

und für die freie Energieproduktion

$$\sigma_f = \partial_t f + \operatorname{div}(fv + \varphi) + Dv \bullet \Pi.$$

Hinweis: Im Allgemeinen muss $\sigma_f = \partial_t f^{tot} + \operatorname{div}\varphi^{tot} + g^{tot}$ als objektiver Skalar gewählt werden, also etwa $g^{tot} = -\frac{|v|^2}{2}\mathbf{r} - v \bullet Dv \mathbf{J} - v \bullet \mathbf{f}$. Hier ist aber $\mathbf{r} = 0$ und $\mathbf{J} = 0$.

Beweis. Die Gleichung für die Gesamtmasse und den Impuls ist

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\ \rho(\partial_t v + (v \bullet \nabla)v) + \operatorname{div}\Pi &= \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Dann ist (vgl. III.2.2)

$$\begin{aligned} &\partial_t \left(\frac{\rho}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\rho}{2} |v|^2 v \right) \\ &= \frac{|v|^2}{2} (\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v)) + \rho v \bullet (\partial_t v + (v \bullet \nabla)v) \\ &\quad \left(\text{wegen } \nabla \frac{|v|^2}{2} = v \bullet (Dv)^T = (v \bullet \nabla)v \right) \\ &= v \bullet (\mathbf{f} - \operatorname{div}\Pi) = -\operatorname{div}(\Pi^T v) + v \bullet \mathbf{f} + Dv \bullet \Pi. \end{aligned}$$

Das ist die erste Gleichung und sie weist das gleiche Transformationsverhalten wie die Energiegleichung auf. Die zweite Gleichung folgt wegen

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \partial_t f^{tot} + \operatorname{div}\varphi^{tot} - v \bullet \mathbf{f} \\ &= \partial_t (f + f^{kin}) + \operatorname{div}(fv + f^{kin}v + \Pi^T v + \varphi) - v \bullet \mathbf{f} \\ &= \partial_t f + \operatorname{div}(fv + \varphi) + Dv \bullet \Pi. \end{aligned}$$

Es ist φ ein objektiver Vektor. □

Somit lautet die freie Energiegleichung

$$0 \geq \sigma_f = \partial_t f + \operatorname{div}(fv + \varphi) + Dv \bullet \Pi. \quad (\text{IV11.23})$$

Wir können die folgenden Fälle unterscheiden.

11.11 Spezialfälle. Wir nehmen an, dass für die innere Energie (IV11.22) gilt und dass mit $\Pi = P - S$ der Spannungstensor S

$$Dv \bullet S \geq 0, \quad S = \widehat{S}(\vec{\varrho}, (Dv)^S), \quad \widehat{S}(\vec{\varrho}, 0) = 0$$

erfüllt und symmetrisch ist. In allen drei Fällen gilt

$$\sigma_f = -Dv \bullet S + \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \nabla \mu_{\alpha} \bullet \mathbf{J}_{\alpha}),$$

wobei in den Fällen folgende Voraussetzungen gelten:

(1) **Reaktions-Diffusions-Modelle.** Es ist $f = \widehat{f}(\vec{\varrho})$, also $\mu_{\alpha} = f'_{\varrho_{\alpha}}$. Es sind \mathbf{J}_{α} die Diffusionsterme und \mathbf{r}_{α} die Reaktionsraten. Die Massenerhaltungen lauten

$$\partial_t \varrho_{\alpha} + \operatorname{div}(\varrho_{\alpha} v + \mathbf{J}_{\alpha}) = \mathbf{r}_{\alpha} \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, m.$$

Die freie Energiegleichung ist erfüllt, wenn (es ist $\varphi = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}$)

$$P = \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} f'_{\varrho_{\alpha}} - f \right) \operatorname{Id} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha} (\nabla \mu_{\alpha} \bullet \mathbf{J}_{\alpha} + \mu_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) \leq 0.$$

Wähle die Diffusionsterme $\mathbf{J}_{\alpha} = \widehat{\mathbf{J}}_{\alpha}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho})$ und die Reaktionsraten $\mathbf{r}_{\alpha} = \widehat{\mathbf{r}}_{\alpha}(\vec{\varrho})$ so, dass die Ungleichung

$$\sum_{\alpha} (\nabla(f'_{\varrho_{\alpha}}(\vec{\varrho})) \bullet \widehat{\mathbf{J}}_{\alpha}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho}) + f'_{\varrho_{\alpha}}(\vec{\varrho}) \cdot \widehat{\mathbf{r}}_{\alpha}(\vec{\varrho})) \leq 0$$

erfüllt ist.

(2) **Allen-Cahn Gleichung.** Es ist $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho})$ (beachte 11.12) und es ist $\mathbf{J}_{\alpha} = 0$ für alle α . Dann ist $\mu_{\alpha} = \frac{\delta f}{\delta \varrho_{\alpha}}$ und die Massengleichungen lauten

$$\partial_t \varrho_{\alpha} + \operatorname{div}(\varrho_{\alpha} v) = \mathbf{r}_{\alpha} \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, m.$$

Die freie Energiegleichung ist erfüllt, wenn (es ist $\varphi = -\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} f'_{\nabla \varrho_{\alpha}}$)

$$P = \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \mu_{\alpha} - f \right) \operatorname{Id} + \sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} (f'_{\nabla \varrho_{\alpha}})^T \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \leq 0.$$

Also wähle etwa $\mathbf{r}_{\alpha} = \widehat{\mathbf{r}}_{\alpha}(\vec{\varrho}, (\mu_{\beta})_{\beta})$ mit der Ungleichung

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \widehat{\mathbf{r}}_{\alpha}(\vec{\varrho}, (\mu_{\beta})_{\beta}) \leq 0.$$

Beispiel: $\mathbf{r}_{\alpha} = -\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}(\vec{\varrho}) \mu_{\beta}$ mit positiv semidefinitem $(c_{\alpha\beta}(\vec{\varrho}))_{\alpha,\beta}$.

(3) **Cahn-Hilliard Gleichung.** Es ist $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho})$ (beachte 11.12) und es ist $\mathbf{r}_\alpha = 0$ für alle α . Also sind $\mu_\alpha = \frac{\delta f}{\delta \varrho_\alpha}$ und die Massengleichungen lauten

$$\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) = 0 \text{ für } \alpha = 1, \dots, m.$$

Die freie Energiegleichung ist erfüllt, wenn $(\varphi = \sum_\alpha \mu_\alpha \mathbf{J}_\alpha - \sum_\alpha \overset{\circ}{\varrho}_\alpha f'_{\nabla \varrho_\alpha})$

$$P = \left(\sum_\alpha \varrho_\alpha \mu_\alpha - f \right) \operatorname{Id} + \sum_\alpha \nabla \varrho_\alpha (f'_{\nabla \varrho_\alpha})^T \quad \text{und} \quad \sum_\alpha \nabla \mu_\alpha \bullet \mathbf{J}_\alpha \leq 0.$$

Also wähle etwa $\mathbf{J}_\alpha = \widehat{\mathbf{J}}_\alpha(\vec{\varrho}, \vec{\mu}, (\nabla \mu_\beta)_\beta)$, wobei $\vec{\mu} := (\mu_\beta)_\beta$, mit der Ungleichung

$$\sum_\alpha \nabla \mu_\alpha \bullet \widehat{\mathbf{J}}_\alpha(\vec{\varrho}, \vec{\mu}, (\nabla \mu_\beta)_\beta) \leq 0.$$

Beispiel: $\mathbf{J}_\alpha = -\sum_\beta c_{\alpha\beta}(\vec{\varrho}, \vec{\mu}) \nabla \mu_\beta$ mit positiv semidefinitem $(c_{\alpha\beta}(\vec{\varrho}, \vec{\mu}))_{\alpha,\beta}$.

Man muss hierbei die Nebenbedingung (IV11.20) und die Energiegleichung berücksichtigen. Man kann diese Gleichungen natürlich auch in den Konzentrationen schreiben. Oft werden diese Gleichungen auch mit $\varrho = \sum_\alpha \varrho_\alpha = \text{const}$ und auch, falls die Impulsgleichung dies erlaubt, mit Beobachtern betrachtet, für die $v = 0$ ist.

Beweis (1). Es ist $f = \widehat{f}(\vec{\varrho})$, also $\mu_\alpha = f'_{\varrho_\alpha}$ und

$$\overset{\circ}{f} = \sum_\alpha f'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha = \sum_\alpha \mu_\alpha \overset{\circ}{\varrho}_\alpha, \quad \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div} v = \mathbf{r}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha.$$

Damit folgt mit (IV11.23)

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \overset{\circ}{f} + f \operatorname{div} v + \operatorname{div} \varphi + Dv \bullet \Pi = \sum_\alpha f'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + f \operatorname{div} v + Dv \bullet \Pi + \operatorname{div} \varphi \\ &= \left(f - \sum_\alpha \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} \right) \operatorname{div} v + Dv \bullet \Pi + \sum_\alpha \mu_\alpha (\mathbf{r}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha) + \operatorname{div} \varphi \\ &= Dv \bullet \left(\left(f - \sum_\alpha \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} \right) \operatorname{Id} + \Pi \right) + \sum_\alpha (\mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha + \nabla \mu_\alpha \bullet \mathbf{J}_\alpha), \end{aligned}$$

wenn $\varphi = \sum_\alpha \mu_\alpha \mathbf{J}_\alpha$ gesetzt wird. Wenn wir nun S so wählen, dass $\Pi = (\sum_\alpha \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} - f) \operatorname{Id} - S$, bleibt also

$$\sigma_f = -Dv \bullet S + \sum_\alpha (\mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha + \nabla \mu_\alpha \bullet \mathbf{J}_\alpha)$$

übrig. Hier $Dv \bullet S \geq 0$ aus den allgemeinen Voraussetzungen. \square

Beweis (2) und (3). Es ist $f = \widehat{f}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho})$, wobei dies als innere Energie ein objektiver Skalar sein soll. Daher ist

$$\mu_\alpha = \frac{\delta f}{\delta \varrho_\alpha} = f'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div} f'_{\nabla \varrho_\alpha}.$$

Wir haben jetzt

$$\overset{\circ}{f} = \sum_{\alpha} f'_{\varrho_{\alpha}} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} + \sum_{\alpha} f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} \bullet (\nabla \varrho_{\alpha})^{\circ},$$

wobei für die totale Zeitableitung von $\nabla \varrho_{\alpha}$ gilt

$$(\nabla \varrho_{\alpha})^{\circ} = \nabla \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} - Dv^{\text{T}} \nabla \varrho_{\alpha}, \quad (\text{IV11.24})$$

was sich aus der folgenden Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} (\partial_i \varrho_{\alpha})^{\circ} &= \partial_t (\partial_i \varrho_{\alpha}) + (v \bullet \nabla) (\partial_i \varrho_{\alpha}) \\ &= \underbrace{\partial_t \partial_i \varrho_{\alpha}}_{\partial_i \partial_t \varrho_{\alpha}} + \sum_{j=1}^n v_j \underbrace{\partial_j \partial_i \varrho_{\alpha}}_{\partial_i \partial_j \varrho_{\alpha}} \\ &= \partial_i \partial_t \varrho_{\alpha} + \sum_{j=1}^n (\partial_i (v_j \partial_j \varrho_{\alpha}) - (\partial_i v_j) (\partial_j \varrho_{\alpha})) \\ &= \partial_i \left(\partial_t \varrho_{\alpha} + \sum_{j=1}^n v_j \partial_j \varrho_{\alpha} \right) - \sum_{j=1}^n (\partial_i v_j) (\partial_j \varrho_{\alpha}) \\ &= \partial_i \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} - (Dv^{\text{T}} \nabla \varrho_{\alpha})_i. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{f} &= \sum_{\alpha} f'_{\varrho_{\alpha}} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} + \sum_{\alpha} f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} \bullet \nabla \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \underbrace{f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} \bullet Dv^{\text{T}} \nabla \varrho_{\alpha}}_{= Dv \bullet (\nabla \varrho_{\alpha} (f'_{\nabla \varrho_{\alpha}})^{\text{T}})} \\ &= \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} + \text{div} \left(\sum_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} \right) - Dv \bullet \left(\sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} (f'_{\nabla \varrho_{\alpha}})^{\text{T}} \right). \end{aligned}$$

Also folgt wegen $\overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} = -\varrho_{\alpha} \text{div} v + \mathbf{r}_{\alpha} - \text{div} \mathbf{J}_{\alpha}$

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \overset{\circ}{f} + f \text{div} v + \text{div} \varphi + Dv \bullet \Pi \\ &= \left(f - \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \mu_{\alpha} \right) \text{div} v + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} - \text{div} \mathbf{J}_{\alpha}) \\ &\quad + \text{div} \left(\varphi + \sum_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} \right) + Dv \bullet \left(\Pi - \sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} (f'_{\nabla \varrho_{\alpha}})^{\text{T}} \right) \\ &= Dv \bullet \left(\Pi - \sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} (f'_{\nabla \varrho_{\alpha}})^{\text{T}} - \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \mu_{\alpha} - f \right) \text{Id} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \nabla \mu_{\alpha} \bullet \mathbf{J}_{\alpha}) + \text{div} \left(\varphi + \sum_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Wenn nun

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \mu_{\alpha} - f \right) \text{Id} + \sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} (f'_{\nabla \varrho_{\alpha}})^{\text{T}} - S, \\ \varphi &= \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} \end{aligned}$$

gesetzt wird, erhalten wir

$$\sigma_f = -Dv \bullet S + \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \nabla \mu_{\alpha} \bullet \mathbf{J}_{\alpha}).$$

Hier $Dv \bullet S \geq 0$ aus den allgemeinen Voraussetzungen. \square

Zu Beginn des Abschnittes hatten wir angenommen, dass Π symmetrisch ist, und unter dieser Voraussetzung das allgemeine Diffusionssystem (IV11.2) aufgestellt. Wir müssen also zeigen, dass dies erfüllt ist. Nach 11.11 haben wir dazu zu zeigen:

11.12 Symmetrie von Π . Nach dem Entropieprinzip ist η ein objektiver Skalar, also auch $f = \tilde{f}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho})$. Daraus folgt, dass

$$\sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} \otimes f'_{\nabla \varrho_{\alpha}}$$

eine symmetrische Matrix ist, auf jeden Fall, wenn $f = \tilde{f}(\vec{\varrho}, (d_{\beta\gamma})_{\beta \leq \gamma})$, wobei

$$d_{\beta\gamma} := (\tilde{f}'_{\nabla \varrho_{\beta}}) \bullet (\tilde{f}'_{\nabla \varrho_{\gamma}}).$$

Beweis für die spezielle Darstellung. Es ist

$$f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} = 2\tilde{f}'_{d_{\alpha\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} + \sum_{\beta < \gamma} \tilde{f}'_{d_{\beta\gamma}} \cdot (\delta_{\beta,\alpha} \nabla \varrho_{\gamma} + \delta_{\gamma,\alpha} \nabla \varrho_{\beta}),$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} \otimes f'_{\nabla \varrho_{\alpha}} &= 2 \sum_{\alpha} \tilde{f}'_{d_{\alpha\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} \otimes \nabla \varrho_{\alpha} \\ &\quad + \sum_{\beta < \gamma} \sum_{\alpha} \tilde{f}'_{d_{\beta\gamma}} \cdot (\delta_{\beta,\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} \otimes \nabla \varrho_{\gamma} + \delta_{\gamma,\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} \otimes \nabla \varrho_{\beta}) \\ &= 2\tilde{f}'_{d_{\alpha\alpha}} \nabla \varrho_{\alpha} \otimes \nabla \varrho_{\alpha} + \sum_{\beta < \gamma} \tilde{f}'_{d_{\beta\gamma}} \cdot (\nabla \varrho_{\beta} \otimes \nabla \varrho_{\gamma} + \nabla \varrho_{\gamma} \otimes \nabla \varrho_{\beta}) \\ &= \sum_{\beta \leq \gamma} \tilde{f}'_{d_{\beta\gamma}} \cdot (\nabla \varrho_{\beta} \otimes \nabla \varrho_{\gamma} + \nabla \varrho_{\gamma} \otimes \nabla \varrho_{\beta}) \end{aligned}$$

also eine symmetrische Matrix. \square

Beweis in der allgemeinen Situation. Da η ein objektiver Skalar ist, ist dies auch $f = \varepsilon - \theta\eta$. Es ist $f = \hat{f}((\varrho_{\beta})_{\beta}, (\nabla \varrho_{\beta})_{\beta})$, wobei wir die Variable von $\nabla \varrho_{\beta}$ mit z_{β} bezeichnen, also $\hat{f}((\varrho_{\beta})_{\beta}, (z_{\beta})_{\beta})$. Nun gilt mit $\varrho_{\alpha} \circ Y = \varrho_{\alpha}^*$ und daraus folgend $(\nabla \varrho_{\alpha}) \circ Y = Q \nabla \varrho_{\alpha}^*$

$$\hat{f}((\varrho_{\beta}^*)_{\beta}, (Q \nabla \varrho_{\beta}^*)_{\beta}) = f \circ Y = f^* = \hat{f}((\varrho_{\beta}^*)_{\beta}, (\nabla \varrho_{\beta}^*)_{\beta}).$$

Indem wir dies nun bei gegebenem Punkt (t^+, x^*) als Gleichung für alle Transformationen auffassen, erhalten wir, wenn wir $Q = Q_s$ wählen, für die

Ableitung nach s

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{ds} \widehat{f}((\varrho_\beta^*)_\beta, (Q_s \nabla \varrho_\beta^*)_\beta) = \sum_\alpha \widehat{f}'_{z_\alpha}(\dots) \bullet \left(\frac{d}{ds} Q_s \nabla \varrho_\alpha^* \right) \\
 &= \sum_\alpha \widehat{f}'_{z_\alpha}(\dots) \bullet A_s Q \nabla \varrho_\alpha^* \quad \left(\text{wobei } A_s := \left(\frac{d}{ds} Q_s \right) Q_s^T \right) \\
 &= \sum_\alpha \left(\widehat{f}'_{z_\alpha}((\varrho_\beta)_\beta, (\nabla \varrho_\beta)_\beta) \circ Y \right) \bullet (A_s \nabla \varrho_\alpha \circ Y) \quad \left(\text{wobei } \varrho_\alpha \text{ wie oben} \right) \\
 &= A_s \bullet \left(\sum_\alpha \widehat{f}'_{z_\alpha}((\varrho_\beta)_\beta, (\nabla \varrho_\beta)_\beta) \otimes \nabla \varrho_\alpha \right) \circ Y
 \end{aligned}$$

Da A_s antisymmetrisch ist für alle s , können wir dies für ein gegebenes s als eine beliebige antisymmetrische Matrix $A_s = A$ wählen, so dass also für dieses s

$$0 = A \bullet \sum_\alpha \widehat{f}'_{z_\alpha}((\varrho_\beta)_\beta, (\nabla \varrho_\beta)_\beta) \otimes \nabla \varrho_\alpha,$$

das heißt, da ϱ_β und $\nabla \varrho_\beta$ beliebig gewählt werden können,

$$\sum_\alpha \widehat{f}'_{z_\alpha}((\varrho_\beta)_\beta, (\nabla \varrho_\beta)_\beta) \otimes \nabla \varrho_\alpha$$

ist eine symmetrische Matrix, was zu zeigen war. (Die Beweismethode findet sich auch in [II.4.14](#) beim Satz über konstante objektive Tensoren.) \square

12 Temperaturabhängige Diffusion

Wir behandeln nun Diffusionsgleichungen mit thermischer Ausdehnung, was eine wesentliche Eigenschaft bei Reaktionen ist. Wir betrachten hier der Einfachheit halber wieder nur den Fall (IV11.20), d.h. $\mathbf{J} = 0$ und $\mathbf{r} = 0$ für die Gesamtgrößen, weshalb die (gesamte) Kraft gleich der klassischen Kraft ist. Das Differentialgleichungssystem (IV11.2) ist dann

Reaktions-Diffusions-System:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) &= \mathbf{r}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \dots, m, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= v \bullet \mathbf{f} + g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho &:= \sum_\alpha \varrho_\alpha \text{ Gesamtmasse,} & \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha &= 0 \\ \Pi &\text{ symmetrischer Drucktensor,} & \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha &= 0 \\ e &= \varepsilon + \frac{\varrho}{2} |v|^2 \text{ Energie,} \end{aligned}$$

(IV12.1)

Das Entropieprinzip besagt das Folgende, wobei wir hier die Voraussetzung machen, dass die Entropie nicht von Ableitungen der Dichten abhängt.

12.1 Entropieprinzip. Wenn für die Entropie und den Entropiefluss gilt

$$\begin{aligned} \eta &= \widehat{\eta}((\varrho_\alpha)_\alpha, \varepsilon), \quad \psi = \eta v + \psi_0, \\ \psi_0 &= \frac{1}{\theta} q^\varepsilon - \sum_\alpha \mu_\alpha^\eta \mathbf{J}_\alpha = \frac{1}{\theta} q - \frac{1}{\theta} \sum_\alpha \mu_\alpha \mathbf{J}_\alpha, \end{aligned}$$

so ist das Entropieprinzip erfüllt, falls in den Gleichungen (IV11.2) (bzw. in (IV11.1) und (IV11.6)) gilt

$$\begin{aligned} \Pi &= p \operatorname{Id} - S, \quad p = \sum_\alpha \varrho_\alpha \mu_\alpha - f, \\ q &= q^\varepsilon + \sum_\alpha \mu_\alpha^\varepsilon \mathbf{J}_\alpha, \quad \mu_\alpha = \mu_\alpha^\varepsilon + \theta \mu_\alpha^\eta, \quad g = 0 \end{aligned}$$

und die Residualungleichung

$$0 \leq \sigma = \frac{1}{\theta} \operatorname{D}v \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q^\varepsilon - \sum_\alpha \frac{1}{\theta} \mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha - \sum_\alpha \left(\nabla \mu_\alpha^\eta + \frac{1}{\theta} \nabla \mu_\alpha^\varepsilon \right) \bullet \mathbf{J}_\alpha$$

erfüllt ist, wobei $f = \widehat{f}((\varrho_\alpha)_\alpha, \theta)$ und

$$\mu_\alpha = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha} = f'_{\varrho_\alpha}.$$

Zum Zusammenhang zwischen f und η siehe (IV12.5).

Definition: Die Gleichung $\mu_\alpha = \mu_\alpha^\varepsilon + \theta \mu_\alpha^\eta$ "zerlegt" das chemische Potential in einen Energieanteil μ_α^ε und einen Entropieanteil μ_α^η .

Man kann also zum Beispiel $\mu_\alpha^\epsilon = \widehat{\mu}_\alpha$ setzen, so dass dann $\mu_\alpha^\eta = 0$, also hat der Entropiefluss die Darstellung wie bei Clausius-Duhem, oder man setzt $\mu_\alpha^\eta = \frac{1}{\theta}\mu_\alpha = -\eta'_{\varrho_\alpha}$ und dann $\mu_\alpha^\epsilon = 0$. In diesem Falle besteht der Energiefluss q nur aus dem Wärmeanteil, dafür hat der Entropiefluss zusätzliche \mathbf{J}_α -Terme. Diese Alternative wurde zuerst in Alt & Pawlow [18] benutzt, und zwar in dem Fall, der in 12.4 behandelt wird.

Beweis. Wir wiederholen den Beweis von III.2.4, wobei jetzt für die Entropie gilt

$$\eta = \widehat{\eta}((\varrho_\alpha)_\alpha, \varepsilon),$$

also ist die Entropie nun eine Funktion von jeder Massendichte ϱ_α der Mischung. Definiere $\overset{\circ}{h} = \partial_t h + v \bullet \nabla h$ für jede Funktion h . Dann ist

$$\overset{\circ}{\eta} = \sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon}$$

wobei $\overset{\circ}{\varrho}_\alpha$ und $\overset{\circ}{\varepsilon}$ durch die Differentialgleichungen der Mischung ausgedrückt werden können (wir setzen $\Pi = p\text{Id} - S$, ohne Bezug auf die Bedeutung der Terme):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div} v &= \mathbf{r}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + (\varepsilon + p) \operatorname{div} v + \operatorname{div} q &= Dv \bullet S + g. \end{aligned} \tag{IV12.2}$$

Daher

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma = \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \\ &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \eta'_{\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \operatorname{div} v \\ &= \sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} (-\varrho_\alpha \operatorname{div} v + \mathbf{r}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha) \\ &\quad + \eta'_{\varepsilon} (-(\varepsilon + p) \operatorname{div} v - \operatorname{div} q + Dv \bullet S + g) + \eta \operatorname{div} v \\ &= \operatorname{div} v \cdot \left(\eta - \sum_\alpha \varrho_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} \right) + \eta'_{\varepsilon} Dv \bullet S \\ &\quad + \sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} (\mathbf{r}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha) + \eta'_{\varepsilon} (g - \operatorname{div} q). \end{aligned}$$

Gehe jetzt zum Beweis des klassischen Falles oder zum Beweis des allgemeinen Falles über. \square

Beweis (klassisch). Wir nehmen an, dass wir $\mathbf{r}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha$ wie Raten behandeln können (womit also der Fall abgedeckt ist, dass die Flüsse \mathbf{J}_α verschwin-

den). Dann ist

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}(\mathbf{r}_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}) + \eta'_{\varepsilon}(g - \operatorname{div} q) \\
&= \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}(\mathbf{r}_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}) + \eta'_{\varepsilon} g - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q \\
&= \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}(\mathbf{r}_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}) + \eta'_{\varepsilon} g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q + \operatorname{div}(-\eta'_{\varepsilon} q),
\end{aligned} \tag{IV12.3}$$

wobei die letzte Gleichung die Standardmanipulation

$$\eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q = \operatorname{div}(\eta'_{\varepsilon} q) - \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q$$

darstellt. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 \leq \sigma &= \operatorname{div}(\psi - \eta v - \eta'_{\varepsilon} q) \\
&+ \operatorname{div} v \cdot (\eta - \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon}) + \eta'_{\varepsilon} \operatorname{D}v \bullet S \\
&+ \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}(\mathbf{r}_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}) + \eta'_{\varepsilon} g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q.
\end{aligned}$$

Dies ist, falls \mathbf{J}_{α} verschwindet, die klassische Darstellung der Entropieproduktion. Hierbei hat der Entropiefluss nur den Term $\eta'_{\varepsilon} q$, der ja schon in der Clausius-Duhem Ungleichung auftrat. Bei allgemeinem \mathbf{J}_{α} ist

$$q = q^{\varepsilon} + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\varepsilon} \mathbf{J}_{\alpha},$$

und obige Darstellung von σ geht in die Darstellung in der Fortführung des Beweises über. Gehe jetzt zur Fortführung des Beweises. \square

Beweis (allgemein). Für allgemeine \mathbf{J}_{α} erhalten wir, wenn wir $q = q^{\varepsilon} + \mathbf{J}^{\varepsilon}$ schreiben,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}}(\mathbf{r}_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}) + \eta'_{\varepsilon}(g - \operatorname{div} q) \\
&= \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} \mathbf{r}_{\alpha} + \eta'_{\varepsilon} g - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^{\varepsilon} \\
&\quad - \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho_{\alpha}} \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{J}^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Den q^{ε} -Term formen wir wie bei Clausius-Duhem um

$$\eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^{\varepsilon} = \operatorname{div}(\eta'_{\varepsilon} q^{\varepsilon}) - \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q^{\varepsilon}$$

und die restlichen Flussterme sind, wenn wir setzen

$$\mathbf{J}^{\varepsilon} = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\varepsilon} \mathbf{J}_{\alpha}, \quad \mathbf{J}^{\eta} := \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\eta} \mathbf{J}_{\alpha},$$

gleich

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho\alpha} \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{J}^{\varepsilon} \\
& = \sum_{\alpha} (-\eta'_{\varrho\alpha} \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}(\mu_{\alpha}^{\varepsilon} \mathbf{J}_{\alpha}) - \operatorname{div}(\mu_{\alpha}^{\eta} \mathbf{J}_{\alpha})) + \operatorname{div} \mathbf{J}^{\eta} \\
& = \sum_{\alpha} (-\eta'_{\varrho\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha}^{\varepsilon} - \mu_{\alpha}^{\eta}) \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha} + \operatorname{div} \mathbf{J}^{\eta} \\
& + \sum_{\alpha} (-\eta'_{\varepsilon} \nabla \mu_{\alpha}^{\varepsilon} - \nabla \mu_{\alpha}^{\eta}) \bullet \mathbf{J}_{\alpha},
\end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}) + \eta'_{\varepsilon} (g - \operatorname{div} q) \\
& = \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \eta'_{\varepsilon} g - \operatorname{div}(\eta'_{\varepsilon} q^{\varepsilon} - \mathbf{J}^{\eta}) + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q^{\varepsilon} \\
& + \sum_{\alpha} (-\eta'_{\varrho\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha}^{\varepsilon} - \mu_{\alpha}^{\eta}) \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha} \\
& + \sum_{\alpha} (-\eta'_{\varepsilon} \nabla \mu_{\alpha}^{\varepsilon} - \nabla \mu_{\alpha}^{\eta}) \bullet \mathbf{J}_{\alpha}.
\end{aligned} \tag{IV12.4}$$

Gehe jetzt zur Fortführung des Beweises. □

Beweis (Fortführung). Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 \leq \sigma & = \operatorname{div}(\psi - \eta v - \eta'_{\varepsilon} q^{\varepsilon} + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\eta} \mathbf{J}_{\alpha}) \\
& + \operatorname{div} v \cdot (\eta - \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho\alpha} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon}) + \eta'_{\varepsilon} \operatorname{D}v \bullet S \\
& + \sum_{\alpha} \eta'_{\varrho\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + \eta'_{\varepsilon} g + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q^{\varepsilon} + \sum_{\alpha} (-\eta'_{\varepsilon} \nabla \mu_{\alpha}^{\varepsilon} - \nabla \mu_{\alpha}^{\eta}) \bullet \mathbf{J}_{\alpha} \\
& + \sum_{\alpha} (-\eta'_{\varrho\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha}^{\varepsilon} - \mu_{\alpha}^{\eta}) \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\psi - \eta v - \eta'_{\varepsilon} q^{\varepsilon} + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\eta} \mathbf{J}_{\alpha} & = 0 && \text{(Entropiefluss),} \\
\eta - \sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \eta'_{\varrho\alpha} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} & = 0 && \text{(Gibbs-Relation),} \\
g & = 0 && \text{(Energieerhaltung),} \\
\eta'_{\varrho\alpha} + \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha}^{\varepsilon} + \mu_{\alpha}^{\eta} & = 0 && \text{(Verteilung der } \mu_{\alpha}\text{-Terme),}
\end{aligned}$$

voraus, so folgt

$$0 \leq \sigma = \eta'_{\varepsilon} \operatorname{D}v \bullet S + \nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q^{\varepsilon} + \sum_{\alpha} (\eta'_{\varrho\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} - (\nabla \mu_{\alpha}^{\eta} + \eta'_{\varepsilon} \nabla \mu_{\alpha}^{\varepsilon}) \bullet \mathbf{J}_{\alpha}),$$

was äquivalent zur behaupteten Residualungleichung ist. □

Beweis (Innere freie Energie). Wir führen die innere freie Energie ein

$$f((\varrho_\alpha)_\alpha, \theta) := \varepsilon - \theta \eta((\varrho_\alpha)_\alpha, \varepsilon)$$

$$\text{mit } \theta = \widehat{\theta}((\varrho_\alpha)_\alpha, \varepsilon) := \frac{1}{\eta'_\varepsilon((\varrho_\alpha)_\alpha, \varepsilon)},$$

und berechnen die Ableitung nach ε

$$f'_{\theta} \theta'_{\varepsilon} = 1 - \theta \eta'_{\varepsilon} - \theta'_{\varepsilon} \eta = -\theta'_{\varepsilon} \eta,$$

also $f'_{\theta} = -\eta$, und ϱ_α

$$f'_{\varrho_\alpha} + f'_{\theta} \theta'_{\varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha} - \theta'_{\varrho_\alpha} \eta,$$

also $f'_{\varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha}$. Es gilt somit

$$f'_{\theta} = -\eta \text{ und } f'_{\varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= \theta \left(\eta - \sum_{\alpha} \varrho_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon} \right) \\ &= \theta \eta - \sum_{\alpha} \varrho_\alpha \theta \eta'_{\varrho_\alpha} - \varepsilon - p \\ &= \sum_{\alpha} \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} - f - p, \end{aligned} \quad (\text{IV12.5})$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \theta \left(-\eta'_{\varrho_\alpha} - \eta'_{\varepsilon} \mu_\alpha^\varepsilon - \mu_\alpha^\eta \right) \\ &= \mu_\alpha^\varepsilon - \mu_\alpha^\eta - \theta \mu_\alpha^\eta, \end{aligned}$$

und daher wird die Entropieproduktion zu

$$0 \leq \sigma = \frac{1}{\theta} \text{D}v \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q^\varepsilon - \sum_{\alpha} \frac{1}{\theta} f'_{\varrho_\alpha} \mathbf{r}_\alpha - \sum_{\alpha} \left(\nabla \mu_\alpha^\eta + \frac{1}{\theta} \nabla \mu_\alpha^\varepsilon \right) \bullet \mathbf{J}_\alpha.$$

□

Das Reaktion-Diffusions-System schreibt sich also unter der Annahme, dass (IV11.20) erfüllt ist, mit den Konzentrationen wie folgt

Reaktions-Diffusions-System:

$$\partial_t(\varrho_\alpha) + \text{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \dots, m,$$

$$\partial_t(\varrho v) + \text{div}(\varrho v v^T + p \text{Id} - S) = \mathbf{f},$$

$$\partial_t e + \text{div}((e + p)v - Sv + q^\varepsilon + \sum_{\alpha} \mu_\alpha^\varepsilon \mathbf{J}_\alpha) = v \bullet \mathbf{f},$$

(IV12.6)

$$e = \varepsilon + \frac{\theta}{2} |v|^2, \quad p = \left(\sum_{\alpha} \varrho_\alpha f'_{\varrho_\alpha} \right) - f,$$

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha^\varepsilon + \theta \mu_\alpha^\eta, \quad \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha} \mathbf{J}_\alpha = 0,$$

wobei S , q^ϵ , \mathbf{r}_α , and \mathbf{J}_α die Residualungleichung erfüllen müssen. Hierbei sind die Entropie und der Entropiefluss wie in 12.1 gewählt. Siehe jetzt insbesondere den Abschnitt 13, wo temperaturabhängige Anwendungsprobleme behandelt werden.

Stetigkeit des chemischen Potentials

Wir vergegenwärtigen uns nocheinmal die Definition der Temperatur und die Definition des chemischen Potentials in 11.1 (und 11.9, wenn man $\mu_\alpha = \mu_\alpha^s$ setzt)

$$\frac{1}{\theta} := \eta'_{\epsilon} \left(= \frac{\delta \eta}{\delta \epsilon} \right), \quad -\frac{\mu_\alpha}{\theta} := \eta'_{\rho_\alpha} \left(= \frac{\delta \eta}{\delta \rho_\alpha} \right),$$

wobei wir annehmen wollen, dass $\eta = \widehat{\eta}((\rho_\alpha)_\alpha, \epsilon)$ ist (in Klammern ist der Fall angegeben, dass η vom Gradienten der Dichten abhängt). Wir sehen also, dass es sich sowohl bei der Temperatur als auch beim chemischen Potential um erste Ableitungen der Entropie handelt. In III.6.1 hatten wir schon gezeigt, dass daraus an der Grenze zwischen zwei Medien die Stetigkeit der Temperatur folgt. Wir zeigen nun, dass das chemische Potential am Grenzübergang stetig ist. Voraussetzung dafür ist, dass es keinen Produktionsterm auf der Grenze gibt.

12.2 Stetigkeit des chemischen Potentials. Es gelten die Massen-, Impuls- und die Energieerhaltung im Distributionssinn im stationären Sinn in $U \subset \mathbb{R}^n$ und es gelte (für einen Beobachter)

$$U = D^{(1)} \cup \Gamma \cup D^{(2)}, \quad \Gamma \text{ eine glatte Fläche, .}$$

Dann folgt für die chemischen Potentiale

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)} \text{ auf } \Gamma,$$

wenn im Distributionssinne Massen-, Impuls- und Energieerhaltung sowie das Entropieprinzip gelten.

Beweis. Wir fassen die Erhaltungsgleichungen als Distributionsgleichungen auf, also gilt für die stationären Gleichungen, dass in $\mathcal{D}'(U)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\rho v + \mathbf{J}] &= [\mathbf{r}], \\ \operatorname{div}[\rho v v^T + \Pi] &= [\mathbf{f}], \\ \operatorname{div}[e v + \Pi^T v + q] &= [g], \end{aligned}$$

wobei $\rho = \rho^{(k)}$ in $D^{(k)}$, $k = 1, 2$, entsprechend für die anderen Größen, und $v^{(1)} \bullet \nu = 0$, $v^{(2)} \bullet \nu = 0$ auf Γ , wobei ν eine Einheitsnormale auf Γ ist. Für

Testfunktionen $\zeta \in \mathcal{D}(U; \mathbb{R})$ heißt dies für die Massenerhaltung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{U}} (\nabla \zeta \bullet (\varrho v + \mathbf{J}) + \zeta \mathbf{r}) \, dx \\ &= \sum_k \int_{D^{(k)}} (\nabla \zeta \bullet (\varrho^{(k)} v^{(k)} + \mathbf{J}^{(k)}) + \zeta \mathbf{r}^{(k)}) \, dx \\ &= \sum_k \int_{D^{(k)}} \zeta (-\operatorname{div}(\varrho^{(k)} v^{(k)} + \mathbf{J}^{(k)}) + \mathbf{r}^{(k)}) \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} \zeta \nu \bullet (\varrho^{(2)} v^{(2)} + \mathbf{J}^{(2)} - \varrho^{(1)} v^{(1)} - \mathbf{J}^{(1)}) \, d\mathbb{H}^{n-1}(x), \end{aligned}$$

wobei $\nu = \nu_{D^{(2)}} = -\nu_{D^{(1)}}$. Daraus folgt

$$-\operatorname{div}(\varrho^{(k)} v^{(k)} + \mathbf{J}^{(k)}) + \mathbf{r}^{(k)} = 0 \text{ in } D^{(k)},$$

das heißt die Differentialgleichung in den einzelnen Phasen, und am Grenzübergang Γ

$$\mathbf{J}^{(2)} \bullet \nu = \mathbf{J}^{(1)} \bullet \nu.$$

Entsprechend folgt aus der distributionellen Impulserhaltung neben den Differentialgleichungen in $D^{(k)}$

$$\Pi^{(2)} \nu = \Pi^{(1)} \nu \text{ auf } \Gamma$$

und die distributionelle Energieerhaltung ergibt dann

$$q^{(2)} \bullet \nu = q^{(1)} \bullet \nu \text{ auf } \Gamma.$$

Jetzt schauen wir uns noch die Entropiegleichung an, die in der distributionellen Version lautet

$$\partial_t[\eta] + \operatorname{div}[\psi] \geq 0 \text{ in } \mathcal{D}'(U)$$

mit $\eta = \eta^{(k)}$ in $D^{(k)}$ und entsprechend für ψ , das heißt, wir nehmen an, es treten keine distributionellen Terme auf Γ auf. Die Entropiegleichung sagt für nichtnegative Testfunktionen ζ

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_U (\partial_t \zeta \cdot \eta + \nabla \zeta \bullet \psi) \, d(t, x) \\ &= \sum_k \int_{\mathbb{R}} \int_{D^{(k)}} (\partial_t \zeta \cdot \eta^{(k)} + \nabla \zeta \bullet \psi^{(k)}) \, dx \, dt \\ &= \sum_k \int_{\mathbb{R}} \int_{D^{(k)}} \zeta (-\partial_t \eta^{(k)} - \operatorname{div} \psi^{(k)}) \, dx \, dt \\ &\quad + \sum_k \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} \zeta \nu \bullet (\psi^{(2)} - \psi^{(1)}) \, d\mathbb{H}^{n-1}(x) \, dt. \end{aligned}$$

Die Entropieungleichung in U enthält nun einerseits

$$0 \geq -\partial_t \eta^{(k)} - \operatorname{div} \psi^{(k)} \text{ in } D^{(k)},$$

die Entropieungleichung in $D^{(k)}$, und zum anderen

$$0 \geq \nu \bullet (\psi^{(2)} - \psi^{(1)}).$$

Da der Entropiefluss $\psi^{(k)}$ in $D^{(k)}$ erfüllt

$$\begin{aligned} \psi^{(k)} &= \eta^{(k)} v^{(k)} + \frac{1}{\theta^{(k)}} q^{(k)h} + \mu^{(k)} \eta \mathbf{J}^{(k)} \\ &\quad \left(\text{es ist } \mu^{(k)} = \mu^{(k)h} - \theta^{(k)} \mu^{(k)} \eta \right) \\ &= \eta^{(k)} v^{(k)} + \frac{1}{\theta^{(k)}} q^{(k)} - \frac{1}{\theta^{(k)}} \mu^{(k)} \mathbf{J}^{(k)}, \end{aligned}$$

ist

$$0 \geq \nu \bullet (\psi^{(2)} - \psi^{(1)}) = \left(\frac{1}{\theta^{(2)}} - \frac{1}{\theta^{(1)}} \right) \nu \bullet q - \left(\frac{\mu^{(2)}}{\theta^{(2)}} - \frac{\mu^{(1)}}{\theta^{(1)}} \right) \nu \bullet \mathbf{J},$$

wobei $\nu \bullet q = \nu \bullet q^{(1)} = \nu \bullet q^{(2)}$ und $\nu \bullet \mathbf{J} = \nu \bullet \mathbf{J}^{(1)} = \nu \bullet \mathbf{J}^{(2)}$, wie oben gezeigt. Da $\nu \bullet q$ und $\nu \bullet \mathbf{J}$ beliebige Werte haben können, folgt

$$\frac{1}{\theta^{(2)}} = \frac{1}{\theta^{(1)}}, \quad \frac{\mu^{(2)}}{\theta^{(2)}} = \frac{\mu^{(1)}}{\theta^{(1)}}.$$

□

Die Differentialgleichungen mit freiem Rand erhält man auch durch eine Phasenfeldapproximation (siehe z.B. [22]).

Abhängigkeit vom Gradienten

Wir leiten nun noch das Entropieprinzip her, falls die freie Energie auch von den Gradienten der Dichten abhängt.

12.3 Chemisches Potential (Gradientenabhängigkeit). Es gelte

$$\eta = \hat{\eta}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho}, \varepsilon) \quad \text{bzw.} \quad f = \hat{f}(\vec{\varrho}, \nabla \vec{\varrho}, \theta).$$

Seien Vektorfelder $\vec{h}_\alpha^\varepsilon$ and \vec{h}_α^η gegeben mit

$$\eta'_{\nabla \varrho_\alpha} = \vec{h}_\alpha^\eta + \frac{1}{\theta} \vec{h}_\alpha^\varepsilon \tag{IV12.7}$$

und definiere

$$\bar{\mu}_\alpha := \frac{\delta f}{\delta \varrho_\alpha} - \nabla \theta \bullet \vec{h}_\alpha^\eta = -\theta \left(\frac{\delta \eta}{\delta \varrho_\alpha} + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet \vec{h}_\alpha^\varepsilon \right),$$

so dass also gilt

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_\alpha &= f'_{\varrho_\alpha} + \theta \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\eta + \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\varepsilon \\ &= -\theta (\eta'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\eta - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\varepsilon). \end{aligned}$$

Erste Variation: Wir haben die Definition der ersten Variation in 11.8 benutzt.
Speziell: Es gilt im Zusammenhang mit 11.9

$$\bar{\mu}_\alpha = \begin{cases} -\theta \frac{\delta \eta}{\delta \varrho_\alpha} = \mu_\alpha^s & \text{wenn } \vec{h}_\alpha^\varepsilon = 0, \\ \frac{\delta f}{\delta \varrho_\alpha} = \mu_\alpha^f & \text{wenn } \vec{h}_\alpha^\eta = 0. \end{cases}$$

Außerdem, wenn $\vec{h}_\alpha^\eta = 0$ und $\vec{h}_\alpha^\varepsilon = 0$, also η und f vom Gradienten unabhängig, so gilt die alte Definition $\bar{\mu}_\alpha = \mu_\alpha = -\theta \eta'_{,\varrho_\alpha} = f'_{,\varrho_\alpha}$ in 11.9(3).

Beweis. Es gilt (immer mit den richtigen Argumenten) $f'_{,\nabla \varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{,\nabla \varrho_\alpha}$, also ist (IV12.7) äquivalent zu

$$f'_{,\nabla \varrho_\alpha} = -\theta \eta'_{,\nabla \varrho_\alpha} = -\theta \vec{h}_\alpha^\eta - \vec{h}_\alpha^\varepsilon, \quad (\text{IV12.8})$$

also ist

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta \varrho_\alpha} - \nabla \theta \bullet \vec{h}_\alpha^\eta &= f'_{,\varrho_\alpha} + \theta \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\eta + \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\varepsilon \\ &= -\theta (\eta'_{,\varrho_\alpha} - \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\eta - \eta'_{,\varepsilon} \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\varepsilon) \\ &= -\theta \left(\frac{\delta \eta}{\delta \varrho_\alpha} + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet \vec{h}_\alpha^\varepsilon \right). \end{aligned}$$

□

12.4 Entropieprinzip bei Gradientenabhängigkeit. Wenn für die Entropie und den Entropiefluss gilt, dass

$$\begin{aligned} \eta &= \hat{\eta}((\varrho_\alpha)_\alpha, (\nabla \varrho_\alpha)_\alpha, \varepsilon) \quad \text{ein objektiver Skalar ist,} \\ \psi &= \eta v + \frac{1}{\theta} q^\varepsilon - \sum_\alpha (\mu_\alpha^\eta \mathbf{J}_\alpha + \overset{\circ}{\varrho}_\alpha \vec{h}_\alpha^\eta), \end{aligned}$$

so ist das Entropieprinzip erfüllt, falls in den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Pi &= P - S, \\ P &= \left(\theta (\eta - \varepsilon \eta'_{,\varepsilon}) + \sum_\alpha \varrho_\alpha \mu_\alpha \right) \operatorname{Id} - \theta \sum_\alpha \nabla \varrho_\alpha \otimes \eta'_{,\nabla \varrho_\alpha}, \\ q &= q^\varepsilon + \sum_\alpha (\mu_\alpha^\varepsilon \mathbf{J}_\alpha + \overset{\circ}{\varrho}_\alpha \vec{h}_\alpha^\varepsilon), \quad g = 0 \end{aligned}$$

gilt und die Residualungleichung

$$0 \leq \sigma = \frac{1}{\theta} \operatorname{Div} \bullet S + \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q^\varepsilon - \sum_\alpha \frac{1}{\theta} \mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha - \sum_\alpha \left(\nabla \mu_\alpha^\eta + \frac{1}{\theta} \nabla \mu_\alpha^\varepsilon \right) \bullet \mathbf{J}_\alpha$$

erfüllt ist, wobei $f = \hat{f}((\varrho_\alpha)_\alpha, (\nabla \varrho_\alpha)_\alpha, \theta)$ und

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha^\varepsilon + \theta \mu_\alpha^\eta, \quad \eta'_{,\nabla \varrho_\alpha} = \vec{h}_\alpha^\eta + \frac{1}{\theta} \vec{h}_\alpha^\varepsilon. \quad (\text{IV12.9})$$

Hierbei ist das chemische Potential $\mu_\alpha := \bar{\mu}_\alpha$ wie oben in 12.3 definiert.

Wichtig: Die Zerlegung der Terme in (IV12.9) bestimmt, welcher Anteil in den Gleichungen der physikalischen Prozesse auftritt.

Beweis. Wir beginnen wie im klassischen Fall III.2.4, wobei jetzt für die Entropie $\eta = \hat{\eta}(\varrho, \nabla \varrho, \varepsilon)$ gilt, weshalb

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma &= \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \\ &= \overset{\circ}{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} (\psi - \eta v) \\ &= \sum_\alpha (\eta'_{,\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \eta'_{,\nabla \varrho_\alpha} \bullet (\nabla \varrho_\alpha)^\circ) + \eta'_{,\varepsilon} \overset{\circ}{\varepsilon} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} (\psi - \eta v), \end{aligned}$$

wobei wir hier $\overset{\circ}{\varrho}_\alpha$ und $\overset{\circ}{\varepsilon}$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \varrho_\alpha \operatorname{div} v &= \mathbf{r}_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{J}_\alpha, \\ \overset{\circ}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q &= -Dv \bullet \Pi + g\end{aligned}\quad (\text{IV12.10})$$

ersetzen wollen, also bleibt $(\nabla \varrho_\alpha)^\circ$ zu betrachten. Die totale Zeitableitung $(\nabla \varrho_\alpha)^\circ$ erfüllt:

$$(\nabla \varrho_\alpha)^\circ = \nabla \overset{\circ}{\varrho}_\alpha - Dv^T \nabla \varrho_\alpha, \quad (\text{IV12.11})$$

was sich aus der folgenden Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}(\partial_i \varrho_\alpha)^\circ &= \partial_t (\partial_i \varrho_\alpha) + (v \bullet \nabla) (\partial_i \varrho_\alpha) \\ &= \underbrace{\partial_t \partial_i \varrho_\alpha}_{\partial_i \partial_t} + \sum_{j=1}^n v_j \underbrace{\partial_j \partial_i \varrho_\alpha}_{\partial_i \partial_j} \\ &= \partial_i \partial_t \varrho_\alpha + \sum_{j=1}^n (\partial_i (v_j \partial_j \varrho_\alpha) - (\partial_i v_j) (\partial_j \varrho_\alpha)) \\ &= \partial_i \left(\partial_t \varrho_\alpha + \sum_{j=1}^n v_j \partial_j \varrho_\alpha \right) - \sum_{j=1}^n (\partial_i v_j) (\partial_j \varrho_\alpha) \\ &= \partial_i \overset{\circ}{\varrho}_\alpha - (Dv^T \nabla \varrho_\alpha)_i.\end{aligned}$$

Indem wir nun (IV12.11) benutzen und $\overset{\circ}{\varepsilon}$ von (IV12.10) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}0 \leq \sigma &= \operatorname{div}(\psi - \eta v) + \eta \operatorname{div} v \\ &+ \sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \sum_\alpha \eta'_{\nabla \varrho_\alpha} \bullet \nabla \overset{\circ}{\varrho}_\alpha - \sum_\alpha \eta'_{\nabla \varrho_\alpha} \bullet (Dv^T \nabla \varrho_\alpha) \\ &- \varepsilon \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} v + Dv \bullet (-\eta'_{\varepsilon} \Pi) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q + \eta'_{\varepsilon} g \\ &= \operatorname{div}(\psi - \eta v) + Dv \bullet \left((\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{Id} - \sum_\alpha \nabla \varrho_\alpha (\eta'_{\nabla \varrho_\alpha})^T - \eta'_{\varepsilon} \Pi \right) \\ &+ \sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \sum_\alpha \eta'_{\nabla \varrho_\alpha} \bullet \nabla \overset{\circ}{\varrho}_\alpha - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q + \eta'_{\varepsilon} g.\end{aligned}$$

In der letzten Zeile nutze nun

$$\begin{aligned}\eta'_{\nabla \varrho_\alpha} &= \vec{h}_\alpha^\eta + \eta_\varepsilon \vec{h}_\alpha^\varepsilon, \\ q &= q^\varepsilon + \sum_\alpha \mu_\alpha^\varepsilon \mathbf{J}_\alpha + \sum_\alpha \overset{\circ}{\varrho}_\alpha \vec{h}_\alpha^\varepsilon\end{aligned}$$

aus, um zu erhalten

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \sum_\alpha \eta'_{\nabla \varrho_\alpha} \bullet \nabla \overset{\circ}{\varrho}_\alpha - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q + \eta'_{\varepsilon} g \\ &= \sum_\alpha \eta'_{\varrho_\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_\alpha + \sum_\alpha (\vec{h}_\alpha^\eta + \eta_\varepsilon \vec{h}_\alpha^\varepsilon) \bullet \nabla \overset{\circ}{\varrho}_\alpha \\ &- \sum_\alpha \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} (\overset{\circ}{\varrho}_\alpha \vec{h}_\alpha^\varepsilon + \mu_\alpha^\varepsilon \mathbf{J}_\alpha) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^\varepsilon + \eta'_{\varepsilon} g \\ &= \sum_\alpha \operatorname{div} (\overset{\circ}{\varrho}_\alpha \vec{h}_\alpha^\eta) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^\varepsilon + \eta'_{\varepsilon} g \\ &+ \sum_\alpha (\eta'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\eta - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\varepsilon) \overset{\circ}{\varrho}_\alpha - \sum_\alpha \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} (\mu_\alpha^\varepsilon \mathbf{J}_\alpha).\end{aligned}$$

Indem in der letzten Zeile

$$-\eta'_{\varepsilon} \mu_\alpha = \eta'_{\varrho_\alpha} - \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\eta - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} \vec{h}_\alpha^\varepsilon$$

ausgenutzt wird, wird dies, wenn wir $\overset{\circ}{\varrho}$ von (IV12.10) einsetzen,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha} \operatorname{div}(\overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} \vec{h}_{\alpha}^{\eta}) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^{\varepsilon} + \eta'_{\varepsilon} g \\
&\quad - \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}(\mu_{\alpha}^{\varepsilon} \mathbf{J}_{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha} \operatorname{div}(\overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} \vec{h}_{\alpha}^{\eta}) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^{\varepsilon} + \eta'_{\varepsilon} g \\
&\quad - \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} (-\varrho_{\alpha} \operatorname{div} v + \mathbf{r}_{\alpha} - \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}(\mu_{\alpha}^{\varepsilon} \mathbf{J}_{\alpha}) \\
&= \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} \vec{h}_{\alpha}^{\eta} + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\eta} \mathbf{J}_{\alpha} \right) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^{\varepsilon} + \eta'_{\varepsilon} g \\
&\quad + \operatorname{Dv} \bullet \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} \operatorname{Id} \right) - \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \\
&\quad + \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} \operatorname{div} \mathbf{J}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \operatorname{div}(\mu_{\alpha}^{\eta} \mathbf{J}_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div}(\mu_{\alpha}^{\varepsilon} \mathbf{J}_{\alpha}).
\end{aligned}$$

And since $\eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} - \mu_{\alpha}^{\eta} - \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha}^{\varepsilon} = 0$ we see that the last line is

$$- \sum_{\alpha} (\nabla \mu_{\alpha}^{\eta} + \eta'_{\varepsilon} \nabla \mu_{\alpha}^{\varepsilon}) \mathbf{J}_{\alpha}.$$

Altogether

$$\begin{aligned}
0 \leq \sigma &= \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\
&\quad + \operatorname{Dv} \bullet \left((\eta - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{Id} - \sum_{\alpha} \nabla \varrho_{\alpha} (\eta'_{\varepsilon} \nabla \varrho_{\alpha})^{\operatorname{T}} - \eta'_{\varepsilon} \Pi \right) \\
&\quad + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} \overset{\circ}{\varrho}_{\alpha} \vec{h}_{\alpha}^{\eta} + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{\eta} \mathbf{J}_{\alpha} \right) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q^{\varepsilon} + \eta'_{\varepsilon} g \\
&\quad + \operatorname{Dv} \bullet \left(\sum_{\alpha} \varrho_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} \operatorname{Id} \right) - \sum_{\alpha} \eta'_{\varepsilon} \mu_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \\
&\quad - \sum_{\alpha} (\nabla \mu_{\alpha}^{\eta} + \eta'_{\varepsilon} \nabla \mu_{\alpha}^{\varepsilon}) \mathbf{J}_{\alpha}.
\end{aligned}$$

This proves the assertion. \square

13 Chemische Reaktionen

Wir geben hier einige Beispiele für die Reaktionsterme \mathbf{r}_α in (IV11.2) an, wie sie in der physikalischen Chemie auftreten. Wir gehen von einer freien Energie aus, die eine konstitutive Funktion der Dichten ϱ_α ist:

$$f = \widehat{f}((\varrho_\alpha)_\alpha, \theta), \quad \vec{\varrho} = (\varrho_\alpha)_\alpha. \quad (\text{IV13.1})$$

Bei chemischen Reaktionen ist von dem Einfluss der Temperatur θ auszugehen. Wir kommen darauf zurück und konstatieren zunächst nur, dass für jede Masse der Reaktion der Erhaltungssatz

$$\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha. \quad (\text{IV13.2})$$

erfüllt ist. In diesem Abschnitt betrachten wir die Konzentrationen:

Dichten:	$\varrho_\alpha, \vec{\varrho} = (\varrho_\alpha)_\alpha, \varrho := \sum_\alpha \varrho_\alpha,$
Konzentrationen:	$c_\alpha := \frac{\varrho_\alpha}{\varrho}, \vec{c} = (c_\alpha)_\alpha, \sum_\alpha c_\alpha = 1.$

Also können die Massenerhaltungen (IV13.2) auch geschrieben werden als

$$\partial_t(\varrho c_\alpha) + \operatorname{div}(\varrho c_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha = \varrho \mathbf{r}_\alpha^{\text{sp}}, \quad \mathbf{r}_\alpha^{\text{sp}} := \frac{1}{\varrho} \mathbf{r}_\alpha, \quad (\text{IV13.3})$$

wobei $\mathbf{r}_\alpha^{\text{sp}}$ die **spezifischen Reaktionsraten** sind. Falls alle $\mathbf{J}_\alpha = 0$ und die Gesamtrate $\mathbf{r} = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0$ können wir (IV13.3) auch schreiben als, siehe den Standardfall in (IV11.18),

$\overset{\circ}{c}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha^{\text{sp}},$	(IV13.4)
--	----------

wobei $\overset{\circ}{h} := \partial_t h + v \bullet \nabla h$ für jede Funktion h .

13.1 Spezifische freie Energie. Die freie Energie f habe die Eigenschaft wie in (IV13.1) und Entsprechendes gelte für die Entropie. Die **spezifische freie Energie** ist

$$f^{\text{sp}} := \frac{1}{\varrho} f. \quad (\text{IV13.5})$$

In 11.1 waren die **chemischen Potentiale** μ_α schon eingeführt, es gilt

$$\mu_\alpha = -\theta \eta'_{\varrho_\alpha}(\vec{\varrho}, \theta) = f'_{\varrho_\alpha}(\vec{\varrho}, \theta).$$

(1) Ist $f^{\text{sp}} = \widehat{f}^{\text{sp}}(\vec{\varrho}, \theta)$ so gilt, wenn $\vec{\varrho} = \varrho \vec{c}$,

$$\mu_\alpha = f'_{\varrho_\alpha}(\vec{\varrho}, \theta) = \frac{\partial}{\partial c_\alpha} (\widehat{f}^{\text{sp}}(\varrho \vec{c}, \theta)). \quad (\text{IV13.6})$$

(2) Ist $f^{\text{SP}} = \tilde{f}^{\text{SP}}(\vec{c}, \varrho, \theta)$, so gilt mit einer von α unabhängigen Funktion d

$$\mu_\alpha = f'_{\varrho_\alpha} = \tilde{f}'_{c_\alpha}(\vec{c}, \varrho, \theta) + d(\vec{c}, \varrho, \theta). \quad (\text{IV13.7})$$

(3) Mit \tilde{f}^{SP} wie in (2) ist

$$\tilde{f}'_{c_\alpha} = \tilde{f}'_{\tau_\alpha} + \tilde{f}'_{\nu},$$

wobei $\tau_\alpha := \sum_{\beta: \beta \neq \alpha} \frac{1}{N}(\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta)$ Tangentialvektoren an die Bedingung an \vec{c} sind und wobei ein Normalenvektor durch $\nu := \frac{1}{N}(1, \dots, 1)$ gegeben ist.

Also auch wenn \tilde{f}^{SP} für Vektoren \vec{c} , welche nicht die Nebenbedingung erfüllen, gebraucht wird, ändern sich dadurch die Darstellung der chemischen Potentiale μ_α nur durch eine konstante Funktion, d.h. durch einen von α unabhängigen Term.

Beweis (1).

$$(f^{\text{SP}}(\varrho c, \theta))'_{c_\alpha} = \left(\frac{1}{\varrho} f(\varrho c, \theta) \right)'_{c_\alpha} = \frac{1}{\varrho} (f(\varrho c, \theta))'_{c_\alpha} = \frac{\varrho}{\varrho} f'_{\varrho_\alpha}(\varrho c, \theta) = \mu_\alpha.$$

Die Nebenbedingung $\sum_\alpha c_\alpha = 1$ für die Konzentrationen wird hier nicht benutzt. \square

Beweis (2). Es ist $f(\vec{\varrho}, \theta) = \varrho \tilde{f}^{\text{SP}}(\frac{\vec{\varrho}}{\varrho}, \varrho, \theta)$ mit $\varrho = \sum_\alpha \varrho_\alpha$, also

$$\begin{aligned} \mu_\alpha = f'_{\varrho_\alpha} &= f^{\text{SP}} + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho_\alpha} f^{\text{SP}} = f^{\text{SP}} + \varrho \tilde{f}'_{\varrho} + \varrho \sum_\beta \tilde{f}'_{c_\beta} \left(\frac{\delta_{\beta, \alpha}}{\varrho} - \frac{\varrho_\beta}{\varrho^2} \right) \\ &= \tilde{f}^{\text{SP}} + \varrho \tilde{f}'_{\varrho} + \tilde{f}'_{c_\alpha} - \sum_\beta c_\beta \tilde{f}'_{c_\beta} = \tilde{f}'_{c_\alpha} + \text{const}(\vec{c}, \varrho, \theta) \end{aligned}$$

mit $\text{const}(\vec{c}, \varrho, \theta) = \tilde{f}^{\text{SP}} + \varrho \tilde{f}'_{\varrho} - \sum_\beta c_\beta \tilde{f}'_{c_\beta}$. \square

Beweis (3). Es ist $\mathbf{e}_\alpha = \tau_\alpha + \nu$ und $\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta$ sind Tangentialvektoren. \square

Referenzen: Siehe DeGroot & Mazur [6, Ch. X §3 Coupled Chemical Reactions] und I. Müller [87, 3.2.2.3. Seite 68, 6.5 Seite 196 Chemical Equilibrium], und das mathematische Buch von G.R. Gavalas [41, Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems]. Schließlich siehe auch [Wikipedia: Chemical reaction] und die Referenzen weiter unten. For an overview see [Wikipedia: Stöchiometrie] and [Wikipedia: Stoichiometry] and [Wikipedia: Stoeichiometrie].

Stöchiometrie

Betrachte Moleküle M_k , $k = 1, \dots, N$, in einer Mischung mit J Reaktionen, und zwar für $j = 1, \dots, J$, welche wir schreiben als

Stöchiometrische Gleichungen:

$$\sum_k \nu_k^j M_k \rightleftharpoons \sum_k \bar{\nu}_k^j M_k$$

M_k Partikel (Molekül, Atom, Ion, Elektron, ...)

$\nu_k^j, \bar{\nu}_k^j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$\gamma_k^j := \bar{\nu}_k^j - \nu_k^j$ stöchiometrische Koeffizienten,
(stoicheion = Grundstoff, metron = Maß).

(IV13.8)

Als Beispiel geben wir die Bildung von Wasser an.

13.2 Beispiel: Bildung von Wasser ($N = 6$, $J = 4$). (Nach I. Müller [87, 3.2.2.3])

(1) Die Reaktion lautet vereinfacht



Allerdings hat man dabei die Reaktion von 3 Molekülen, nämlich H_2 , H_2 und O_2 , was ein seltenes Ereignis darstellt.

(2) Genauer haben wir die folgenden Reaktionen. Es sind die beteiligten Molekülarten



und die Reaktionen schreiben sich als



Die stöchiometrische Matrix ist

$$\gamma := (\gamma_k^j)_{kj} = \begin{bmatrix} -1 & +2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +2 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}.$$

Es ist $\text{rank } \gamma = J = 4$, d.h. die Reaktionen sind unabhängig voneinander.

“Addiert” man die einzelnen Reaktionen in (IV13.10), so erhält man (IV13.9).

Beweis (2). Es sind

$$\nu := (\nu_k^j)_{kj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\nu} := (\bar{\nu}_k^j)_{kj} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

also hat $\gamma = \bar{\nu} - \nu$ die angegebenen Einträge. □

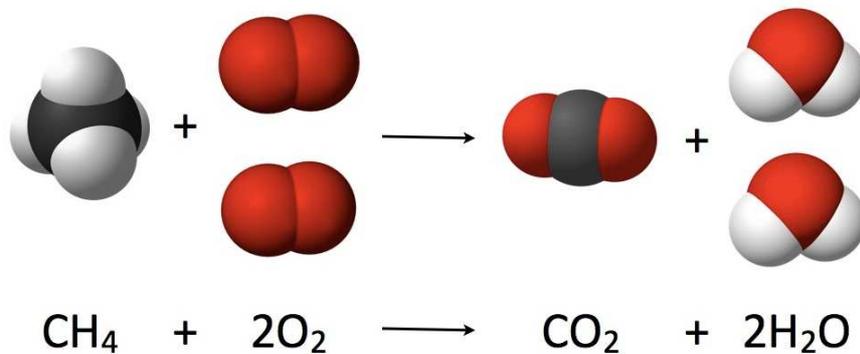


Abb. 30: “As seen from the equation , a coefficient of 2 must be placed before the oxygen gas on the reactants side and before the water on the products side in order for, as per the law of conservation of mass, the quantity of each element does not change during the reaction” von Wikipedia

13.3 Ansatz für Reaktionsraten. Mit den stöchiometrischen Gleichungen in (IV13.8) machen wir für die Reaktionsrate des k -ten Moleküls den Ansatz

$$\mathbf{r}_k^{\text{SP}} := \sum_j \nu_k \gamma_k^j \lambda^j,$$

wobei λ^j die chemische Reaktionsrate der j -ten Reaktion ist, und ν_k noch zu bestimmende Konstanten sind. Die Reaktionsrate λ^j ist eine Funktion der chemischen Potentiale μ_k , und wie folgt gegeben. Definiere

$$\lambda^j := \lambda^j \left(\bar{c}, \varrho, \theta, \underbrace{\sum_k \nu_k \nu_k^j \mu_k}_{=: \xi^j}, \underbrace{\sum_k \nu_k \bar{\nu}_k^j \mu_k}_{=: \bar{\xi}^j} \right).$$

Dann ist also

$$\mathbf{r}_k^{\text{SP}}(\vec{c}, \varrho, \theta) = \sum_j \nu_k \gamma_k^j \lambda^j(\vec{c}, \varrho, \theta, \xi^j, \bar{\xi}^j).$$

Mit den so definierten Reaktionsraten gilt

$$\begin{aligned} \sum_k \mu_k \mathbf{r}_k &= \varrho \sum_k \mu_k \mathbf{r}_k^{\text{SP}} = \varrho \sum_{kj} \mu_k \underbrace{\nu_k \gamma_k^j}_{\nu_k(\bar{\nu}_k^j - \nu_k^j)} \lambda^j(\vec{c}, \varrho, \theta, \xi^j, \bar{\xi}^j) \\ &= \varrho \sum_j \left(\sum_k \underbrace{\nu_k(\bar{\nu}_k^j - \nu_k^j) \mu_k}_{= \bar{\xi}^j - \xi^j} \right) \lambda^j(\vec{c}, \varrho, \theta, \xi^j, \bar{\xi}^j) \\ &= \varrho \sum_j \underbrace{(\bar{\xi}^j - \xi^j) \lambda^j(\vec{c}, \varrho, \theta, \xi^j, \bar{\xi}^j)}_{\leq 0 \text{ nach der Voraussetzung}} \leq 0, \end{aligned}$$

also hat dieser Teil der Entropieproduktion das richtige Vorzeichen.

13.4 Voraussetzung. Für jedes j gelte, dass

$$\begin{aligned} \lambda^j: \mathbb{R}^{N+2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\xi - \bar{\xi}) \lambda^j(z, \xi, \bar{\xi}) &\geq 0 \text{ für alle } z, \xi, \bar{\xi}. \end{aligned}$$

Wir verlangen darüberhinaus noch eine Nichttrivialität, die besagt

$$(\xi - \bar{\xi}) \lambda^j(z, \xi, \bar{\xi}) > 0 \text{ für } \xi \neq \bar{\xi}. \quad (\text{IV13.11})$$

Wenn λ^j stetig ist, folgt dann $\lambda^j(z, \xi, \xi) = 0$ für alle z und ξ .

Kehrt man eine chemische Reaktion um, so vertauschen sich ν_k^j mit $\bar{\nu}_k^j$, also wird γ^j durch $-\gamma^j$ ersetzt und ξ^j vertauscht sich mit $\bar{\xi}^j$. Die Bedingung (IV13.11) ist invariant bezüglich dieser Vertauschung.

Freie Energie

Die freie Energie für ideale Mischungen von Gasen wurde in 9.11 angegeben mit

$$f = \hat{f}(\vec{\varrho}, \theta) = \sum_k (R^k \theta \varrho_k \log \varrho_k - c_V^k \varrho_k \theta \log \theta + d^k \theta \varrho_k). \quad (\text{IV13.12})$$

Die zugehörige spezifische freie Energie ist

$$\begin{aligned} f^{\text{SP}} &= \frac{\hat{f}(\varrho \vec{c}, \theta)}{\varrho} = \sum_k (R^k \theta c_k \log(c_k \varrho) - c_V^k c_k \theta \log \theta + d^k \theta c_k) \\ &= \sum_k (R^k \theta c_k (\log c_k - 1) + a_k(\varrho, \theta) c_k), \\ a_k(\varrho, \theta) &:= R^k \theta (\log \varrho + 1) - c_V^k \theta \log \theta + d^k \theta, \end{aligned}$$

und damit nach 13.1(1)

$$\mu_k = \widehat{f}'_{\varrho_k}(\vec{\varrho}, \theta) = \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\widehat{f}(\varrho, \vec{c}, \theta) \right),$$

also

$$\mu_k = R^k \theta \log c_k + a_k(\varrho, \theta).$$

Und daher ist mit den Definitionen in 13.3

$$\xi^j = \sum_k \nu_k^j \mu_k = \sum_k \nu_k^j R^k \theta \log(c_k^{\nu_k^j}) + a^j(\varrho, \theta), \quad a^j(\varrho, \theta) := \sum_k \nu_k^j a_k(\varrho, \theta),$$

$$\bar{\xi}^j = \sum_k \bar{\nu}_k^j \mu_k = \sum_k \bar{\nu}_k^j R^k \theta \log(c_k^{\bar{\nu}_k^j}) + \bar{a}^j(\varrho, \theta), \quad \bar{a}^j(\varrho, \theta) := \sum_k \bar{\nu}_k^j a_k(\varrho, \theta).$$

Dies ist in die Gleichungen einzusetzen

$$\overset{\circ}{c}_k = \mathbf{r}_k^{\text{SP}} = \sum_j \nu_k^j \gamma_k^j \lambda^j(\vec{c}, \varrho, \theta, \xi^j, \bar{\xi}^j),$$

wobei wir ξ^j und $\bar{\xi}^j$, wie gerade berechnet, einzusetzen haben. Folgende Version wird für die chemischen Reaktionsraten λ^j meistens verwendet.

13.5 Chemische Reaktionsraten. Das klassische Modell ist

$$\lambda^j(\vec{c}, \varrho, \theta, \xi, \bar{\xi}) := \sigma^j(\vec{c}, \varrho, \theta) \cdot \left(\exp\left(\frac{\xi}{R\theta}\right) - \exp\left(\frac{\bar{\xi}}{R\theta}\right) \right), \quad (\text{IV13.13})$$

wobei $\sigma^j > 0$ und $\bar{R} > 0$ ist. *Bemerkung:* Dieses Modell stammt aus der statistischen Mechanik für Gase, wobei $\bar{R} = k_B$ die Boltzmann-Konstante ist. *Linearer Fall:* Ein lineares Modell nahe dem Equilibrium ist mit $\tilde{\sigma}^j > 0$ gegeben durch $\lambda^j(\vec{c}, \varrho, \theta, \xi, \bar{\xi}) := \tilde{\sigma}^j(\vec{c}, \varrho, \theta) \cdot (\xi - \bar{\xi})$.

Wir bestimmen nun die Werte ν_k so dass für einen Wert \bar{R} gilt

$$\begin{aligned} \nu_k R^k &= \bar{R}, \\ \text{z.B. } R^k &= \frac{\mathcal{R}}{M^k}, \nu_k := \frac{M^k}{M}, \bar{R} := \frac{\mathcal{R}}{M}, \end{aligned} \quad (\text{IV13.14})$$

wobei M frei gesetzt werden kann. Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{\xi^j}{R\theta} &= \frac{1}{R\theta} \sum_k \nu_k^j \mu_k = \sum_k \frac{\nu_k^j R^k}{R} \log(c_k^{\nu_k^j}) + \frac{a^j(\varrho, \theta)}{R\theta} \\ &= \sum_k \log(c_k^{\nu_k^j}) + \frac{a^j(\varrho, \theta)}{R\theta} = \log\left(\prod_k c_k^{\nu_k^j}\right) + \frac{a^j(\varrho, \theta)}{R\theta} \end{aligned}$$

und analoges für $\bar{\xi}^j$. Damit gilt

13.6 Lemma. Falls die freie Energie wie in (IV13.12) gegeben ist, lautet die Annahme (IV13.13), dass für alle Reaktionen j

$$\lambda^j = \sigma^j(\vec{c}, \varrho, \theta) \left(\alpha^j(\varrho, \theta) \prod_k c_k^{\nu_k^j} - \bar{\alpha}^j(\varrho, \theta) \prod_k c_k^{\bar{\nu}_k^j} \right) \quad (\text{IV13.15})$$

wenn

$$\alpha^j(\varrho, \theta) = \exp\left(\frac{a^j(\varrho, \theta)}{R\theta}\right), \quad \bar{\alpha}^j(\varrho, \theta) = \exp\left(\frac{\bar{a}^j(\varrho, \theta)}{R\theta}\right).$$

Wir bekommen also die Differentialgleichungen zu den Konzentrationen

$$\begin{aligned} \dot{c}_k &= \sum_j \nu_k \gamma_k^j \sigma^j(\vec{c}, \varrho, \theta) \left(\alpha^j(\varrho, \theta) \prod_l c_l^{\nu_l^j} - \bar{\alpha}^j(\varrho, \theta) \prod_l c_l^{\bar{\nu}_l^j} \right) \\ &\text{für } k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{IV13.16})$$

Was sind die stationären Lösungen dieses Systems? Lösungen mit rechter Seite gleich 0, oder sind das Lösungen mit $\xi^j = \bar{\xi}^j$ für jede Reaktion j ? Antwort auf diese Fragen gibt das folgende Statement.

13.7 Stationäre Lösungen. Es mögen die Voraussetzungen in 13.4 erfüllt sein. Wir führen nur die Abhängigkeit von den Konzentrationen \vec{c} an und definieren $\vec{r} := (\mathbf{r}_k^{\text{SP}})_k$, entsprechend $\vec{\mu} := (\mu_k)_k$. Dann gilt:

(1) Falls (IV13.11): $\vec{r}(\vec{c}) \neq 0 \iff \vec{\mu}(\vec{c}) \bullet \vec{r}(\vec{c}) < 0$.

(2) Falls (IV13.11): $\vec{r}(\vec{c}) = 0 \iff$ Für alle $j = 1, \dots, J$ gilt

$$\sum_k \nu_k \gamma_k^j \mu_k(\vec{c}) = 0 \quad (\text{Allgemeines Massenwirkungsgesetz}).$$

(3) Falls (IV13.15): $\vec{r}(\vec{c}) = 0 \iff$ Für alle $j = 1, \dots, J$ gilt

$$\prod_k c_k^{\gamma_k^j} = \frac{\alpha^j(\varrho, \theta)}{\bar{\alpha}^j(\varrho, \theta)} \quad (\text{Massenwirkungsgesetz}),$$

wobei gilt

$$\frac{\alpha^j(\varrho, \theta)}{\bar{\alpha}^j(\varrho, \theta)} = \exp\left(-\frac{1}{R\theta} \sum_k \nu_k \gamma_k^j a_k(\varrho, \theta)\right).$$

(en: Das ‘‘Massenwirkungsgesetz’’ heißt im Englischen ‘‘mass action law’’.)

Beweis (1). Unter der Voraussetzung (IV13.11) gilt nach der obigen Identität

$$\begin{aligned} \vec{\mu}(\vec{c}) \bullet \vec{r}(\vec{c}) &= \sum_k \mu_k \mathbf{r}_k^{\text{SP}} = - \sum_j (\xi^j(\vec{c}) - \bar{\xi}^j(\vec{c})) \lambda^j(\vec{c}, \xi^j(\vec{c}), \bar{\xi}^j(\vec{c})) \\ &\leq 0 \text{ und } = 0 \text{ genau dann, wenn } \xi^j(\vec{c}) = \bar{\xi}^j(\vec{c}) \text{ für alle } j. \end{aligned}$$

Ist also $\vec{\mu}(\vec{c}) \bullet \vec{r}(\vec{c}) = 0$, so folgt $\xi^j(\vec{c}) = \bar{\xi}^j(\vec{c})$ für alle j , nach 13.4 ist also $\lambda^j(\vec{c}, \xi^j(\vec{c}), \bar{\xi}^j(\vec{c})) = 0$ und daher $\vec{r}(\vec{c}) = 0$. Damit ist (1) bewiesen. \square

Beweis (2). Es ist $\vec{r}(\vec{c}) = 0$ nach (1) äquivalent dazu, dass $\xi^j(\vec{c}) = \bar{\xi}^j(\vec{c})$ für alle j , was nach der Definition in 13.3 bedeutet, dass

$$\sum_k \nu_k \gamma_k^j \mu_k(\vec{c}) = 0 \text{ für alle } j.$$

\square

Beweis (3). Wegen $\xi^j = \bar{\xi}^j$ für alle j ist $\lambda^j = 0$ für alle j nach (IV13.13), also

$$\alpha^j \prod_k c_k^{\nu_k^j} = \bar{\alpha}^j \prod_k c_k^{\bar{\nu}_k^j},$$

das heißt

$$\prod_k c_k^{\gamma_k^j} = \frac{\alpha^j}{\bar{\alpha}^j}.$$

\square

Wir behandeln nun einige konkrete Standardbeispiele.

13.8 Wasser. (Nach I. Müller [87, 3.2.2.3], siehe 13.2.) Für die Reaktion von Wasser in 13.2 ist $J = 4$, $N = 6$ und

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\text{H}} \\ c_{\text{O}} \\ c_{\text{OH}} \\ c_{\text{H}_2} \\ c_{\text{O}_2} \\ c_{\text{H}_2\text{O}} \end{bmatrix}, \quad (\gamma_k^j)_{kj} = \begin{bmatrix} -1 & +2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +2 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}.$$

Dann lauten die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{c}_k = \sum_{j=1}^J \nu_k \gamma_k^j \lambda^j \quad \text{für } k = 1, \dots, N$$

mit (es seien $\sigma^j = 1$)

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \alpha^1 c_1 c_2 - \bar{\alpha}^1 c_3, \\ \lambda^2 &= \alpha^2 c_4 - \bar{\alpha}^2 c_1^2, \\ \lambda^3 &= \alpha^3 c_5 - \bar{\alpha}^3 c_2^2, \\ \lambda^4 &= \alpha^4 c_1 c_3 - \bar{\alpha}^4 c_6. \end{aligned}$$

Zeige, dass die Summe der Konzentrationen gleich 1 ist.

Da die Summe der Konzentrationen gleich 1 ist, muß immer gelten

$$0 = \left(\sum_k c_k \right)^\circ = \sum_k \overset{\circ}{c}_k = \sum_{j,k} \iota_k \gamma_k^j \lambda^j = \sum_j \left(\sum_k \iota_k \gamma_k^j \right) \lambda^j, \quad (\text{IV13.17})$$

und aus den Eigenschaften der λ^j (dass sie beliebige Werte annehmen können) folgt daraus, dass für alle j

$$\boxed{\sum_k \iota_k \gamma_k^j = 0} \quad (\text{IV13.18})$$

sein muss. Die Größen sind konstante Materialgrößen.

Beweis. Wir haben (IV13.18) zu zeigen, wobei $M_1 = M_H$ und $M_2 = M_O$ gegeben sind und

$$M_3 = M_{OH} = M_O + M_H$$

$$M_4 = M_{H_2} = 2M_H$$

$$M_5 = M_{O_2} = 2M_O$$

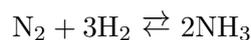
$$M_6 = M_{H_2O} = 2M_H + M_O.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_k M_k \gamma_k^j \right)_j &= (\gamma_k^j)_{jk} (M_k)_k = \begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -M_1 - M_2 + M_3 \\ +2M_1 - M_4 \\ +2M_2 - M_5 \\ -M_1 - M_3 + M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_H - M_O + M_{OH} \\ +2M_H - M_{H_2} \\ +2M_O - M_{O_2} \\ -M_H - M_{OH} + M_{H_2O} \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. \square

13.9 Haber-Bosch-Synthese. (Nach I.Müller [87, 6.5.1.4 Seite 198], siehe auch [Wikipedia: Haber-Bosch-Verfahren].) Bildung von Ammoniak aus Stickstoff und Wasserstoff. Die Reaktion lautet



mit (es ist $J = 1$, $N = 3$)

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\text{N}_2} \\ c_{\text{H}_2} \\ c_{\text{NH}_3} \end{bmatrix}, \quad \nu = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\nu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Das ideale Gas-Modell nach (IV13.15) ist daher (wenn $\sigma := 1$) mit Koeffizientenfunktionen $\alpha > 0$ und $\bar{\alpha} > 0$

$$\lambda = \alpha(\theta)c_1c_2^3 - \bar{\alpha}(\theta)c_3^2.$$

Also ist \vec{c} eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (IV13.16) mit nur einer Reaktion

$$\overset{\circ}{c}_1 = -\nu_1\lambda, \quad \overset{\circ}{c}_2 = -3\nu_2\lambda, \quad \overset{\circ}{c}_3 = 2\nu_3\lambda.$$

Löse im Fall, dass $\alpha, \bar{\alpha} = \text{const}$ ist, das Gleichungssystem und zeige, dass die Summe der Konzentrationen gleich 1 ist.

Beweis. Es ist $(c_1 + c_2 + c_3)^\circ = (-\nu_1 - 3\nu_2 + 2\nu_3)\lambda = 0$, wenn

$$\nu_1 + 3\nu_2 = 2\nu_3.$$

Dies ist erfüllt, da

$$\nu_1 = \nu_{\text{N}_2} = 2\nu_{\text{N}},$$

$$\nu_2 = \nu_{\text{H}_2} = 2\nu_{\text{H}},$$

$$\nu_3 = \nu_{\text{NH}_3} = \nu_{\text{N}} + 3\nu_{\text{H}}.$$

Nun zur Existenz. Für Konstanten K_1 und K_2 ist

$$\frac{c_1}{\nu_1} + \frac{c_3}{2\nu_3} = \text{const} =: K_1 \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{3\nu_2} + \frac{c_3}{2\nu_3} = \text{const} =: \frac{K_2}{3},$$

also

$$c_1 = \nu_1\left(K_1 - \frac{c_3}{2\nu_3}\right), \quad c_2 = \nu_2\left(K_2 - \frac{3c_3}{2\nu_3}\right),$$

das heißt, dass K_1 und K_2 durch die Anfangsbedingung gegeben ist. Und es folgt

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{c}_3 &= 2\nu_3\lambda = 2\nu_3(\alpha c_1c_2^3 - \bar{\alpha}c_3^2) \\ &= 2\nu_3\left(\alpha\nu_1\nu_2^3\left(K_1 - \frac{c_3}{2\nu_3}\right)\left(K_2 - \frac{3c_3}{2\nu_3}\right)^3 - \bar{\alpha}c_3^2\right). \end{aligned}$$

Also ist c_3 eine Lösung dieser Gleichung 4. Ordnung. (Siehe Lösungsformel in I.Müller [87, 6.5.1.4 Seite 199].) \square

13.10 Saha-Formel. (Nach I. Müller [87, 6.5.1.5 Seite 199], siehe auch [Wikipedia: Saha-Gleichung]) (Dies ist wichtig in der Astrophysik, siehe [Oskar von der Lüche: Einführung in die Astronomie und Astrophysik, 2.9 Physik der Sternatmosphären]. Spektroskopische Messungen eines Sternenlichtes erlaubt Berechnung der Oberflächentemperatur.) Wir betrachten hier nur den Fall, dass ein Atom ein Elektron verliert. Die Reaktion ist



Sei (es ist $J = 1$, $N = 3$)

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\text{Na}} \\ c_{\text{Na}^+} \\ c_e \end{bmatrix}, \quad \nu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\nu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nach (IV13.15) ist daher (wenn $\sigma := 1$) mit Koeffizientenfunktionen $\alpha > 0$ und $\bar{\alpha} > 0$

$$\lambda = \alpha(\theta)c_1 - \bar{\alpha}(\theta)c_2c_3,$$

also ist $t \mapsto c(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (IV13.16), falls

$$\overset{\circ}{c}_1 = -\iota_1(\alpha(\theta)c_1 - \bar{\alpha}(\theta)c_2c_3),$$

$$\overset{\circ}{c}_2 = +\iota_2(\alpha(\theta)c_1 - \bar{\alpha}(\theta)c_2c_3),$$

$$\overset{\circ}{c}_3 = +\iota_3(\alpha(\theta)c_1 - \bar{\alpha}(\theta)c_2c_3)$$

Die Molgewichte sind

$$M_{\text{Na}} = 23, \quad M_e = \frac{1}{1840}, \quad M_{\text{Na}^+} = M_{\text{Na}} - M_e.$$

Wenn die ι -Werte dementsprechend gewählt werden, ist die Summe der Konzentrationen gleich 1. Der stationäre Punkt erfüllt $\alpha c_1 = \bar{\alpha} c_2 c_3$, d.h. $\alpha c_{\text{Na}} = \bar{\alpha} c_{\text{Na}^+} c_e$, oder

$$\frac{c_{\text{Na}^+}}{c_{\text{Na}}} \cdot c_e = \frac{\alpha(\theta)}{\bar{\alpha}(\theta)} \quad (\mathbf{Saha-Gleichung}). \quad (\text{IV13.19})$$

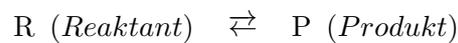
Die allgemeine Saha-Gleichung gilt für ein Atom, welches mehrere Elektronen freisetzen kann. *Bemerkung:* (Siehe ...Exercises..)

Temperaturabhängige Reaktionen

Solche Phänomene treten insbesondere bei der mathematischen Behandlung von Verbrennungsvorgängen (*en.*: Combustion) auf.

Referenzen: Für das folgende Beispiel siehe [B. Larrouturou: Modelisation Physique, Numerique et Mathematique des Phenomenes de Propagation de Flammes, pp. 65-119] in Larrouturou [52].

Als Beispiel betrachten wir eine simple exotherme Reaktion



und dazu nach dem Massenwirkungsgesetz die Funktion

$$\begin{aligned} \lambda &= \sigma(\varrho, \theta)(\alpha_1(\theta) c_1 - \alpha_2(\theta) c_2), \quad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2, \\ \varrho_1 &= \varrho c_1, \quad \varrho_2 = \varrho c_2, \quad c_1 = c, \quad c_2 = 1 - c, \\ \alpha_1(\theta) &:= \exp\left(\frac{h_R^0}{R\theta}\right), \quad \alpha_2(\theta) := \exp\left(\frac{h_P^0}{R\theta}\right). \end{aligned} \quad (\text{IV13.20})$$

Mit dieser Reaktion gilt das Folgende.

13.11 Beispiel (Nach B. Larrouturou). Betrachte für die Dichte ϱ und die Konzentration c das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho c) + \operatorname{div}(\varrho c v - \varrho D \nabla c) &= -\varrho \lambda, \\ \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + p \operatorname{Id}) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}((e + p)v - a \nabla \theta - \varrho Q D \nabla c) &= v \bullet \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Hierbei sind D und Q und a positive Konstanten, und λ ist in (IV13.20) gegeben. Dieses Problem erfüllt das Entropieprinzip in 12.1. Die Energie und der Druck sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varrho c (h_R^0 + c_V \theta) + \varrho (1 - c) (h_P^0 + c_V \theta), \quad e = \varepsilon + \frac{\varrho}{2} |v|^2, \\ p &= R \varrho \theta \quad (\text{vgl. 2.4}). \end{aligned}$$

Daraus bestimmen sich innere freie Energie und die Entropie und es folgt, dass

$$Q = h_R^0 - h_P^0.$$

Wenn $Q = h_R^0 - h_P^0 > 0$ ist, ist die Reaktion $R \rightleftharpoons P$ wie behauptet exotherm. Es sei bemerkt, dass wenn $h_P^0 \rightarrow -\infty$, dann konvergiert $\alpha_2(\theta) \rightarrow 0$, also $\lambda \rightarrow \sigma(\theta) \alpha_1(\theta) c$, d.h. im Limes ist $c = 0$ die stationäre Lösung.

Beweis freie Energie. Es sind zwei Phasen der Gesamtmasse ϱ vorhanden,

$$c_1 := c \quad \text{und} \quad c_2 := 1 - c, \quad c_1 + c_2 = 1,$$

$$\varrho_k := \varrho c_k, \quad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2, \quad \vec{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2).$$

Die innere Energie ist gegeben durch

$$\varepsilon = \varrho c (h_{\text{R}}^0 + c_V \theta) + \varrho (1 - c) (h_{\text{P}}^0 + c_V \theta)$$

$$= \varrho_1 (h_{\text{R}}^0 + c_V \theta) + \varrho_2 (h_{\text{P}}^0 + c_V \theta).$$

Wir sehen dass daraus die freie Energie berechnet werden kann. Es gilt nämlich $f = \varepsilon - \theta \eta$, und da $f'_{\theta} = -\eta$ ist, folgt

$$f - \theta f'_{\theta} = \varepsilon,$$

wobei sowohl f als auch ε Funktionen von $(\vec{\varrho}, \theta)$ sind. Also ist

$$\left(\frac{-f}{\theta}\right)'_{\theta} = \frac{f - \theta f'_{\theta}}{\theta^2} = \frac{\varepsilon}{\theta^2}$$

$$= \varrho_1 \left(\frac{h_{\text{R}}^0}{\theta^2} + \frac{c_V}{\theta}\right) + \varrho_2 \left(\frac{h_{\text{P}}^0}{\theta^2} + \frac{c_V}{\theta}\right)$$

$$= \frac{\varrho_1 h_{\text{R}}^0 + \varrho_2 h_{\text{P}}^0}{\theta^2} + \frac{\varrho c_V}{\theta}.$$

und daher mit einer Funktion $\vec{\varrho} \mapsto g_0(\vec{\varrho})$

$$\frac{-f}{\theta} = -g_0(\vec{\varrho}) - \frac{\varrho_1 h_{\text{R}}^0 + \varrho_2 h_{\text{P}}^0}{\theta} + \varrho c_V \log \theta$$

oder

$$f = g_0(\vec{\varrho})\theta + \varrho_1 h_{\text{R}}^0 + \varrho_2 h_{\text{P}}^0 - \varrho c_V \theta \log \theta.$$

Daraus ergibt sich die Entropie als

$$\eta = -f'_{\theta} = -g_0(\vec{\varrho}) + \varrho c_V (\log \theta + 1),$$

und für den Druck $p = R\varrho\theta$ (vgl. 2.4) erhält man

$$R\varrho\theta = p = \sum_k \varrho_k f'_{\varrho_k} - f = \left(\sum_k \varrho_k g_{0'\varrho_k} - g_0\right)\theta,$$

und damit

$$\sum_k \varrho_k g_{0'\varrho_k} - g_0 = R\varrho.$$

Eine Lösung dieser Differentiengleichung ist (siehe Aufgabe 18.1)

$$g_0(\vec{\varrho}) = R \sum_k \varrho_k (\log \varrho_k - 1),$$

also ergibt sich

$$f(\vec{\varrho}, \theta) = R\theta \sum_k \varrho_k (\log \varrho_k - 1) + \varrho_1 h_R^0 + \varrho_2 h_P^0 - \varrho c_V \theta \log \theta.$$

Daraus folgt für die chemischen Potentiale mit $h_1^0 = h_R^0$ und $h_2^0 = h_P^0$, wobei wir $\log \varrho_k = \log \varrho + \log c_k$ schreiben,

$$\mu_k = f'_{\varrho_k} = R\theta \log c_k + a_k(\varrho, \theta), \quad a_k(\varrho, \theta) := h_k^0 - d(\varrho, \theta), \quad (\text{IV13.21})$$

wobei $d(\varrho, \theta) = R\theta \log \varrho + c_V \theta \log \theta$. Weiter unten werden wir μ_1 und μ_2 noch zerlegen. \square

Beweis Entropieprinzip. Die beiden Massenerhaltungen sind äquivalent zu (die zweite Gleichung ist die Gleichung für die gesamte Masse minus der Gleichung für den ersten Massenanteil)

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_1 + \operatorname{div}(\varrho_1 v - \varrho D \nabla c) &= -\varrho \lambda, \\ \partial_t \varrho_2 + \operatorname{div}(\varrho_2 v + \varrho D \nabla c) &= +\varrho \lambda, \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= -\varrho D \nabla c, \quad \mathbf{J}_2 = +\varrho D \nabla c, \quad \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 = 0, \\ \mathbf{r}_1 &= -\varrho \lambda, \quad \mathbf{r}_2 = +\varrho \lambda, \quad \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Impulsbilanz hat den Drucktensor $\Pi = p \operatorname{Id}$, und die Energiegleichung den Fluss

$$\begin{aligned} q &= q^\epsilon + \mathbf{J}^\epsilon, \quad q^\epsilon := -a \nabla \theta, \\ \mathbf{J}^\epsilon &:= -\varrho Q D \nabla c = \mu_1^\epsilon \mathbf{J}_1 + \mu_2^\epsilon \mathbf{J}_2, \quad \mu_1^\epsilon - \mu_2^\epsilon = Q. \end{aligned}$$

Wir müssen noch die Entropiegleichung verifizieren. Für den Entropiefluss setzen wir $\psi = \eta v + \frac{1}{\theta} q^\epsilon - \mathbf{J}^\eta$ an, wobei wir gemäß der Entropiegleichung in 12.1 für den zusätzlichen Fluss $\mathbf{J}^\eta = \sum_k \mu_k^\eta \mathbf{J}_k$ annehmen, wobei

$$\mu_k = \mu_k^\epsilon + \theta \mu_k^\eta, \quad \mu_k^\epsilon \text{ mit } \mu_1^\epsilon - \mu_2^\epsilon = Q. \quad (\text{IV13.22})$$

Die Entropiegleichung lautet dann (es ist $S = 0$)

$$0 \leq \sigma = \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q^\epsilon - \sum_\alpha \frac{1}{\theta} \mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha - \sum_k (\nabla \mu_k^\eta + \frac{1}{\theta} \nabla \mu_k^\epsilon) \bullet \mathbf{J}_k.$$

Es werden in diesem Fall alle drei Terme nichtnegativ sein. Nun gilt für den Wärmefluss q^ϵ

$$\nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q^\epsilon = -\frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \bullet q^\epsilon = +\frac{a}{\theta^2} |\nabla \theta|^2 \geq 0 \quad \text{wenn } a > 0.$$

Wegen (IV13.21), d.h. $\mu_k = R\theta \log c_k + h_k^0 - d(\varrho, \theta)$, können wir setzen

$$\mu_k^\epsilon = h_k^0 - d^\epsilon \quad \text{und} \quad \mu_k^\eta = R \log c_k - d^\eta,$$

wobei $d^\epsilon + \theta d^\eta = d(\varrho, \theta)$ (as you wish), so dass also die erste Gleichung in (IV13.22) erfüllt ist. Also ist

$$Q = \mu_1^\epsilon - \mu_2^\epsilon = h_R^0 - h_P^0.$$

Aus diesen Darstellungen folgt für den letzten Term der Entropieproduktion, da $h_R^0 = \text{const}$ und $h_P^0 = \text{const}$ konstant sind, also $\mu_2^\epsilon - \mu_1^\epsilon = \text{const}$,

$$\begin{aligned} & - \sum_k (\nabla \mu_k^\eta + \frac{1}{\theta} \nabla \mu_k^\epsilon) \bullet \mathbf{J}_k \\ &= - (\nabla (\mu_2^\eta - \mu_1^\eta) + \frac{1}{\theta} \nabla (\mu_2^\epsilon - \mu_1^\epsilon)) \bullet (\varrho D \nabla c) \\ &= \nabla (\mu_1^\eta - \mu_2^\eta) \bullet (\varrho D \nabla c) = R \nabla (\log c_1 - \log c_2) \bullet (\varrho D \nabla c) \\ &= \varrho D R \cdot \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) |\nabla c|^2 \geq 0 \quad \text{wenn } D > 0. \end{aligned}$$

Es bleibt der zweite Term der Entropieproduktion zu behandeln, aber dass der Reaktionsterm einen nichtnegativen Anteil der Entropieproduktion ergibt, folgt aus der allgemeinen Theorie. \square

Beweis Massenwirkungsgesetz. Die Reaktion $R \rightleftharpoons P$ ergibt

$$\begin{bmatrix} \gamma_R \\ \gamma_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{\nu}_1 \\ \bar{\nu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der allgemeinen Theorie folgend haben wir in (IV13.15) für die Reaktionsrate λ angesetzt, wobei die Darstellung der chemischen Potentiale in (IV13.21) benutzt wird, wobei wir nicht die ϱ -Abhängigkeit nennen,

$$\lambda = \tilde{\sigma}(\theta) \cdot (\alpha(\theta) \prod_k c_k^{\nu_k} - \bar{\alpha}(\theta) \prod_k c_k^{\bar{\nu}_k}) = \tilde{\sigma}(\theta) \cdot (\alpha(\theta) c_1 - \bar{\alpha}(\theta) c_2),$$

wobei, wegen $\nu_k = 1$ für $k = 1, 2$ und $\bar{R} = R$,

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= \exp\left(\frac{a(\theta)}{R\theta}\right), & \bar{\alpha}(\theta) &= \exp\left(\frac{\bar{a}(\theta)}{R\theta}\right), \\ a(\theta) &= \sum_k \nu_k a_k(\theta) = a_1(\theta), & \bar{a}(\theta) &= \sum_k \bar{\nu}_k a_k(\theta) = a_2(\theta). \end{aligned}$$

In (IV13.21) wurde $a_k(\theta) = h_k^0 - d(\theta)$ gezeigt, also

$$\alpha(\theta) = \alpha_1(\theta) \exp\left(-\frac{d(\theta)}{R\theta}\right), \quad \bar{\alpha}(\theta) = \alpha_2(\theta) \exp\left(-\frac{d(\theta)}{R\theta}\right)$$

und damit folgt die Darstellung in (IV13.20). \square

Es sei noch das Massenwirkungsgesetz genannt, welches hier besagt, dass

$$\frac{c}{1-c} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \exp\left(\frac{h_P^0 - h_R^0}{R\theta}\right) = \exp\left(-\frac{Q}{R\theta}\right).$$

Das bestätigt obige Aussage, dass $Q \gg 1$ zur Folge hat, dass im stationären Fall c fast 0 ist. Es sei noch bemerkt, dass das Differentialgleichungssystem in der Aussage **13.11** äquivalent geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \varrho \dot{c} - \operatorname{div}(\varrho D \nabla c) &= -\varrho \lambda, \\ \varrho \dot{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \dot{\varepsilon} + (\varepsilon + p) \operatorname{div} v - \operatorname{div}(a \nabla \theta + \varrho Q D \nabla c) &= 0, \end{aligned}$$

wobei λ wie in **(IV13.20)**, $a \geq 0$ und $D \geq 0$, und

$$p = R\theta\varrho \quad \text{und} \quad \varepsilon = \varrho(ch_{\text{R}}^0 + (1-c)h_{\text{P}}^0 + c_V\theta).$$

IN BEARBEITUNG

14 Biologische Reaktionen

Wir geben hier einige Beispiele für die Reaktionsterme \mathbf{r}_α in (IV11.2) an, wie sie in der Biologie auftreten. Wir betrachten den isothermen Fall und gehen von einer freien Energie aus, die eine konstitutive Funktion der Dichten ϱ_α ist:

$$f = \widehat{f}((\varrho_\alpha)_\alpha), \quad \vec{\varrho} = (\varrho_\alpha)_\alpha,$$

so dass nach 11.9 für das chemische Potential gilt

$$\mu_\alpha = f'_{\varrho_\alpha}(\vec{\varrho}).$$

Das Differentialgleichungssystem der Massenerhaltungen lautet

$$\partial_t \varrho_\alpha + \operatorname{div}(\varrho_\alpha v + \mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \dots, m,$$

wobei wir voraussetzen, dass

$$\varrho := \sum_\alpha \varrho_\alpha, \quad \mathbf{J} := \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = 0, \quad \mathbf{r} := \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0, \quad (\text{IV14.1})$$

Referenzen: See the examples in [H.W. Alt & W.Alt: Fluid mixtures and applications to biological systems. In M. Griebel: Singular Phenomena and Scaling in Mathematical Models (SFB 611), pp. 191-220. Springer 2014]. Also visit [Wikipedia: Lotka-Volterra equation]. We refer also to [93, Chap. 14 §F Applications to the Equations of Mathematical Ecology].

We treat here only the case, that the masses ϱ_α are spatially homogeneous (hence $\mathbf{J}_\alpha = 0$) and that $v = 0$ (this is mainly done for simplicity). Then the reaction equations become

$$\dot{\varrho}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \text{ für alle } \alpha.$$

14.1 Remark. In this situation the entropy principle becomes

$$\dot{f} = \sum_\alpha \mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha \leq 0.$$

Beweis. This is also true because

$$\dot{f} = \sum_\alpha f'_{\varrho_\alpha} \dot{\varrho}_\alpha = \sum_\alpha \mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha.$$

□

There is one example, a gradient flow, for which the \mathbf{r}_α are proportional to μ_α , say, $\dot{\varrho}_\alpha = -\lambda \mu_\alpha$, where $\lambda = \widehat{\lambda}(\varrho) > 0$. In this case the entropy inequality is trivially satisfied.

As first example we consider cyclic reactions, which are important cases and often the basis for biological processes.

14.2 Cyclic processes. The system is

$$\begin{aligned}\dot{\varrho}_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha(\bar{\varrho}) \text{ for } \alpha = 1, \dots, N, \\ \mathbf{r}_\alpha(\bar{\varrho}) &:= \eta_{\alpha+1}\varrho_{\alpha+1} - \eta_\alpha\varrho_\alpha,\end{aligned}\tag{IV14.2}$$

with cyclic repetition, $\varrho_{N+1} := \varrho_1$, $\eta_{N+1} := \eta_1$. Here $\bar{\varrho} = (\varrho_\alpha)_\alpha$ and η_α are positive constants. This system satisfies the entropy inequality in 14.1, if

$$f = \hat{f}(\bar{\varrho}) = f_0(\varrho) + b(\varrho) \sum_{\alpha=1}^N \eta_\alpha \varrho_\alpha^2,$$

where $\varrho = \sum_{\alpha=1}^N \varrho_\alpha$ and with a positive functions $b(\varrho) > 0$.

The stationary solutions, if they exist, are values $\bar{\varrho}^s = (\varrho_\alpha^s)_\alpha$ with

$$\eta_{\alpha+1}\varrho_{\alpha+1}^s = \eta_\alpha\varrho_\alpha^s =: \eta^s.$$

This $\bar{\varrho}^s \in \mathbb{R}^N$ is a unique point, if the value of $\varrho^s = \sum_{\alpha=1}^N \varrho_\alpha^s$ is considered to be given. For general solutions $\bar{\varrho}$ is rotating around the stationary line and converging to a value $\bar{\varrho}^s$, what can be seen from the free energy. We mention that the sum in the free energy can be written as

$$\sum_\alpha \eta_\alpha \varrho_\alpha^2 = \sum_\alpha \eta_\alpha (\varrho_\alpha - \varrho_\alpha^s)^2 + 2\eta^s \varrho - \sum_\alpha \eta_\alpha (\varrho_\alpha^s)^2.$$

Moreover, we obtain overall mass conservation, that is $\mathbf{r} = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0$ and therefore $\dot{\varrho} = 0$.

Beweis. We take a free energy

$$f = \hat{f}(\bar{\varrho}) = \frac{1}{2} \sum_\alpha b_\alpha \varrho_\alpha^2$$

with $b_\alpha \in \mathbb{R}$, so that

$$\mu_\alpha = f'_{\varrho_\alpha} = b_\alpha \varrho_\alpha.$$

Then, with $b_\alpha = \eta_\alpha \tilde{b}_\alpha$ and assuming $\tilde{b}_\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha &= \sum_\alpha b_\alpha \varrho_\alpha (\eta_{\alpha+1} \varrho_{\alpha+1} - \eta_\alpha \varrho_\alpha) \\ &= \sum_\alpha (\tilde{b}_\alpha (\eta_{\alpha+1} \varrho_{\alpha+1}) (\eta_\alpha \varrho_\alpha) - \tilde{b}_\alpha (\eta_\alpha \varrho_\alpha)^2) \\ &= \sum_\alpha \left(\sqrt{\frac{\tilde{b}_\alpha}{\tilde{b}_{\alpha+1}}} \cdot \xi_{\alpha+1} \xi_\alpha - \xi_\alpha^2 \right),\end{aligned}$$

where $\xi_\alpha := \eta_\alpha \varrho_\alpha \sqrt{\tilde{b}_\alpha}$. Letting

$$c_\alpha := \sqrt{\frac{\tilde{b}_\alpha}{\tilde{b}_{\alpha+1}}}$$

and using $\xi_\alpha \xi_{\alpha+1} \leq \frac{1}{2}(\xi_\alpha^2 + \xi_{\alpha+1}^2)$, this is

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha} (c_\alpha \xi_{\alpha+1} \xi_\alpha - \xi_\alpha^2) \leq \sum_{\alpha} \left(\frac{c_\alpha}{2} \xi_{\alpha+1}^2 + \frac{c_\alpha}{2} \xi_\alpha^2 - \xi_\alpha^2 \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{c_{\alpha-1}}{2} + \frac{c_\alpha}{2} - 1 \right) \xi_\alpha^2 = 0 \quad \text{if } c_\alpha = 1 \text{ for all } \alpha, \end{aligned}$$

that is

$$b = \tilde{b}_\alpha = \tilde{b}_{\alpha+1} > 0 \text{ for all } \alpha,$$

or $b_\alpha = \eta_\alpha b$. This shows the theorem in this special case.

If we take a free energy $f = f(\bar{\varrho}, \varrho)$ as in the assertion, the derivative with respect to ϱ has no effect, since the total mass production \mathbf{r} is zero. Therefore the theorem is proved. \square

As next example we treat the case which you will find in the literature, its a system consisting of the second and third equation below, the classical Lotka-Volterra system.

14.3 Lotka-Volterra system. For the predator-prey model (*de*: Räuber-Beute Modell) we let $x > 0$ be the number of prey (*de*: Beute) and $y > 0$ the number of predator (*de*: Räuber) and consider the system

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\lambda x, \\ \dot{x} &= x \cdot (\alpha - \beta y), \\ \dot{y} &= -y \cdot (\gamma - \delta x), \\ \dot{z} &= \eta xy, \\ \dot{d} &= \kappa y. \end{aligned}$$

The additional variables are a the quantities b , d , and z . They are modelled by \dot{b} proportional to birth of prey, \dot{d} proportional to death of predator, and \dot{z} proportional to interactions between predator and prey. This system satisfies the inequality in 14.1, which reduces to

$$\varepsilon \lambda x + \zeta \kappa y + \xi \eta xy \geq 0,$$

if the free energy is given by

$$f = \hat{f}(b, x, y, z, d) = -\gamma \log x - \alpha \log y + \delta x + \beta y + \varepsilon b - \zeta d - \xi z,$$

which is a convex function for constants $\gamma > 0$ and $\alpha > 0$. The inequality in 14.1 holds, if in addition the constants ε , ζ , η , λ , κ and ξ satisfy $\varepsilon \lambda > 0$, $\zeta \kappa > 0$, and $\xi \eta > 0$. The remaining quantities β and δ are positive because of biological reasons.

The variables transform into (bio)mass densities by

$$\varrho_b = bm_b, \varrho_x = xm_x, \varrho_y = ym_y, \varrho_d = dm_d, \varrho_z = zm_z$$

with positive mass constants satisfying

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha m_x}{m_b}, \quad \kappa = \frac{\gamma m_y}{m_d}, \\ \eta &= \frac{\beta m_x - \delta m_y}{m_z}, \end{aligned} \tag{IV14.3}$$

which implies that the sum of the mass production terms are 0. The parameter η is positive if and only if biomass is lost during transfer from prey to predator.

Beweis. It is $f = \tilde{f}(b, x, y, z, d) = -\log K + \varepsilon b - \zeta d - \xi z$ with

$$K \equiv \widehat{K}(x, y) = \frac{x^\gamma y^\alpha}{e^{\delta x} e^{\beta y}}$$

and one computes for solutions of the system that $\dot{K} = 0$, that is, this convex part of f is constant for solutions, and moreover, we see that solutions rotate around the equilibrium

$$x = \frac{\gamma}{\delta}, \quad y = \frac{\alpha}{\beta}.$$

This is the basis for the entire result: For the mass densities the system is

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_b &= \mathbf{r}_b = m_b \mathbf{r}'_b, & \mathbf{r}'_b &:= -\lambda x, \\ \dot{\varrho}_x &= \mathbf{r}_x = m_x \mathbf{r}'_x, & \mathbf{r}'_x &:= x \cdot (\alpha - \beta y), \\ \dot{\varrho}_y &= \mathbf{r}_y = m_y \mathbf{r}'_y, & \mathbf{r}'_y &:= -y \cdot (\gamma - \delta x), \\ \dot{\varrho}_z &= \mathbf{r}_z = m_z \mathbf{r}'_z, & \mathbf{r}'_z &:= \eta xy, \\ \dot{\varrho}_d &= \mathbf{r}_d = m_d \mathbf{r}'_d, & \mathbf{r}'_d &:= \kappa y, \end{aligned}$$

and, using the identities (IV14.3), that is

$$\beta m_x = \delta m_y + \eta m_z, \quad \lambda m_b = \alpha m_x, \quad \kappa m_d = \gamma m_y, \tag{IV14.4}$$

we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_b &= -\tau_b, & \tau_b &:= \lambda m_b x, \\ \mathbf{r}_x &= \tau_b - \tau_{xy}, & \tau_{xy} &:= cxy, & c &:= \beta m_x, \\ \mathbf{r}_y &= -\tau_d + (1 - \omega)\tau_{xy}, & \omega &:= \frac{\eta m_z}{c}, \\ \mathbf{r}_z &= \omega\tau_{xy}, & (\omega c = \eta m_z, (1 - \omega)c = \delta m_y) \\ \mathbf{r}_d &= \tau_d, & \tau_d &:= \kappa m_d y, \end{aligned}$$

hence $\mathbf{r} = 0$. Then one easily computes

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_x \tilde{f}'_x + \mathbf{r}'_y \tilde{f}'_y &= -\frac{1}{K}(\mathbf{r}'_x K'_{,x} + \mathbf{r}'_y K'_{,y}) \\ &= -\frac{1}{K}(\dot{x}K'_{,x} + \dot{y}K'_{,y}) = -\frac{1}{K}\dot{K} = 0,\end{aligned}$$

and therefore

$$\begin{aligned}\sum_{\beta} \mathbf{r}'_{\beta} \mu_{\beta} &= \mathbf{r}'_b \tilde{f}'_b + \mathbf{r}'_x \tilde{f}'_x + \mathbf{r}'_y \tilde{f}'_y + \mathbf{r}'_z \tilde{f}'_z + \mathbf{r}'_d \tilde{f}'_d \\ &= \mathbf{r}'_b \tilde{f}'_b + \mathbf{r}'_z \tilde{f}'_z + \mathbf{r}'_d \tilde{f}'_d = -\varepsilon \lambda x - \zeta \kappa y - \xi \eta xy \leq 0.\end{aligned}$$

□

Jetzt noch einige Beispiele aus dem Buch von [93, §14 C]. Diese Beispiele sind für die Konzentrationen c_k geschrieben, die Gleichungen lauten

$$\rho \dot{c}_k + \operatorname{div} \mathbf{J}_k = \mathbf{r}_K$$

für alle k , wobei (IV14.1) gelte. Es werden hier nur die zwei wesentlichen Gleichungen aufgeführt. Ähnlich wie bei 14.3 hat man dies noch zu einem vollständigen System (biologisch abgeschlossen) zu erweitern, so dass dann die Entropieungleichung gilt. Es ist auch noch nicht klar, wie die zugehörige freie Energie aussieht. Es ist $v = 0$.

14.4 Ökologische Interaktionen. Es werden Differentialgleichungen von der Form

$$\begin{aligned}\partial_t c_k - \operatorname{div} \left(\sum_l a_{kl}(c) \nabla c_l \right) &= g_k(c) \text{ für } k = 1, 2, \\ g_k(c) &= c_k h_k(c),\end{aligned}$$

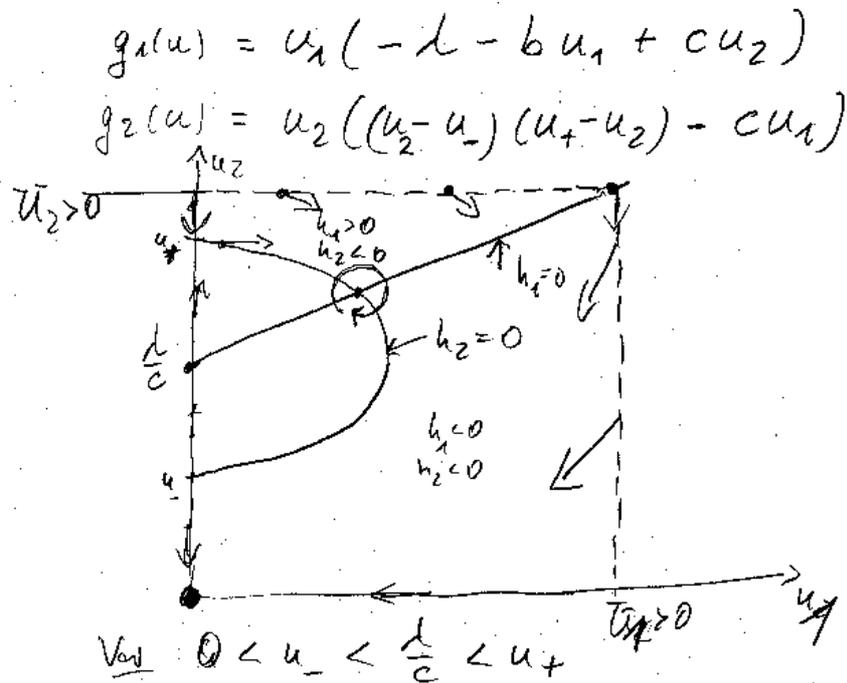
behandelt.

(1) **Räuber-Beute-Modell (Predator-Prey).**

$$\begin{aligned}c_1 &\text{ Räuber, } c_2 \text{ Beute,} \\ \partial_1 h_2 &< 0 \text{ (mehr Räuber erniedrigt Beute-Wachstumsrate),} \\ \partial_2 h_1 &> 0 \text{ (mehr Beute erhöht Räuber-Wachstumsrate).}\end{aligned}$$

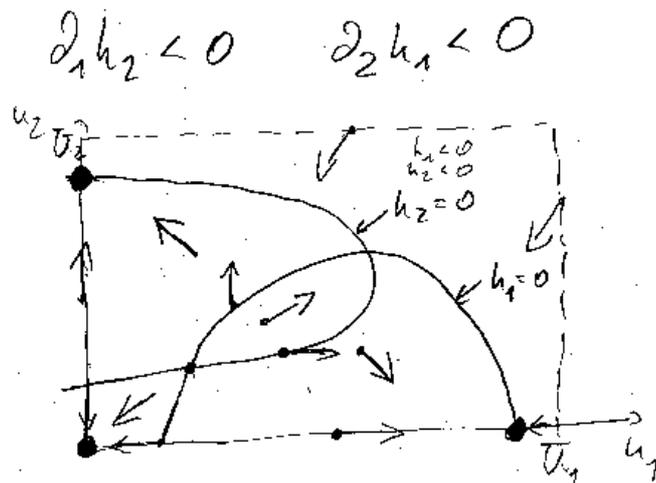
Das Standardbeispiel ist

$$\begin{aligned}g_1(c) &:= c_1(-\lambda + \nu c_2) && (\mu > 0 \text{ Geburtenrate Beute),} \\ g_2(c) &:= c_2(\mu - \nu c_1) && (\lambda > 0 \text{ Todesrate Räuber),} \\ &&& (\nu > 0 \text{ Fressrate).}\end{aligned}$$



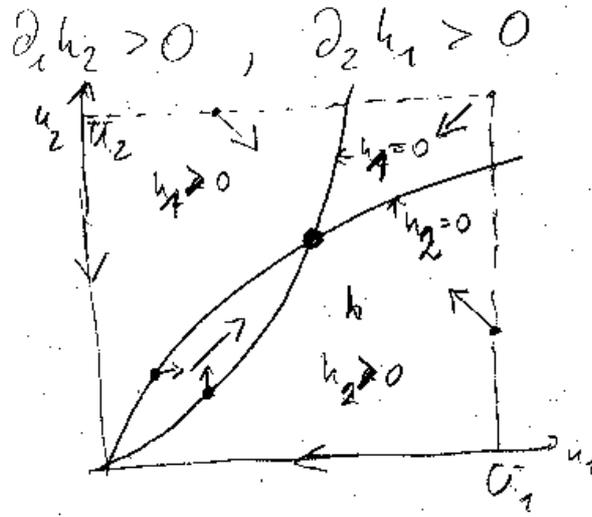
(2) *Rivalisierende Spezies (Competing species).*

$$\partial_2 h_1 < 0, \quad \partial_1 h_2 < 0.$$



(3) *Symbiose.*

$$\partial_2 h_1 > 0, \quad \partial_1 h_2 > 0.$$



Text wird fortgesetzt

15 Prandtl'sche Grenzschicht

In diesem Abschnitt betrachten wir Flüssigkeiten mit geringer Zähigkeit oder hoher Geschwindigkeit in einem Gebiet Ω , für die die Randbedingung $v = 0$ auf $\partial\Omega$ gegeben ist. In dem Falle, dass dabei sehr hohe Geschwindigkeiten in der Flüssigkeit auftreten, ist der Übergang zur Nullgeschwindigkeit am Rande nur auf einem schmalen Randstreifen (einem "Rand-Layer", engl.: "boundary layer") realisiert, ein Bereich, der auch so schmal sein kann, dass er durch einen Flächenterm auf $\partial\Omega$ sehr gut approximiert wird. Es sind dann also nicht mehr die stationären inkompressiblen Poiseuille Strömungen [I.3.7](#) die physikalische Lösungen, sondern in vielen Fällen stellt sich eine wie auch immer geartete instationäre Lösung ein. Der Übergang von laminarem Fluß zur turbulenten Strömung kann dabei sehr schnell passieren (siehe dazu die Oberseite des Flügels in [Abb. 31](#)).

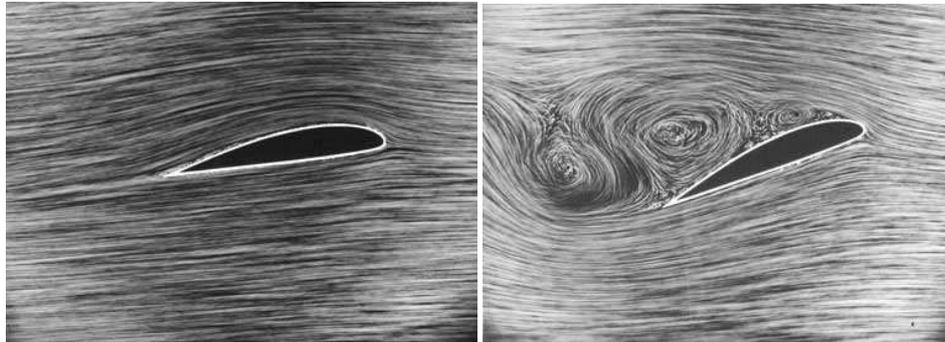


Abb. 31: *Left*: Laminar flow. *Right*: Turbulent flow.

Wir wollen nun diese Grenzschicht in einem Modell für Flüssigkeiten in einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$ betrachten (der Beobachter sitze auf Ω , weswegen Ω zeitunabhängig ist). Wir nehmen dazu die inkompressible Navier-Stokes Gleichung in Ω

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x v &= 0, \\ \partial_t(\varrho_0 v) + \operatorname{div}_x(\varrho_0 v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}, \\ \Pi &= p\operatorname{Id} - S, \quad S = 2a(Dv)^S, \\ v &= v(t, x), \quad p = p(t, x), \end{aligned} \tag{IV15.1}$$

und betrachten $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ als festen Körper, d.h. wir nehmen als Randbedingung

$$v = 0 \text{ auf } \Gamma \tag{IV15.2}$$

(andere nichttrivialen Randbedingungen von der Massen- und Impulserhaltung sind hier nicht gefragt).

Wir führen nun die Grenzschicht in einem ebenen dreidimensionalen Modell ein und verwenden die Bezeichnungen der "Asymptotischen Entwicklung"

[Wikipedia: Matched asymptotic expansion]. Es sei

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}, \quad \Gamma := \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}.$$

Für $x \in \Omega$ führen wir die Variablen y nahe der Grenze Γ ein durch

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \frac{x_3}{\delta} \quad \text{mit} \quad \delta > 0, \quad (\text{IV15.3})$$

und definieren zu einer Größe $(t, x) \mapsto u(t, x)$ eine Größe $(t, y) \mapsto U(t, y)$ durch die Beziehung $U(t, y) = u(t, x)$, wenn x und y wie in (IV15.3) zusammenhängen. Wir bezeichnen nun

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}^2 \times]\varepsilon_\delta, \infty[\text{ das } \mathbf{\ddot{a}u\ddot{b}ere \text{ Gebiet}}, \\ & \mathbb{R}^2 \times [0, 2\varepsilon_\delta[\text{ das } \mathbf{innere \text{ Gebiet}}, \\ & \text{wobei } \varepsilon_\delta \rightarrow 0 \text{ und } \frac{\varepsilon_\delta}{\delta} \rightarrow \infty \text{ f\"ur } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist $\varepsilon_\delta := \sqrt{\delta}$. Wir stellen uns vor, dass im äußeren Gebiet die Funktion $(t, x) \mapsto u(t, x)$ relevant ist und im inneren Gebiet die Funktion $(t, y) \mapsto U(t, y)$. Dort wo das äußere Gebiet mit dem inneren Gebiet zusammenfällt betrachten wir insbesondere die Gleichung

$$U(t, y_1, y_2, y_3) = u(t, y_1, y_2, \delta y_3) \quad \text{für} \quad \frac{\varepsilon_\delta}{\delta} \leq y_3 \leq \frac{2\varepsilon_\delta}{\delta}, \quad (\text{IV15.4})$$

also der Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Funktion u zu der neu definierten Funktion U . Wir fragen nun nach der Konvergenz

$$\begin{aligned} & \left\| u - u^{(0)} \right\|_{C^0(K_\delta^a)} \rightarrow 0 \text{ für } \delta \rightarrow 0, \quad K_\delta^a := K^a \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times]\varepsilon_\delta, \infty[), \\ & \left\| U - U^{(0)} \right\|_{C^0(K_\delta^i)} \rightarrow 0 \text{ für } \delta \rightarrow 0, \quad K_\delta^i := (K^i \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)) \times [0, 2\varepsilon_\delta[\end{aligned}$$

für kompakte Mengen $K^a \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Gilt diese Konvergenz, so sprechen wir von einer **inneren Lösung** $U^{(0)}$ und einer **äußeren Lösung** $u^{(0)}$, wobei der Zusammenhang durch **Matching-Bedingungen** gegeben wird, die sich aus (IV15.4) herleiten. Die Funktion u ist hier nur eine Beispielfunktionen, in Wirklichkeit, d.h. für die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung, muss dafür aber die Geschwindigkeit und der Druck genommen werden.

Usually the expansion for the inner solution U is $U = U^{(0)} + \delta U^{(1)} + \dots$ with different matching conditions for the higher terms.

Prandtl'sche Grenzschicht-Gleichung

Wir wenden diese Konvergenz an auf die Strömung mit geringer Zähigkeit, also mit sehr kleinem Zähigkeitskoeffizienten (siehe zum Beispiel die Darstellung in Abb. 32)

$$a = \delta^2.$$

Die Strömungsgleichungen mit Randbedingung sind dann

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_x v &= 0, \\ \varrho_0(\partial_t v + (v \bullet \nabla_x)v) &= -\nabla_x p + \delta^2 \Delta_x v + \mathbf{f} \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{in } \mathbb{R} \times \Omega, \\ \text{auf } \mathbb{R} \times \Gamma. \end{array} \quad (\text{IV15.5})$$

Es sei nun (v, p) eine Lösung sowie

$$\begin{aligned} V(t, y_1, y_2, y_3) &= v(t, y_1, y_2, \delta y_3), \\ P(t, y_1, y_2, y_3) &= p(t, y_1, y_2, \delta y_3). \end{aligned} \quad (\text{IV15.6})$$

Dann erhalten wir die folgenden Aussagen, falls δ gegen 0 konvergiert.

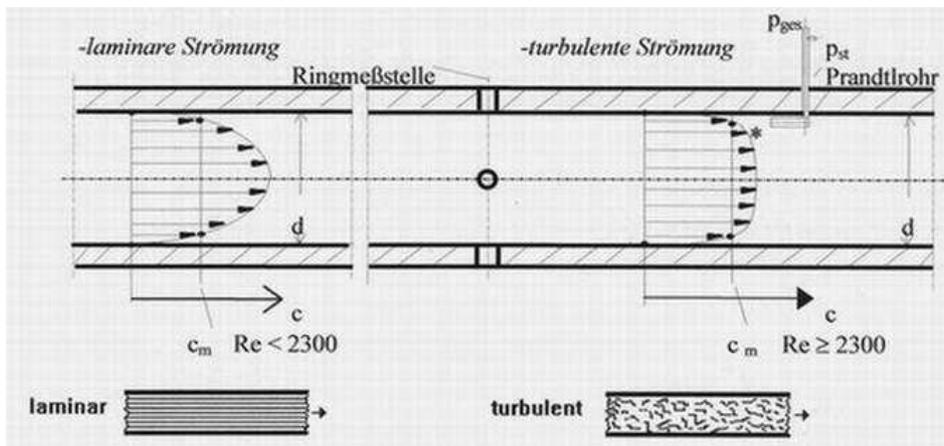


Abb. 32: Flow through a pipe

Auf dem Teilintervall $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [\varepsilon_\delta, \infty[$. Falls $v \rightarrow v^{(0)}, p \rightarrow p^{(0)}$ (wir nehmen an, dass \mathbf{f} nicht von δ abhängt) erhalten wir die Grenzgleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x v^{(0)} &= 0, \\ \varrho_0(\partial_t v^{(0)} + (v^{(0)} \cdot \nabla_x)v^{(0)}) &= -\nabla_x p^{(0)} + \mathbf{f} \end{aligned} \quad (\text{IV15.7})$$

in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[$.⁷

⁷ Diese Gleichungen bezeichnet man manchmal als inkompressible isotherme Euler Gleichungen.

Auf dem Teilintervall $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [\varepsilon_\delta, 2\varepsilon_\delta]$. Wir haben die "Randbedingung"

$$\left. \begin{aligned} V(t, y_1, y_2, y_3) &= v(t, y_1, y_2, \delta y_3) \\ P(t, y_1, y_2, y_3) &= p(t, y_1, y_2, \delta y_3) \end{aligned} \right\} \text{für } \frac{\varepsilon_\delta}{\delta} \leq y_3 \leq \frac{2\varepsilon_\delta}{\delta}.$$

Wenn wir $\varepsilon_\delta := \sqrt{\delta}$ setzen und wenn

$$y_3 = \frac{\varepsilon_\delta}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \rightarrow \infty, \quad \delta y_3 \rightarrow 0,$$

erhalten wir für $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} V^{(0)}(t, y_1, y_2, \infty) &\leftarrow V(t, y_1, y_2, \frac{1}{\sqrt{\delta}}) = v(t, y_1, y_2, \sqrt{\delta}) \rightarrow v^{(0)}(t, y_1, y_2, 0), \\ P^{(0)}(t, y_1, y_2, \infty) &\leftarrow P(t, y_1, y_2, \frac{1}{\sqrt{\delta}}) = p(t, y_1, y_2, \sqrt{\delta}) \rightarrow p^{(0)}(t, y_1, y_2, 0), \end{aligned}$$

wobei $v \rightarrow v^{(0)}$, $p \rightarrow p^{(0)}$ und $V \rightarrow V^{(0)}$, $P \rightarrow P^{(0)}$ vorausgesetzt wurde. Also haben wir die Matching-Bedingungen

$$\begin{aligned} V^{(0)}(t, y_1, y_2, \infty) &= v^{(0)}(t, y_1, y_2, 0), \\ P^{(0)}(t, y_1, y_2, \infty) &= p^{(0)}(t, y_1, y_2, 0). \end{aligned} \tag{IV15.8}$$

Auf dem Teilintervall $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 2\varepsilon_\delta[$. Die Randbedingung $v = 0$ führt wegen

$$V(t, y_1, y_2, y_3) = v(t, y_1, y_2, \delta y_3) \tag{IV15.9}$$

und $V \rightarrow V^{(0)}$ zur Randbedingung

$$V^{(0)}(t, y_1, y_2, 0) = 0. \tag{IV15.10}$$

Die Gleichung (IV15.9) ergibt auch die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \partial_t V, \quad \partial_{x_i} v = \partial_{y_i} V, \quad \partial_{x_i}^2 v = \partial_{y_i}^2 V \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \partial_{x_3} v &= \frac{1}{\delta} \partial_{y_3} V, \quad \partial_{x_3}^2 v = \frac{1}{\delta^2} \partial_{y_3}^2 V, \\ \partial_{x_i} p &= \partial_{y_i} P \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \partial_{x_3} p &= \frac{1}{\delta} \partial_{y_3} P. \end{aligned}$$

Da sich die Navier-Stokes Gleichungen (IV15.1) schreiben als

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 + \partial_{x_3} v_3 &= 0, \\ \varrho_0 \partial_t v_i + \varrho_0 (v_1 \partial_{x_1} + v_2 \partial_{x_2} + v_3 \partial_{x_3}) v_i &= -\partial_{x_i} p \\ &+ \delta^2 (\partial_{x_1}^2 v_i + \partial_{x_2}^2 v_i + \partial_{x_3}^2 v_i) + \mathbf{f}_i \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \varrho_0 \partial_t v_3 + \varrho_0 (v_1 \partial_{x_1} + v_2 \partial_{x_2} + v_3 \partial_{x_3}) v_3 &= -\partial_{x_3} p \\ &+ \delta^2 (\partial_{x_1}^2 v_3 + \partial_{x_2}^2 v_3 + \partial_{x_3}^2 v_3) + \mathbf{f}_3, \end{aligned}$$

werden sie in (V, P) transformiert zu

$$\begin{aligned}\partial_{y_1} V_1 + \partial_{y_2} V_2 + \frac{1}{\delta} \partial_{y_3} V_3 &= 0, \\ \varrho_0 \partial_t V_i + \varrho_0 (V_1 \partial_{y_1} + V_2 \partial_{y_2} + \frac{1}{\delta} V_3 \partial_{y_3}) V_i &= -\partial_{y_i} P \\ &+ \delta^2 (\partial_{y_1}^2 V_i + \partial_{y_2}^2 V_i) + \partial_{y_3}^2 V_i + \mathbf{f}_i \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \varrho_0 \partial_t V_3 + \varrho_0 (V_1 \partial_{y_1} + V_2 \partial_{y_2} + \frac{1}{\delta} V_3 \partial_{y_3}) V_3 &= -\frac{1}{\delta} \partial_{y_3} P \\ &+ \delta^2 (\partial_{y_1}^2 V_3 + \partial_{y_2}^2 V_3) + \partial_{y_3}^2 V_3 + \mathbf{f}_3.\end{aligned}$$

Gilt nun

$$\begin{aligned}V &= V^{(0)} + \delta V^{(1)} + \mathcal{O}(\delta^2), \\ P &= P^{(0)} + \delta P^{(1)} + \mathcal{O}(\delta^2),\end{aligned}$$

so wird die Massenerhaltung zu

$$\partial_{y_1} V_1^{(0)} + \partial_{y_2} V_2^{(0)} + \frac{1}{\delta} \partial_{y_3} V_3^{(0)} + \partial_{y_3} V_3^{(1)} = \mathcal{O}(\delta),$$

und daher folgt

$$\begin{aligned}\partial_{y_3} V_3^{(0)} &= 0, \\ \partial_{y_1} V_1^{(0)} + \partial_{y_2} V_2^{(0)} + \partial_{y_3} V_3^{(1)} &= 0.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung sagt, dass $V_3^{(0)}$ eine Funktion von (t, y_1, y_2) ist, wegen der Randbedingung $V^{(0)}(t, y_1, y_2, 0) = 0$ also $V_3^{(0)} = 0$, und damit wegen der Matching-Bedingung $V^{(0)}(t, y_1, y_2, \infty) = v^{(0)}(t, y_1, y_2, 0)$

$$v_3^{(0)}(t, y_1, y_2, 0) = 0.$$

Also reduziert sich die Entwicklung von (V, P) zu

$$\begin{aligned}V_i &= V_i^{(0)} + \mathcal{O}(\delta) \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \frac{1}{\delta} V_3 &= V_3^{(1)} + \mathcal{O}(\delta), \\ P &= P^{(0)} + \delta P^{(1)} + \mathcal{O}(\delta^2),\end{aligned}$$

und die Impulserhaltung wird zu

$$\begin{aligned}\varrho_0 \partial_t V_i^{(0)} + \varrho_0 (V_1^{(0)} \partial_{y_1} + V_2^{(0)} \partial_{y_2} + V_3^{(1)} \partial_{y_3}) V_i^{(0)} &= -\partial_{y_i} P^{(0)} \\ &+ \partial_{y_3}^2 V_i^{(0)} + \mathbf{f}_i + \mathcal{O}(\delta) \quad \text{für } i = 1, 2, \\ 0 &= -\frac{1}{\delta} \partial_{y_3} P^{(0)} - \partial_{y_3} P^{(1)} + \mathbf{f}_3 + \mathcal{O}(\delta).\end{aligned}$$

Also ergibt dies die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_0 \partial_t V_i^{(0)} + \varrho_0 (V_1^{(0)} \partial_{y_1} + V_2^{(0)} \partial_{y_2} + V_3^{(1)} \partial_{y_3}) V_i^{(0)} \\ = -\partial_{y_i} P^{(0)} + \partial_{y_3}^2 V_i^{(0)} + \mathbf{f}_i^{(0)} \quad \text{für } i = 1, 2, \\ 0 = \partial_{y_3} P^{(0)}, \\ 0 = \partial_{y_3} P^{(1)} - \mathbf{f}_3^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{IV15.11})$$

Hier haben wir benutzt, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t, y_1, y_2, \delta y_3) &= \underbrace{\mathbf{f}(t, y_1, y_2, 0)}_{=: \mathbf{f}^{(0)}(t, y_1, y_2)} + \mathcal{O}(\delta). \end{aligned}$$

Resultat auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$. Definieren wir jetzt noch die Funktionen (nicht zu verwechseln mit den anfänglichen Funktionen)

$$\begin{aligned} v &:= v^{(0)}, \quad V_i := V_i^{(0)} \quad \text{für } i = 1, 2, \\ V_3 &:= V_3^{(1)}, \quad P := P^{(0)}, \end{aligned}$$

so folgt

15.1 Prandtl'sche Grenzschicht. Es gelten die folgenden Gleichungen in (t, x)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x v &= 0, \\ \varrho_0 (\partial_t v + (v \cdot \nabla_x) v) &= -\nabla_x p + \mathbf{f}, \\ v_3(t, x_1, x_2, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV15.12})$$

und die folgenden Gleichungen in (t, y)

$$\begin{aligned} \partial_{y_1} V_1 + \partial_{y_2} V_2 + \partial_{y_3} V_3 &= 0, \\ \varrho_0 \partial_t V_i + \varrho_0 (V_1 \partial_{y_1} + V_2 \partial_{y_2} + V_3 \partial_{y_3}) V_i \\ &= -\partial_{y_i} P + \partial_{y_3}^2 V_i + \mathbf{f}_i^{(0)} \quad \text{für } i = 1, 2, \\ 0 &= \partial_{y_3} P, \\ V(t, y_1, y_2, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV15.13})$$

mit den Matching-Bedingungen

$$\begin{aligned} V_i(t, y_1, y_2, +\infty) &= v_i(t, y_1, y_2, 0) \quad \text{für } i = 1, 2, \\ P(t, y_1, y_2, +\infty) &= p(t, y_1, y_2, 0). \end{aligned} \quad (\text{IV15.14})$$

Referenz: Zur Prandtl'schen Grenzschichttheorie siehe Stemmer [65] und White [70, 4-2 Laminar boundary layer equations].

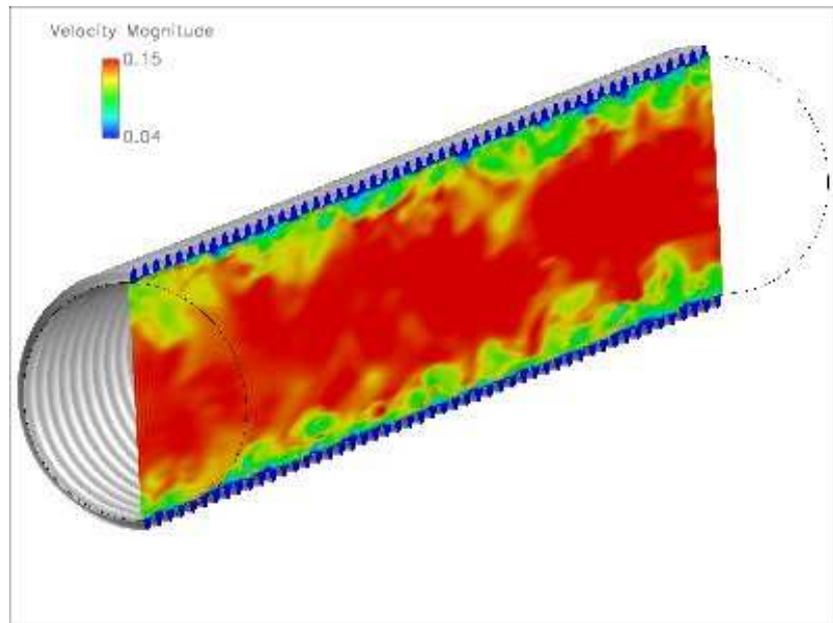


Abb. 33: Turbulent flow in a pipe

Die einzigen Gleichungen, die für (V, P) zu lösen sind, sind die Impulserhaltung für $i = 1, 2$ mit den Matching-Randbedingungen für V_1, V_2 , da

$$P(t, y_1, y_2, y_3) = P(t, y_1, y_2, \infty) = p(t, y_1, y_2, 0)$$

und

$$V_3(t, y_1, y_2, y_3) = - \int_0^{y_3} (\partial_{y_1} V_1 + \partial_{y_2} V_2)(t, y_1, y_2, s) ds,$$

was die Randbedingung für V_3 enthält.

Die einzige Randbedingung, die die Grenzschicht an den übrigen Fluß stellt ist $v_3(t, x_1, x_2, 0) = 0$. Es läßt sich leicht eine Verallgemeinerung durchführen für

- Randmengen Γ , die nicht planar sind.
- den kompressiblen Fall.

Die Konvergenzen der asymptotischen Entwicklung sind natürlich restriktiv, sie lassen die Strömung am "Staupunkt" [[Wikipedia: Staupunkt](#)] (*en*: stagnation point) nicht zu.

16 Selbstgravitation

Jedes physikalische Objekt verursacht eine Gravitation, die wir auch ‘‘Selbstgravitation’’ nennen, wenn wir die Auswirkung auf dieses Objekt selbst betrachten. Wir spüren und sehen diese Gravitation im täglichen Leben auf der Erde als Schwerkraft, und zwar hauptsächlich die von der Erde erzeugte.

Nehmen wir nun für einen Moment an, dass die Gravitationsgleichung zusammen mit der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie im ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ erfüllt ist, d.h. dass die Größen in der gesamten Raumzeit durch, sagen wir, glatte Funktionen repräsentiert seien. Dann lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 -\Delta\phi &= \varrho, & \phi(t, x) &\rightarrow 0 \text{ falls } |x| \rightarrow \infty, \\
 \partial_t\varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0 & (\varrho \text{ Gesamtmasse}), \\
 \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f} & (\Pi \text{ Drucktensor}), \\
 \mathbf{f} &= \mathbf{g}\varrho\nabla\phi + \mathbf{f}_0 & (\mathbf{f} \text{ klassische Kraft}), \\
 \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= v \bullet \mathbf{f}, \\
 e &= \varepsilon + \frac{\varrho}{2}|v|^2 & (\varepsilon \text{ innere Energie}),
 \end{aligned}
 \tag{IV16.1}$$

wobei die erste Gleichung die Gravitationsgleichung ist und ϕ das Gravitationspotential. Da $\mathbf{g}\varrho\nabla\phi$ ein objektiver Vektor ist, transformiert sich die Restkraft \mathbf{f}_0 wie eine klassische Kraft (siehe Abschnitt II.3). Unter der Voraussetzung, dass die Schwerkraft die einzig relevante Kraft ist, verschwindet \mathbf{f}_0 für einen Beobachter, wenn er annimmt, dass er ein Inertialsystem realisiert. In der Realität sind die beteiligten Funktionen, insbesondere ϱ , nicht so regulär, dass die Gleichungen in der klassischen Version wie hier hingeschrieben werden können. Wir benötigen deshalb die distributionelle Schreibweise.

Wir betrachten die von der Massendichte ϱ erzeugte Schwerkraft, d.h. die Gleichung für das Gravitationspotential ϕ , welche wir schon in (I2.10) kennengelernt hatten. Diese lautet

$$\operatorname{div}(-\nabla[\phi]) = [\varrho] \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \tag{IV16.2}$$

wobei ϱ die Gesamtmasse in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ darstellt (physikalisch ist $n = 3$), hier als Funktion $\varrho \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Das Newton’sche Gravitationspotential ϕ ist ein objektiver Skalar und $x \mapsto \phi(t, x)$ liegt im Raum in $C^1(\mathbb{R}^n)$, wenn, was wir annehmen, ϱ nur Sprünge auf C^1 -Flächen hat. Es gilt dann $\nabla[\phi] = [\nabla\phi]$ in (IV16.2). In der Impulserhaltung tritt als Kraftterm

$$\boxed{\mathbf{g}\varrho\nabla\phi \quad \textit{Newton's Kraftdichte}} \tag{IV16.3}$$

auf, der ohne obige Regularität nicht ohne weiteres definiert ist. In unserem Fall sind aber ρ und $\nabla\phi$ Funktionen, daher ist das Produkt von beschränkten L^1 -Funktionen als Distribution definiert. Die Gleichung (IV16.2) ist so normiert, dass $\phi_{Literatur} = -4\pi G\phi$ (für $n = 3$) das in der physikalischen Literatur gebräuchliche Potential ist, wobei

$$G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$$

die Gravitationskonstante ist, siehe (I3.13). Und $\mathbf{g} = 4\pi G$ (für $n = 3$).

Nun betrachten wir einen Planeten oder einen Stern (oder mehrere Planeten oder Sterne) in $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n; (t, x) \in \Omega\}$, also $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Das Außengebiet $\Omega' := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \bar{\Omega}$ wird als ein sehr dünnes Gas betrachtet, wobei kein Massenaustausch zwischen Gas und Planet stattfindet. Wir modellieren die Situation mit den Größen

- ϕ global definiertes Potential,
- $\rho, v, \Pi = p\text{Id} - S$ Größen des Sterns Ω ,
- $\rho' = 0$ (v' undefined), $\Pi' = p'\text{Id}$ Größen des äußeren Gases in Ω' .

Damit gelten als Limes folgende instationären distributionellen Gleichungen, wobei hier die Gravitationsgleichung, als auch die Massen-, Impuls- und die Energieerhaltung in ihrer ursprünglichen distributionellen Version geschrieben sind:

Selbstgravitation in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \text{div}[-\nabla\phi] &= [\rho\mathcal{X}_\Omega], \\ \partial_t[\rho\mathcal{X}_\Omega] + \text{div}[\rho\mathcal{X}_\Omega v] &= 0, \\ \partial_t[\rho\mathcal{X}_\Omega v] + \text{div}[\rho\mathcal{X}_\Omega v v^T + \mathcal{X}_\Omega(p\text{Id} - S) + \mathcal{X}_{\Omega'} p'\text{Id}] &= [\mathbf{f}], \\ \partial_t[e^{tot}] + \text{div}[e^{tot} v + \Pi^T \mathcal{X}_\Omega v + \mathcal{X}_\Omega q + \mathcal{X}_{\Omega'} \tilde{q}] &= [v \bullet \mathbf{f}], \\ e^{tot} &:= e\mathcal{X}_\Omega + e'\mathcal{X}_{\Omega'} \end{aligned}$$

ϕ gravitational potential, $\phi(t, x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$,
 $\mathbf{f} = \mathbf{g}\rho\mathcal{X}_\Omega\nabla\phi + \mathbf{f}_0$ (\mathbf{f}_0 contains fictitious forces),
 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ region of planet or star,
 $e = \varepsilon + \frac{\rho}{2}|v|^2$, $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\rho, \theta)$,
 (ρ, v, θ) quantities of planet or star.

(IV16.4)

Der Abschnitt ist wie folgt strukturiert. Wir betrachten zunächst Sterne aus einer gewissen Entfernung, aus der Sterne nur als Punkte wahrgenommen

werden. Dann betrachten wir den inkompressiblen Fall und zeigen ein Resultat von Newton, das besagt, dass sich inkompressible Sterne unter einer Rotation abflachen. Dann zeigen wir Resultate von Caratheodory über die Selbstgravitation von gasförmigen Planeten oder Sternen, allerdings unter der Annahme, dass sie nicht rotieren und radialsymmetrische Kugeln sind. Es wird dann noch eine Interpretation dieser Situation für ideale Gase gegeben, die besagt, dass die Energie im Stern gehalten wird mit einer nichtkonstanten Temperatur.

Stern als Punkt

Wir betrachten einen Stern aus einiger Entfernung, bei der er uns schon wie ein Punkt erscheint, d.h. es gibt eine Trajektorie $t \mapsto \xi(t)$ so dass sich der Stern zur Zeit t in

$$\Omega_t^\delta \subset B_\delta(\xi(t))$$

befindet, wobei δ eine kleine Zahl sei. Der Stern habe die Massendichte ϱ^δ in Ω^δ und die Gesamtmasse ist dann

$$m^\delta(t) := \int_{\Omega_t^\delta} \varrho^\delta(t, x) dx.$$

16.1 Stern als Punkt. If $m^\delta \rightarrow m$ uniformly (the standard case is $m^\delta := m$) as $\delta \rightarrow 0$ it follows that

$$[\varrho^\delta \mu_{\Omega^\delta}] \longrightarrow m \mu_\xi \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Hence the gravity potential ϕ^δ induced by the star, that is

$$\operatorname{div}(-\nabla[\phi^\delta]) = [\varrho^\delta \mu_{\Omega^\delta}],$$

converges in L^1 to the limit potential ϕ satisfying

$$\operatorname{div}(-\nabla[\phi]) = m \mu_\xi.$$

Note that ϕ is a fundamental solution of $-\Delta$, the negative Laplace operator. And if the limit $m^\delta \rightarrow m$ exists, this implies that $\sup \varrho^\delta \rightarrow \infty$.

Beweis. For $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ we have as $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, [\varrho^\delta \mu_{\Omega^\delta}] \rangle &= \int_{\Omega^\delta} (\varrho^\delta \zeta)(t, x) d(t, x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t^\delta} \zeta(t, \xi(t)) \varrho^\delta(t, x) dL^4(t, x) + \mathcal{O}(\delta) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) \int_{\Omega_t^\delta} \varrho^\delta(t, x) dL^3(x) dL^1(t) + \mathcal{O}(\delta) \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) m(t) dL^1(t) = \langle \zeta, m \mu_\xi \rangle, \end{aligned}$$

hence $[\varrho^\delta \mu_{\Omega^\delta}] \rightarrow m \mu_\xi$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. In the same way it follows that for all times t for all $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$\left\langle \eta, \varrho^\delta(t, \bullet) \mathcal{X}_{\Omega_t^\delta} L^n \right\rangle \longrightarrow \left\langle \eta, m(t) \delta_{\xi(t)} \right\rangle .$$

Since

$$\phi(t, x) = \frac{m(t)}{\sigma_n |x - \xi(t)|}, \quad \phi^\delta(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varrho^\delta(t, y) \mathcal{X}_{\Omega_t^\delta}(y)}{\sigma_n |x - y|} dy,$$

this implies

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \frac{m(t)}{\sigma_n |x - \xi(t)|} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{m(t)}{\sigma_n |x - y|} d\delta_{\xi(t)}(y) \\ &\longleftarrow \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varrho^\delta(t, y) \mathcal{X}_{\Omega_t^\delta}(y)}{\sigma_n |x - y|} dL^n(y) = \phi^\delta(t, x). \end{aligned}$$

Thus we have shown that $\phi^\delta \rightarrow \phi$ pointwise. From this it follows immediately that $\phi^\delta \rightarrow \phi$ in $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ since ϕ^δ is estimated uniformly by $C\phi$ where $C = \text{const}$. \square

What about the mass-momentum equations in (IV16.4)? Let us neglect for a moment the superscript δ . If Ω_t is connected for all t this yields $p' = \text{const}$ in Ω' . Hence we subtract the constant $p' \text{Id}$ in the momentum flux, and we assume $S = 0$. Then we obtain for the mass and momentum equation in (IV16.4), including the gravity,

$$\begin{aligned} \text{div}[-\nabla\phi] &= [\varrho \mathcal{X}_\Omega], \\ \partial_t[\varrho \mathcal{X}_\Omega] + \text{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega v] &= 0, \\ \partial_t[\varrho \mathcal{X}_\Omega v] + \text{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega v v^T + \mathcal{X}_\Omega(p - p') \text{Id}] &= [\mathfrak{g} \varrho \mathcal{X}_\Omega \nabla\phi + \mathbf{f}_0], \end{aligned} \tag{IV16.5}$$

that is, only the self-gravitation acts on the object Ω in consideration, and everything else, gravity from other stellar objects included, is contained in the smooth force \mathbf{f}_0 , which we assume is of the form $\varrho \mathcal{X}_\Omega \mathfrak{g}_0$. We impose now for the velocity the identity $v = \bar{v} + u$ with a “global in time” velocity \bar{v} , which in detail reads

$$\begin{aligned} (m\bar{v})(t) &:= \int_{\Omega_t} (\varrho v)(t, x) dx \quad \text{where} \quad m(t) := \int_{\Omega_t} \varrho(t, x) dx, \\ u(t, x) &:= v(t, x) - \bar{v}(t) \end{aligned} \tag{IV16.6}$$

(compare the definition of mean velocity in III.3.1(1)).

16.2 Lemma. It follows that for all t

$$\int_{\Omega_t} (\varrho u)(t, x) dx = 0.$$

And on the boundary there is the condition $(v - v_{\partial\Omega}) \bullet \nu_\Omega = 0$ (compare with (IV16.9)) where $v = \bar{v} + u$.

Beweis. It follows

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} (\varrho u)(t, x) \, dx &= \int_{\Omega_t} ((\varrho v)(t, x) - \varrho(t, x) \bar{v}(t)) \, dx \\ &= \int_{\Omega_t} \varrho v(t, x) \, dx - m(t) \bar{v}(t) = 0 \end{aligned}$$

by the definitions. On the boundary there is a condition only on v , not on \bar{v} and u , since the mass equation in (IV16.5) says for all $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ (this is as in the proof of 3.8)

$$\begin{aligned} 0 &= - \langle \zeta, \partial_t[\varrho \mathcal{X}_\Omega] + \operatorname{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega v] \rangle = \int_{\Omega} (\partial_t \zeta \cdot \varrho + \nabla \zeta \bullet (\varrho v)) \, d(t, x) \\ &= \int_{\Omega} \nabla_{(t,x)} \zeta \bullet (\varrho, \varrho v) \, dL^{1+n}(t, x) \quad (\nabla_{(t,x)} := (\partial_t, \nabla_x)) \\ &= \int_{\partial\Omega} \zeta n_\Omega \bullet (\varrho, \varrho v) \, dH^n - \int_{\Omega} \zeta \operatorname{div}_{(t,x)}(\varrho, \varrho v) \, dL^{1+n}, \end{aligned}$$

where n_Ω is the outer unit normal to $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (see the Definition in 3.8). Therefore

$$\begin{aligned} n_\Omega \bullet (1, v) &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) &= 0 \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

The first equation is equivalent to $(v - v_{\partial\Omega}) \bullet \nu_\Omega = 0$, see (IV3.10). \square

With this definition the equations in (IV16.5) read, it is $\mathbf{f}_0 = \varrho \mathcal{X}_\Omega g_0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[-\nabla \phi] &= [\varrho \mathcal{X}_\Omega], \\ \partial_t[\varrho \mathcal{X}_\Omega] + \operatorname{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega \bar{v}] + \boxed{\operatorname{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega u]} &= 0, \\ \partial_t[\varrho \mathcal{X}_\Omega \bar{v}] + \operatorname{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega \bar{v} \bar{v}^T] + \boxed{\partial_t[\varrho \mathcal{X}_\Omega u] + \operatorname{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega (\bar{v} u^T + u \bar{v}^T)]} \\ + \boxed{\operatorname{div}[\varrho \mathcal{X}_\Omega u u^T + \mathcal{X}_\Omega (p - p') \operatorname{Id}] - [\mathbf{g} \varrho \mathcal{X}_\Omega \nabla \phi]} - \varrho \mathcal{X}_\Omega g_0 &= 0. \end{aligned}$$

(On the boundary there is only the equation $(\bar{v} + u - v_{\partial\Omega}) \bullet \nu_\Omega = 0$. Therefore this is only to indicate what we are going to do.) If now we apply this to the above sequence we obtain the following result.

16.3 Theorem. We now consider the sequence $[\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta}]$, we use again the superscript δ , and we make the assumptions of 16.1. In addition we assume that $\mathbf{f}_0^\delta := \varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} g_0$ and

$$m^\delta, |\bar{v}^\delta|, |u^\delta| \leq \text{const}, \quad m^\delta \rightarrow m, \quad \bar{v}^\delta \rightarrow \bar{v}.^8$$

If in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\operatorname{div}[\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} u^\delta u^{\delta T} + \mathcal{X}_{\Omega^\delta} (p^\delta - p') \operatorname{Id}] - [\mathbf{g} \varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} \nabla \phi^\delta]) = m \mathbf{g} \boldsymbol{\mu}_\xi,$$

⁸we mean the pointwise convergence with respect to t .

then as limit we obtain a mass point $m\boldsymbol{\mu}_\xi$ satisfying the properties of I.3.1, that is,

$$\begin{aligned}\bar{v}(t, \xi(t)) &= \dot{\xi}(t), \quad \dot{m} = 0, \\ m\ddot{\xi} &= \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = m(\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}).\end{aligned}\tag{IV16.7}$$

Special case: Usually $\mathbf{g} = 0$. This is so in the case I.4.5 for $u = 0$. And we will show this also in 16.5 as a result of Newton. This holds if $\mathbf{g}_0 = 0$.



Abb. 34: “2014 MU69, aufgenommen am 1. Januar 2019 von New Horizons, 7 Min. vor der engsten Annäherung.” Von NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory [Wikipedia: (486958) 2014 MU69]

Beweis. As shown in 16.1 the δ -gravitational formula $\operatorname{div}[-\nabla\phi^\delta] = [\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta}]$ converges to the limit equation

$$\operatorname{div}[-\nabla\phi] = m\boldsymbol{\mu}_\xi.$$

Next we look at the mass conservation $\partial_t[\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta}] + \operatorname{div}[\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} v^\delta] = 0$ in (IV16.5), für $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Omega^\delta} (\partial_t \zeta \cdot \varrho^\delta + \nabla_x \zeta \bullet (\varrho^\delta v^\delta)) \, d(t, x) \quad (v^\delta = \bar{v}^\delta + u^\delta) \\ &= \int_{\Omega^\delta} (\partial_t \zeta + \bar{v}^\delta \bullet \nabla_x \zeta) \varrho^\delta \, d(t, x) + \int_{\Omega^\delta} \nabla_x \zeta \bullet (\varrho^\delta u^\delta) \, d(t, x).\end{aligned}$$

The first term is

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t^\delta} (\partial_t + \bar{v}^\delta(t) \bullet \nabla_x) \zeta(t, x) \varrho^\delta(t, x) \, dx \, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} ((\partial_t + \bar{v}^\delta(t) \bullet \nabla_x) \zeta)(t, \xi(t)) \int_{\Omega_t^\delta} \varrho^\delta(t, x) \, dx \, dt + \mathcal{O}(\delta) \\
&\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} ((\partial_t + \bar{v}(t) \bullet \nabla_x) \zeta)(t, \xi(t)) m(t) \, dt \\
&= \langle \zeta, -\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) - \operatorname{div}_x(m\bar{v}\boldsymbol{\mu}_\xi) \rangle .
\end{aligned}$$

since $\bar{v}^\delta \rightarrow \bar{v}$ pointwise. The second term is

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_t^\delta} \nabla_x \zeta(t, x) \bullet (\varrho^\delta u^\delta)(t, x) \, dx \, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\nabla_x \zeta)(t, \xi(t)) \bullet \left(\int_{\Omega_t^\delta} (\varrho^\delta u^\delta)(t, x) \, dx \right) dt + \mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\delta)
\end{aligned}$$

by 16.2, which tends to 0. Thus the mass equation in the limit is

$$\partial_t(m\boldsymbol{\mu}_\xi) + \operatorname{div}_x(m\bar{v}\boldsymbol{\mu}_\xi) = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Next we have to consider the momentum equation. From (IV16.5) we get

$$\begin{aligned}
\partial_t[\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta}(\bar{v}^\delta + u^\delta)] + \operatorname{div}_x[\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta}(\bar{v}^\delta + u^\delta)(\bar{v}^\delta + u^\delta)^\top + \mathcal{X}_{\Omega^\delta}(p^\delta - p')\operatorname{Id}] \\
= [\mathfrak{g}\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} \nabla \phi^\delta + \varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} g_0].
\end{aligned}$$

The velocity terms read with test functions $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^\delta} \left(\partial_t \zeta \bullet (\varrho^\delta(\bar{v}^\delta + u^\delta)) + D_x \zeta \bullet (\varrho^\delta(\bar{v}^\delta + u^\delta)(\bar{v}^\delta + u^\delta)^\top) \right) d(t, x) \\
&= \int_{\Omega^\delta} \partial_t \zeta \bullet (\varrho^\delta \bar{v}^\delta) d(t, x) + \int_{\Omega^\delta} \partial_t \zeta \bullet (\varrho^\delta u^\delta) d(t, x) \\
&+ \int_{\Omega^\delta} D_x \zeta \bullet (\varrho^\delta \bar{v}^\delta \bar{v}^{\delta\top}) d(t, x) + \int_{\Omega^\delta} D_x \zeta \bullet (\bar{v}^\delta (\varrho^\delta u^\delta)^\top + (\varrho^\delta u^\delta) \bar{v}^{\delta\top}) d(t, x) \\
&\quad + \int_{\Omega^\delta} D_x \zeta \bullet (\varrho^\delta u^\delta u^{\delta\top}) d(t, x).
\end{aligned}$$

Except the last term the terms on the right side have a limit

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left((\partial_t \zeta)(t, \xi(t)) \bullet \bar{v}^\delta(t) + (D_x \zeta)(t, \xi(t)) \bullet (\bar{v}^\delta(t) \bar{v}^{\delta\top}(t)) \right) \left(\int_{\Omega_t^\delta} \varrho^\delta \, dx \right) dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \left((\partial_t \zeta)(t, \xi(t)) + 2((D_x \zeta)(t, \xi(t)) \bar{v}^\delta(t))^\mathbb{S} \right) \bullet \left(\int_{\Omega_t^\delta} (\varrho^\delta u^\delta)(t, x) \, dx \right) dt \\
&\quad + \mathcal{O}(\delta) \\
&\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left((\partial_t \zeta)(t, \xi(t)) \bullet \bar{v}(t) + (D_x \zeta)(t, \xi(t)) \bullet (\bar{v}(t) \bar{v}(t)^\top) \right) m(t) \, dt \\
&= \langle \zeta, -\partial_t(m\bar{v}\boldsymbol{\mu}_\xi) - \operatorname{div}_x(m\bar{v}\bar{v}^\top \boldsymbol{\mu}_\xi) \rangle .
\end{aligned}$$

Therefore if we define

$$W^\delta := \operatorname{div}[\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} u^\delta u^{\delta\top} + \mathcal{X}_{\Omega^\delta}(p^\delta - p')\operatorname{Id}] - [\mathfrak{g}\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} \nabla \phi^\delta]$$

we have shown that the limit equation is

$$\partial_t(m\bar{v}\boldsymbol{\mu}_\xi) + \operatorname{div}_x(m\bar{v}\bar{v}^\top \boldsymbol{\mu}_\xi) + \lim_{\delta \rightarrow 0} W^\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\varrho^\delta \mathcal{X}_{\Omega^\delta} \mathfrak{g}_0] = m\mathfrak{g}_0 \boldsymbol{\mu}_\xi.$$

Finally, if we apply theorem III.6.4 or I.4.5 with $\mathbf{f} = m(\mathfrak{g}_0 - \mathfrak{g})$, we get the assertion. \square

The convergence of a star to a point is not due to an observer transformation, it is an approximation on long distance. If one introduces the variable $y = \frac{x}{\delta}$ in order to have the star in a handable unit ball, the transformation $(t, x) = \tau(t, y) = (t, \delta y)$ is like the transformation from reference coordinates.

Stationärer Fall

Let us assume that the outer forces \mathbf{f}_0 are zero, that is, the observer assumes to have an inertial frame. Therefore the only force to consider is the gravitational force. In the very thin gas, that is in Ω' , we assume $\varrho' = 0$, so the surrounding of our stars do not contribute to the gravity. In the gas the following equations hold

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla \phi &= 0 \quad \text{in } \Omega', \\ \nabla p' &= 0, \quad \partial_t e' + \operatorname{div} q' = 0 \quad \text{in } \Omega'. \end{aligned}$$

Hence, if Ω'_t is connected for all t this yields $p' = \operatorname{const}$ in Ω' .

We now assume that the spacetime domain Ω represents a single object and that we have waited long enough, so eventually this object will approach a periodic movement (we mean for example an asteroid turning around itself like “Ultimate Thule” in Abb. 34). If the object is a planet or star, after such a long time the compression due to self-gravitation will make that it is a stationary solution of the equations (it means that $v = v(x)$ and that $\Omega = \mathbb{R} \times D$). With this assumption we have to consider the stationary mass and momentum equations alone, might be for an incompressible or compressible object. Therefore

$$\Omega := \mathbb{R} \times D, \quad \Omega' := \mathbb{R} \times D', \quad D' = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

where D is a fixed bounded domain in \mathbb{R}^3 . In this case one has to solve the following special statements:

Stationäre Selbstgravitation:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[-\nabla\phi] &= [\varrho\mathcal{X}_D], \\ \operatorname{div}[\varrho v\mathcal{X}_D] &= 0, \\ \operatorname{div}[\mathcal{X}_D(\varrho v v^T + p\operatorname{Id} - S) + \mathcal{X}_{D'}p'\operatorname{Id}] &= \mathfrak{g}[\varrho\mathcal{X}_D\nabla\phi] \end{aligned}$$

ϕ Gravitationspotential, $\phi(t, x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$,
 $D \subset \mathbb{R}^3$ der Körper, der die Schwerkraft verursacht,
 ϱ die Massendichte, v die Geschwindigkeit,
 p der Druck:

$$\begin{cases} p = \widehat{p}(\varrho) \text{ im kompressiblen Fall.} \\ p \text{ Variable, } \varrho = \text{const, im inkompressiblen Fall} \end{cases}$$

(IV16.8)

Beachte, dass die Massen- und die Impulserhaltung hier in der ursprünglichen Version geschrieben sind, d.h. sie sind im distributionellen Sinne zu verstehen. Daraus ergibt sich das Folgende.

16.4 Theorem. Assume that the complement D' is connected. Then the equations in (IV16.8) are equivalent to $p' = \text{const}$ in D' , the boundary conditions

$$v \bullet \nu_D = 0 \quad \text{and} \quad (p - p')\nu_D = S\nu_D \quad \text{on } \partial D \quad (\text{IV16.9})$$

and the differential equations

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[-\nabla\phi] &= [\varrho\mathcal{X}_D] \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \\ \operatorname{div}(\varrho v) &= 0 \text{ in } D, \\ \operatorname{div}(\varrho v v^T + p\operatorname{Id} - S) &= \mathfrak{g}\varrho\nabla\phi \text{ in } D. \end{aligned} \quad (\text{IV16.10})$$

Remark: If $S = 0$ the last equation can be written as

$$\varrho v \bullet \nabla v + \nabla p = \mathfrak{g}\varrho\nabla\phi \text{ in } D. \quad (\text{IV16.11})$$

Beweis. Die Impulserhaltung in D' hat nur $\nabla p' = \operatorname{div}(p'\operatorname{Id}) = 0$ als einzigen Term. Da D' als zusammenhängend vorausgesetzt wird, folgt $p' = \text{const}$ in D' . Die Massenerhaltung enthält die Bedingung $v \bullet \nu_D = 0$ auf ∂D und besagt, dass $\operatorname{div}(\varrho v) = 0$ in D . Schließlich ist die Impulserhaltung in D

$$\operatorname{div}(\varrho v v^T + p\operatorname{Id} - S) = \mathfrak{g}\varrho\nabla\phi$$

und die Randbedingung auf ∂D ist

$$\varrho v \bullet \nu v + p\nu - S\nu = p'\nu$$

für eine Normale ν an ∂D , wobei $v \bullet \nu = 0$ bekannt ist. The remark follows as usual since $\operatorname{div}(\varrho v v^T) = v \bullet \operatorname{div}(\varrho v) + \varrho v \bullet \nabla v$. \square

Newton's Spheroid

Here we study a rotating planet under self-gravitation. In general the planet has to satisfy (IV16.4). But after millions of years it came possibly to a stationary solution. If we assume this, then the planet has the stationary form $\Omega = \mathbb{R} \times D$ and its velocity v is time independent. We further assume that the planet is incompressible with constant density $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$. Hence we have to solve (IV16.8) and the speed v is that of a rotation.

16.5 Isaac Newton: Rotierender Planet. Wir betrachten einen rotierenden inkompressiblen Planeten, wobei eine konstante Massendichte $\varrho = \varrho_0$ und ein verschwindender Stresstensor $S = 0$ angenommen wird. Wir behandeln die stationären Gleichungen in (IV16.8), wobei die Rotationsachse durch die x_3 -Achse

$$\{x \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0, x_2 = 0\} \quad \text{mit} \quad v(x) = \omega(-x_2, x_1, 0)$$

gegeben ist, also ist ω die konstante Winkelgeschwindigkeit. Dann gilt:

(1) Ist D konvex, so ist $p' = \text{const}$ und die Wahl von v impliziert, dass die Gleichungen (IV16.8) äquivalent sind zur Rotationssymmetrie von D und

$$\begin{aligned} p(x) - p' &= 0 \text{ für } x \in \partial D, \\ p(x) - p' &= \frac{\varrho_0 \omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \mathfrak{g} \varrho_0 \phi(x) + c_0 \text{ für } x \in \bar{D} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c_0 = \text{const}$, sowie

$$\phi(x) = \frac{\varrho_0}{4\pi} \int_D \frac{dy}{|x-y|} \text{ für } x \in \mathbb{R}^3.$$

(2) Falls D ein **abgeplatteter Spheroid** (en: **oblate spheroid**), das heißt, es gibt $0 < c < a$, so dass die Oberfläche ∂D aus den Punkten $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a} + \frac{x_3^2}{c} = 1, \quad 0 < c < a$$

besteht, dann ist D wie in (IV16.8) ein sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um die x_3 -Achse drehender Planet, wenn

$$\omega^2 a = G \varrho_0 B\left(\frac{c}{a}\right), \quad B(z) = \int_{S^2} \frac{2\xi_3^2 - z(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\xi_3^2 + z(\xi_1^2 + \xi_2^2)} d\mathbb{H}^2(\xi).$$

Der Beweis von 16.5(2) zeigt, dass das Spheroid eine Lösung für das Interfaceproblem auf ∂D ist, und in D wird von der Tatsache, dass der Planet als inkompressibel angenommen wurde, Gebrauch gemacht. Für den Schluss, dass das Interfaceproblem notwendigerweise einen Spheroid als Lösung hat, siehe ????? ggf. EXERCISES.

Referenzen: Dass ein abgeplatteter Spheroid D (*en.*: oblate spheroid) Lösung des Problems ist, wurde von Newton in seinen “Principia Mathematica” im Jahr 1687 bewiesen, und zwar im “Book III Proposition XIX”, siehe die aus dem lateinischen übersetzte Versionen [119] und [120]. Siehe auch Abb. 35 und die historischen Betrachtungen in [newtonreception6.pdf]. Darüberhinaus verweisen auf den Artikel von Solonnikov [64], in dem die Stabilität eines inkompressiblen rotierenden Körpers bewiesen wird.

In establishing the law of universal gravitation, 1687, sir *Isaac Newton* correctly concluded that the mean figure of the earth is that of an oblate spheroid of revolution, with oblateness considerably less than 1 : 230, (Principia, Lib. III, Prop. 19), which corresponds to the hypothesis of homogeneity.

Abb. 35: Aus Astronomische Nachrichten Band 213 (1921)

Beweis (1). Die Gleichungen (IV16.8) in D' besteht nur aus

$$\operatorname{div}(p'\operatorname{Id}) = 0 \text{ in } D',$$

woraus $p' = \text{const}$ lokal folgt. Das gilt auch global auf D' , da D als konvex vorausgesetzt ist und daher D' zusammenhängend ist. Indem wir die Konstante p' im ganzen Raum definieren und dann den Term $p'\operatorname{Id}$ subtrahieren sehen wir, dass dann die Gleichungen (IV16.8) äquivalent sind zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[-\nabla\phi] &= [\varrho_0\mathcal{X}_D], \\ \operatorname{div}[v\mathcal{X}_D] &= 0, \\ \operatorname{div}[\mathcal{X}_D(\varrho_0vv^T + (p - p')\operatorname{Id})] &= \mathfrak{g}[\varrho_0\mathcal{X}_D\nabla\phi] \end{aligned} \tag{IV16.12}$$

Die zweite Gleichung von (IV16.12) ist äquivalent zu

$$\operatorname{div}v = 0 \text{ in } D, \quad v \bullet \nu_D = 0 \text{ auf } \partial D.$$

Die Differentialgleichung ist durch das gegebene v erfüllt. Die Randbedingung ergibt die Rotationssymmetrie von D aufgrund der gewählten Geschwindigkeit v . Die dritte Gleichung von (IV16.12) ist äquivalent zu einer Randbedingung und zu Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} p - p' &= 0 \text{ auf } \partial D, \\ \operatorname{div}(\varrho_0vv^T + (p - p')\operatorname{Id}) &= \mathfrak{g}\varrho_0\nabla\phi \text{ in } D, \end{aligned}$$

wobei der erste Term der Randbedingung wegfällt wegen $v \bullet \nu_D = 0$. Da nun (wir hatten dies schon in I.4.5)

$$\mathfrak{g} \varrho_0 \nabla \phi = \nabla(\mathfrak{g} \varrho_0 \phi),$$

lautet die Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(\varrho_0 v v^T + (p - p' - \mathfrak{g} \varrho_0 \phi) \operatorname{Id}) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} \nabla(p - p' - \mathfrak{g} \varrho_0 \phi) &= -\operatorname{div}(\varrho_0 v v^T) = -\varrho_0 v \bullet \nabla v \\ &= -\varrho_0 \omega^2 \left(-x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \varrho_0 \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \nabla \left(\varrho_0 \omega^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) \end{aligned}$$

(wir hatten dies schon in I.3.5), also (da D konvex und damit einfach zusammenhängend ist) für $x \in D$

$$p(x) - p' - \mathfrak{g} \varrho_0 \phi(x) = \frac{\varrho_0 \omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) + c_0, \quad c_0 = \text{const},$$

was zu beweisen war. Die Lösung der ersten Gleichung von (IV16.12), d.h. der Gravitationsgleichung, ist gegeben durch

$$\phi(x) = \frac{\varrho_0}{4\pi} \int_D \frac{dy}{|x - y|}. \quad (\text{IV16.13})$$

(See [64, equation (3) and following].) □

Beweis (2). Da p auf \bar{D} stetig ist, haben wir nach dem Resultat von (1) den Planeten D so zu bestimmen, dass

$$\frac{\varrho_0 \omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \mathfrak{g} \varrho_0 \phi(x) + c_0 = p(x) - p' = 0 \text{ für } x \in \partial D,$$

oder, wenn $c_0 + \mathfrak{g} \varrho_0 \phi_0 = 0$,

$$\phi(x) = \phi_0 - \frac{\omega^2}{2\mathfrak{g}} (x_1^2 + x_2^2) \text{ für } x \in \partial D \quad (\text{IV16.14})$$

(es ist ϕ_0 der Wert des Potentials für Punkte $x \in \partial D$, die auf der Achse liegen). Wir haben also D so zu wählen, dass die quadratische Darstellung von ϕ auf ∂D erfüllt ist, wobei ϕ in (IV16.13) gegeben ist.

Wir führen Polarkoordinaten um einen Punkt x ein, wobei jetzt zunächst der Einfachheit halber $x \in D$ liegt. Wir haben also

$$y = x + r\xi \text{ mit } r > 0 \text{ und } \xi \in \mathbb{S}^2.$$

Wenn wir nun annehmen, dass D konvex ist, so gibt es zu $x \in D$ einen Radius $r_x(\xi) > 0$ mit

$$D = \{x + r\xi; \xi \in \mathbb{S}^2, 0 \leq r < r_x(\xi)\}$$

und es ist wegen $|x - y| = r$ und $dy = r^2 dr dH^2(\xi)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{\rho_0}{4\pi} \int_D \frac{dy}{|x - y|} = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \int_0^{r_x(\xi)} r dr dH^2(\xi) \\ &= \frac{\rho_0}{8\pi} \int_{\mathbb{S}^2} r_x(\xi)^2 dH^2(\xi). \end{aligned}$$

Es sei nun D ein achsenparalleles Ellipsoid

$$D = \{y \in \mathbb{R}^3; \sum_{i=1}^3 a_i |y_i|^2 < 1\}$$

mit positiven $a_i > 0$. Setzen wir $y_i = x_i + r\xi_i$ mit $r = r_x(\xi)$, also $y \in \partial D$, so ist

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^3 a_i |y_i|^2 = \sum_{i=1}^3 a_i |x_i + r\xi_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i |x_i|^2 + \sum_{i=1}^3 a_i (2r\xi_i x_i + r^2 |\xi_i|^2), \end{aligned}$$

also

$$r_x(\xi)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^3 a_i |\xi_i|^2}_{=: a_0(\xi)} + 2r_x(\xi) \sum_{i=1}^3 a_i \xi_i x_i = 1 - \sum_{i=1}^3 a_i |x_i|^2 > 0.$$

Wir erhalten

$$r_x(\xi) = -\frac{\sum_{i=1}^3 a_i \xi_i x_i}{a_0(\xi)} + \sqrt{\frac{1 - \sum_{i=1}^3 a_i |x_i|^2}{a_0(\xi)} + \left(\frac{\sum_{i=1}^3 a_i \xi_i x_i}{a_0(\xi)}\right)^2}.$$

Wenn wir jetzt x gegen einen Randpunkt konvergieren lassen, also im Limes $x \in \partial D$ und damit $\sum_{i=1}^3 a_i |x_i|^2 = 1$ ist, so folgt

$$r_x(\xi) = \begin{cases} -\frac{2 \sum_{i=1}^3 a_i \xi_i x_i}{a_0(\xi)} & \text{für } \sum_{i=1}^3 a_i \xi_i x_i < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir nun $r_x(\xi)$ in obiges Integral ein, so erhalten wir die gewünschte quadratische Darstellung

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{\varrho_0}{8\pi} \int_{\mathbb{S}^2} r_x(\xi)^2 \, d\mathbb{H}^2(\xi) \\ &= \frac{\varrho_0}{2\pi} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \int_{\{\xi \in \mathbb{S}^2; \sum_i a_i \xi_i x_i < 0\}} \frac{a_i a_j \xi_i \xi_j}{a_0(\xi)^2} \, d\mathbb{H}^2(\xi) \\ &= \frac{\varrho_0}{4\pi} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \int_{\mathbb{S}^2} \frac{a_i a_j \xi_i \xi_j}{a_0(\xi)^2} \, d\mathbb{H}^2(\xi)\end{aligned}$$

(wir spalten den Integrationsbereich in zwei Hälften $\{\xi; \sum_i a_i \xi_i x_i < 0\}$ und $\{\xi; \sum_i a_i \xi_i x_i > 0\}$ auf und diese bilden wir mit Hilfe der Abbildung $\xi \rightsquigarrow -\xi$ aufeinander ab, also bleibt der Integrand wegen $(-\xi_i)(-\xi_j) = \xi_i \xi_j$ derselbe). Nun gilt, da $a_0(\xi)$ nur von den $|\xi_i|^2$, $i = 1, 2, 3$, abhängt,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{a_i a_j \xi_i \xi_j}{a_0(\xi)^2} \, d\mathbb{H}^2(\xi) = \delta_{ij} a_i \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} \frac{a_i \xi_i^2}{a_0(\xi)^2} \, d\mathbb{H}^2(\xi)}_{=: b_i > 0}$$

(wir spalten den Integrationsbereich für $i \neq j$ in zwei Hälften auf und diese bilden wir aufeinander ab, so dass $\xi_i \rightsquigarrow -\xi_i$, also in sein Negatives, abgebildet wird, während ξ_j derselbe Wert bleibt). Also ist

$$\phi(x) = \frac{\varrho_0}{4\pi} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} \frac{a_i a_j \xi_i \xi_j}{a_0(\xi)^2} \, d\mathbb{H}^2(\xi)}_{= \delta_{ij} a_i b_i} = \frac{\varrho_0}{4\pi} \sum_{i=1}^3 b_i a_i x_i^2.$$

Da x ein Randpunkt ist, also

$$a_3 x_3^2 = 1 - \sum_{i=1,2} a_i x_i^2,$$

wird diese Darstellung zu

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{\varrho_0}{4\pi} \left(b_3 \left(1 - \sum_{i=1,2} a_i x_i^2 \right) + \sum_{i=1,2} b_i a_i x_i^2 \right) \\ &= \frac{\varrho_0}{4\pi} \left(b_3 - \sum_{i=1,2} (b_3 - b_i) a_i x_i^2 \right)\end{aligned}$$

für $x \in \partial D$. Wenn nun $a_1 = a_2 < a_3$ ist, so gilt

$$b_1 = b_2 < b_3.$$

(For the proof of $b_1 = b_2$ consider in the integrals the map $(\xi_1, \xi_2) \rightsquigarrow (\xi_2, \xi_1)$. For the proof of $b_1 < b_3$ consider in the integrals the map $(\xi_1, \xi_3) \rightsquigarrow (\xi_3, \xi_1)$ and use the inequalities $\frac{a_3}{a_1} > 1 > \frac{a_1}{a_3}$.) Insgesamt ergibt sich

$$\phi(x) = \frac{\varrho_0 b_3}{4\pi} - \frac{\varrho_0 b}{4\pi} \sum_{i=1,2} x_i^2, \quad b := (b_3 - b_1) a_1 = (b_3 - b_2) a_2,$$

d.h. in Übereinstimmung mit der Randbedingung (IV16.14) falls

$$\phi_0 = \frac{\rho_0 b_3}{4\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\omega^2}{2g} = \frac{\rho_0 b}{4\pi}.$$

Und

$$\begin{aligned} 2ba &= B\left(\frac{c}{a}\right), \quad a_3 = \frac{1}{c} > \frac{1}{a} = a_1 = a_2, \quad z = \frac{c}{a}, \\ B(z) &= 2(b_3 - b_1) = 2(b_3 - b_2) = 2b_3 - (b_1 + b_2) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{2\xi_3^2}{z(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2} - \frac{z(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{z(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2} \right) dH^2(\xi), \end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung wegen $g = 4\pi G$. \square

Die Impulserhaltung in (IV16.8) hat als Kraftterm die Selbstgravitation. Treten zu diesem Anteil der allgemeinen Kraft noch andere Kräfte hinzu, die also nicht unter die Scheinkräfte fallen, so ergibt sich eine andere Gestalt des Planeten, denn die Physik ist anders. Das heißt, die stationäre Lösung des Systems, die wir gerade beschrieben haben,⁹ ist gestört. So etwas ist z.B. beim Mond Io zu beobachten, bei dem die Schwere des Hauptplaneten Jupiter ganz wesentlich ist. Das ist ganz anders, wenn wir eine Beobachtertransformation machen, was im Allgemeinen zu einer Corioliskraft führt. Also, wenn wir mit dem Stern um die x_3 -Achse rotieren, wären in den Gleichungen (IV16.8) die Geschwindigkeit 0 und dafür in der Impulserhaltung auf der rechten Seite ein zusätzlicher Kraftterm vorhanden, d.h. eine Scheinkraft. Die Physik ist dann natürlich dieselbe.

Chandrasekhar's kompressible Sterne

Wir behandeln wieder den stationären Fall (IV16.8), wobei die Trajektorie des Sterns $\Omega = \mathbb{R} \times D$ ist. Wir beschränken uns auf den Fall, dass $v = 0$ ist. Allerdings sei nun ρ wie in (IV16.8) beliebig, aber es sei wieder $S = 0$.

Referenzen: Wir weisen auf das Buch von Chandrasekhar [28] hin, das eine gründliche Studie über die Selbstgravitation von Sternen ist. Insbesondere ist für diesen Abschnitt [28, IV. Polytopic and isothermal gas spheres] relevant, es sei auch auf das ursprüngliche Buch [105] von Robert Emden verwiesen. Auch sei die Übung [21, 7 Gravitation of a rotationally symmetric star] genannt.

Wie zuvor, kann man, da das Außengebiet $D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ zusammenhängend ist, $p' = \text{const}$ schließen, und man kann daher die Konstante p' Id im Impulsfluss subtrahieren, so dass nur ein Term in D erscheint. Die Gleichungen

⁹stationär läßt $v \neq 0$ zu, falls zeitunabhängig

(IV16.8) sind dann

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[-\nabla\phi] &= [\varrho\mathcal{X}_D] \text{ mit } \phi(t, x) \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty, \\ \operatorname{div}[\mathcal{X}_D(p - p')\operatorname{Id}] &= \mathfrak{g}[\varrho\mathcal{X}_D\nabla\phi]. \end{aligned} \quad (\text{IV16.15})$$

Das System (IV16.15) besteht aus zwei Gleichungen, der Gravitationsgleichung und der stationären Impulserhaltung. Die Gravitationsgleichung hat die Lösung

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\varrho(y) dy}{|x - y|}, \quad (\text{IV16.16})$$

und die Impulsgleichung von (IV16.15) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} p &= p' \text{ auf } \partial D, \\ \nabla p &= \mathfrak{g}\varrho\nabla\phi \text{ in } D. \end{aligned} \quad (\text{IV16.17})$$

Dazu sei das Folgende vorausgesetzt.

16.6 Voraussetzungen und Lemma.

(1) Wir machen die konstitutive Annahme $p = \widehat{p}(\varrho)$, wobei $\widehat{p}: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Es gelte $p'_{\varrho} > 0$. Die Bedingung $p' = \text{const}$ auf D' ergibt also ein $\varrho' \in \mathbb{R}$ mit $\varrho' \geq 0$, was die Gleichung $\widehat{p}(\varrho') = p'$ erfüllt.

(2) Aus der Impulserhaltung folgt dann $\phi = \widehat{\phi}(\varrho)$, siehe (IV16.18), und damit auf ∂D die Identität $\phi = \phi' := \widehat{\phi}(\varrho')$. *Achtung:* Das folgt nur wegen $v = 0$ zusammen mit der Voraussetzung, dass neben der Selbstgravitation keine Kräfte oder Scheinkräfte wirken.

Beweis von (2). Aus der Impulsgleichung (IV16.17) folgt in D

$$\nabla\phi = \frac{1}{\mathfrak{g}\varrho} \nabla p(\varrho) = \frac{p'_{\varrho}(\varrho)}{\mathfrak{g}\varrho} \nabla\varrho = \nabla \left(\frac{1}{\mathfrak{g}} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{p'_{\varrho}(s) ds}{s} \right),$$

wobei ϱ_0 irgendeine positive Konstante ist. Da D zusammenhängend ist, folgt daraus mit einer Konstanten c_0

$$\phi = c_0 + \frac{1}{\mathfrak{g}} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{p'_{\varrho}(s) ds}{s} =: \widehat{\phi}(\varrho) \text{ in } D \quad (\text{IV16.18})$$

Also ist $\phi = \widehat{\phi}(\varrho')$ auf ∂D . □

In diesem Fall lässt sich das Gravitationspotential aus der Impulsgleichung (IV16.17) auf D bestimmen. Die Gravitationsgleichung $\operatorname{div}(-\nabla\phi) = \varrho$ im Gebiet D wird zu einer elliptischen Gleichung für die Dichte ϱ , für die das Dirichlet-Problem ggf. gelöst werden kann.

16.7 Elliptisches Problem. Es sei $D = B_R(0)$. Dann ist das isotherme stationäre Schwerkraftproblem ein elliptisches Randwertproblem: Finde eine Lösung ϱ von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\varrho}\nabla(p(\varrho))\right) &= \mathfrak{g}\varrho \text{ in } D, \\ \varrho &= \varrho' \text{ auf } \partial D. \end{aligned} \tag{IV16.19}$$

Eine solche Lösung muss nicht existieren. Falls eine rotationssymmetrische Lösung ϱ existiert, ist ϕ gegeben durch die Gleichung (IV16.18).

Beweis. Nach (IV16.17) impliziert die Impulsgleichung

$$\nabla\phi = \frac{1}{\mathfrak{g}\varrho}\nabla(p(\varrho)) \text{ in } D, \tag{IV16.20}$$

Wenn wir dies in die Schweregleichung von (IV16.8) einsetzen, erhalten wir

$$\varrho = -\operatorname{div}(\nabla\phi) = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mathfrak{g}\varrho}\nabla(p(\varrho))\right) \text{ in } D,$$

die behauptete Differentialgleichung (IV16.19) in ϱ . \square

Beweis der Elliptizität. Die Differentialgleichung ist von der Form

$$-\operatorname{div}(a(\varrho)\nabla\varrho) + f(\varrho) = 0,$$

wobei

$$a(\varrho) = \frac{p'_{\varrho}(\varrho)}{\varrho} > 0$$

nach Voraussetzung. Da

$$f(\varrho) = -\mathfrak{g}\varrho$$

monoton fallend in ϱ ist, ist die Existenz nicht ohne weiteres gesichert. (Wäre f monoton nichtfallend, so wäre die Existenz nach dem Satz über Monotone Operatoren¹⁰ gesichert. Bei allgemeinem f ist dies nur bei einer einseitigen Kleinheitsbedingung möglich.) \square

Die rechte Seite $\mathfrak{g}\varrho$ hat hierbei ein Vorzeichen, welches nicht a-priori die Existenz einer Lösung impliziert. Das ist auch physikalisch klar, da das Problem eine Selbstgravitation beinhaltet, und diese Selbstgravitation dazu führen kann, dass sich der Stern selbst auf einen Punkt zusammendrückt, und das natürlich mit einer instationären Lösung. Daher untersuchen wir jetzt verschiedene Modelle mit Druckfunktionen

$$p = K\varrho^{\gamma}, \quad K = \text{const} \tag{IV16.21}$$

auf die Existenz eines beschränkten ϱ . Zum besseren Verständnis dieser konstitutiven Gleichung siehe die Definition 16.13 und (IV16.33), sowie 16.14 über polytrope Sterne.

¹⁰ Siehe z.B. [H. Brézis: *Opérateur maximaux monotones*, Theoreme 2.3]

16.8 Lane-Emden Gleichung. Es sei

$$\hat{p}(\varrho) = K\varrho^\gamma \text{ mit Konstanten } \gamma > 1 \text{ und } K > 0.$$

(1) Dann lautet das elliptische Problem in (IV16.19)

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(\frac{K\gamma}{\varrho^{2-\gamma}}\nabla\varrho\right) &= \mathbf{g}\varrho \text{ in } D, \\ \varrho &= \varrho' \text{ auf } \partial D. \end{aligned}$$

(2) Mit $u := \varrho^{\gamma-1}$ ist dies

$$\begin{aligned} -\Delta u &= c_\gamma u^{\frac{1}{\gamma-1}} \text{ in } D, \quad c_\gamma := \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mathbf{g}}{K}, \\ u &= u_0 := (\varrho')^{\gamma-1} \text{ auf } \partial D. \end{aligned}$$

$$\text{Beweis (1). } \frac{1}{\varrho}\nabla(p(\varrho)) = \frac{K}{\varrho}\nabla(\varrho^\gamma) = \frac{K\gamma}{\varrho^{2-\gamma}}\nabla\varrho. \quad \square$$

$$\text{Beweis (2). } \frac{\gamma}{\varrho^{2-\gamma}}\nabla\varrho = \frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla(\varrho^{\gamma-1}) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla u. \quad \square$$

Dieser Fall wird ausführlich in dem Kapitel des Buches [28, IV. Polytropic and isothermal gas spheres] von Chandrasekhar behandelt. Dabei ist $n \in \mathbb{R}$ mit $0 < n < \infty$ definiert durch

$$\begin{aligned} n &:= \frac{1}{\gamma-1} \text{ also } \gamma = 1 + \frac{1}{n} \text{ so dass} \\ \gamma \leq 2 &\iff n \geq 1 \quad \text{und} \quad n \leq 5 \iff \gamma \geq \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

16.9 Lane-Emden function. A solution s of the nonlinear equation

$$-\Delta s = 3as^n \quad \text{with} \quad s(0) = 1,$$

it is called *Lane-Emden function of index* $n \in \mathbb{R}$ with $a = \text{const} > 0$. We call it $s_n := s$.

Wenn u eine Lösung von 16.8(2) ist, so ist die Lane-Emden Funktion mit dem Index n

$$s_n := \frac{u}{u(0)} \quad \text{mit} \quad 3a = c_\gamma u(0)^{n-1}, \quad n(\gamma-1) = 1.$$

Die Normierung $s_n = 1$ ändert nur den Koeffizienten der Differentialgleichung in 16.8(2). Wenn man s_n numerisch berechnet, sieht man, dass für $n < 5$ der Radius R , an welchem s_n seine erste Nullstelle hat, endlich ist,

während s_5 einen unbeschränkten Träger hat (siehe [28, IV.5 The Lane-Emden function for general n] und Abb. 36). Für den Grenzfall $n = 5$ haben wir die folgende explizite Lösung, die also sozusagen einen Planeten repräsentiert, dessen Träger der ganze Raum ist.

16.10 Schuster-Emden Lösung. Für $a > 0$ ist

$$s_5(x) := \frac{1}{(1 + a|x|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

die Lösung der Lane-Emden Gleichung für den Index $n = 5$. Die Lösung verschwindet im Unendlichen, siehe dazu Abb. 36.

Beweis. Ausrechnen. □

TABLE 4
THE CONSTANTS OF THE LANE-EMDEN FUNCTIONS*

n	ξ_1	$-\xi_1 \left(\frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	$\rho_c \bar{R}$	$\omega_n = -\xi_1^{n-1} \left(\frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	N_n	W_n	$\frac{\tau}{(n+1)\xi_1 \left(\frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}}$
0	2.4494	4.8988	1.0000	0.33333		0.119366	0.5
0.5	2.7528	3.7871	1.8361	0.02156	2.270	0.26227	0.53847
1.0	3.14159	3.14159	3.28987		0.63662	0.392699	0.5
1.5	3.65375	2.71406	5.99071	132.3843	0.42422	0.770140	0.53849
2.0	4.35287	2.41105	11.40254	10.4950	0.36475	1.63818	0.60180
2.5	5.35228	2.18720	23.40646	3.82662	0.35150	3.90906	0.69956
3.0	6.89685	2.01824	54.1825	2.01824	0.36394	11.05066	0.85432
3.25	8.01894	1.94980	88.153	1.54726	0.37898	20.365	0.96769
3.5	9.53581	1.89056	152.884	1.20426	0.40104	40.9098	1.12087
4.0	14.97155	1.79723	622.408	0.729202	0.47720	247.538	1.66606
4.5	31.83646	1.73780	6189.47	0.394356	0.65798	4922.125	3.33100
4.9	169.47	1.7355	934800	0.14239	1.340	3.693 × 10 ⁶	16.550
5.0	∞	1.73205	∞	0	∞	∞	∞

*The values for $n = 0.5$ and 4.9 are computed from Emden's integrations of θ_n ; for $n = 3.25$ an unpublished integration by Chandrasekhar has been used. $n = 5$ corresponds to the Schuster-Emden integral. For the other values of n the *British Association Tables*, Vol. II, has been used.

Abb. 36: Der Radius der Lane-Emden Funktionen, von [28]

Mit dieser Schuster-Emden Lösung lässt sich jetzt mit Hilfe von Variationsungleichungen die allgemeine Lösung konstruieren, und zwar im Falle $1 \leq n < 5$.

16.11 Theorem. Sei $1 \leq n < 5$ und $D = B_R(0)$. Wir nehmen an dass in 16.8(2) für die Randwerte u_0 auf ∂D

$$u_0^{n-1} \leq \frac{3(n+1)K}{4gR^2} \tag{IV16.22}$$

erfüllt ist. Dann existiert eine Lösung u der Lane-Emden Gleichung 16.8.

Hinweis: Für die Randwerte $\rho' \geq 0$ der Dichte ρ heißt dies

$$0 \leq (\rho')^{2-\gamma} \leq \frac{3(n+1)K}{4gR^2}, \quad \gamma \leq 2.$$

Beweis for $u_0 > 0$. Let u_0 be the Dirichlet condition of u on $\partial B_R(0)$ and assume this to be positive. Then

$$\bar{u} := \frac{u}{u_0}$$

satisfies

$$-\Delta \bar{u} = c_\gamma u_0^{-1} u^n = c_\gamma u_0^{n-1} \bar{u}^n = \bar{c} \bar{u}^n, \quad \bar{c} = c_\gamma u_0^{n-1}.$$

Hence \bar{u} solves the boundary value problem

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u} &= \bar{c} \bar{u}^n \text{ in } B_R(0), \\ \bar{u} &:= 1 \text{ on } \partial B_R(0). \end{aligned} \tag{IV16.23}$$

We compare it with the function

$$s := (1 + aR^2)^{\frac{1}{2}} s_5 \geq 1 \text{ auf } \overline{B_R(0)},$$

which satisfies

$$-\Delta s = \frac{3a}{(1 + aR^2)^2} s^5$$

with the same boundary data $s = 1$ on $\partial B_R(0)$. We now make the assumption that

$$\bar{c} < \frac{3a}{(1 + aR^2)^2}. \tag{IV16.24}$$

If we further have, purely formal, a solution \bar{u} of (IV16.23) which satisfies $1 \leq \bar{u} \leq s$ then

$$s^5 \geq s^n \geq \bar{u}^n \tag{IV16.25}$$

and with (IV16.24)

$$-\Delta s = \frac{3a}{(1 + aR^2)^2} s^5 > \bar{c} s^5 \geq \bar{c} \bar{u}^n = -\Delta \bar{u}.$$

Therefore $\Delta(\bar{u} - s) > 0$, which means that $\bar{u} - s$ is nonpositive and subharmonic, therefore it cannot reach the value 0 in the domain D , hence \bar{u} does not touch the upper obstacle.

To make this rigorous let \bar{u} be the solution of the obstacle problem¹¹

$\bar{u} \in \mathcal{H}$ and $\mathcal{E}(\bar{u}) \leq \mathcal{E}(v)$ for all $v \in \mathcal{H}$, where

$$\mathcal{E}(v) := \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \frac{\bar{c}}{n+1} v^{n+1} \right) dL^3,$$

$$\mathcal{H} := \{v \in W^{1,2}(D); 0 \leq v \leq s \text{ in } D, v = 1 \text{ on } \partial D\}.$$

¹¹siehe Theorem 2.1 of [D. Kinderlehrer, G. Stampacchia: *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. SIAM's Classics in Applied Mathematics 31 (2000)]

The solution of this minimum problem is radially symmetric, positive and continuous and satisfies for all $v \in \mathcal{H}$

$$\int_D (\nabla(\bar{u} - v) \bullet \nabla \bar{u} - \bar{c} \bar{u}^n (\bar{u} - v)) \, dL^3 \leq 0. \quad (\text{IV16.26})$$

We show that \bar{u} cannot touch the upper obstacle. Let $\zeta \in C_0^\infty(D)$ be a nonnegative test function, then we can take $v = \bar{u} - \zeta$ and obtain

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_D (\nabla \zeta \bullet \nabla \bar{u} - \bar{c} \bar{u}^n \zeta) \, dL^3 \\ &= \int_D (\nabla \zeta \bullet \nabla (\bar{u} - s) + \underbrace{\zeta(-\Delta s - \bar{c} \bar{u}^n)}_{=: \lambda}) \, dL^3 \\ &= \int_D (\nabla \zeta \bullet \nabla (\bar{u} - s) + \lambda \zeta) \, dL^3. \end{aligned}$$

Since $s \geq 1$ and $\bar{u} \leq s$ the inequalities (IV16.25), that is $s^5 \geq s^n \geq \bar{u}^n$, hold and therefore because of the assumption (IV16.24)

$$\lambda = -\Delta s - \bar{c} \bar{u}^n = \frac{3a}{(1 + aR^2)^2} s^5 - \bar{c} \bar{u}^n > \bar{c}(s^5 - \bar{u}^n) \geq 0$$

that is $\lambda > 0$ is a positive function. Hence the nonpositive function $\bar{u} - s$ is a weak solution of

$$-\Delta(\bar{u} - s) + \lambda \leq 0 \quad \text{also} \quad \Delta(\bar{u} - s) \geq \lambda > 0.$$

Then the mean value property implies that pointwise $\bar{u}(x) < s(x)$. With this it follows from the variational inequality (IV16.26) that \bar{u} is a solution of (IV16.23), that is, $u = \bar{u}u_0$ is a solution of 16.8(2).

If we choose in (IV16.24) the optimal $a = R^{-2}$ we obtain

$$c_\gamma u_0^{n+1} < \frac{3}{4R^2}$$

as stated in the theorem. \square

Es gibt also eine Lösung der Schwerkraftgleichung, wenn der Planet eine konstitutive Relation $p = K \varrho^\gamma$, $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$, hat mit $n < 5$, d.h. $\gamma > \frac{6}{5}$, und Randwerte $\varrho = 0$.

Polytrope Sterne

Wir bemerken, dass Lösung von 16.11 keine Wärme nach außen abgibt, und zwar dann, wenn es sich bei dem Stern um eine Gaskugel handelt, das heißt, im Abschnitt 2 über die Flüssigkeitsgleichung ist 2.5 erfüllt, insbesondere

$$\varepsilon = c_V \theta \varrho. \quad (\text{IV16.27})$$

Warum gilt das? Im allgemeinen Fall betrachten wir die Differentialgleichungen (IV16.4). Im Inneren Ω der Gaskugel (wir setzen $\Pi = p\text{Id}$, $S = 0$) lauten sie

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= \varrho, \\ \partial_t\varrho + \text{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \text{div}(\varrho v v^T + p\text{Id}) &= \varrho\nabla\phi, \\ \partial_t\varepsilon + \text{div}(\varepsilon v + q) + p\text{div}v &= 0. \end{aligned} \tag{IV16.28}$$

The entropy principle in III.2.4 or 2.2 says $\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$ with

$$\partial_t\eta + \text{div}(\eta v + \frac{1}{\theta}q) = \sigma = \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\bullet q \geq 0,$$

and that the Gibbs relation for p is satisfied, that is,

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho\eta'_{\varrho} - \eta + \frac{1}{\theta}(\varepsilon + p) \quad \text{or} \\ p + \varepsilon + \theta\varrho^2\eta''_{\varrho}(\varrho, \varepsilon) &= 0 \quad \text{or} \\ p &= \varrho f'_{\varrho}(\varrho, \theta) - f(\varrho, \theta), \quad f = \varepsilon - \theta\eta. \end{aligned}$$

Now, we can replace (see 16.12) the energy equation in (IV16.28) in the domain Ω , that is, inside the gaseous star, by the entropy equation and obtain the system

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= \varrho, \\ \partial_t\varrho + \text{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \text{div}(\varrho v v^T + p\text{Id}) &= \varrho\nabla\phi, \\ \partial_t\eta + \text{div}(\eta v) + \frac{1}{\theta}\text{div}q &= 0, \end{aligned} \tag{IV16.29}$$

again with the Gibbs relation and with q satisfying $\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\bullet q \geq 0$.

16.12 Theorem. In the general case the system (IV16.4) inside Ω is equivalent to (IV16.28) and also equivalent to (IV16.29).

Beweis von (IV16.28). The energy equation inside Ω is

$$\partial_t e + \text{div}(e v + p v + q) = v \bullet \mathbf{f},$$

and this is modulo the mass and momentum equation as usual, using III.2.2, equivalent to the equation for ε . \square

Beweis von (IV16.29). We perform the method of Liu & Müller explained in section III.4 and use the fact that we can write $\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon)$. We obtain

the following for all functions satisfying the Gibbs relation

$$\begin{aligned}
& \partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v + \psi_0) - \sigma \quad \left(\psi_0 = \frac{1}{\theta} q \text{ and } \sigma = \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \bullet q \right) \\
&= (\partial_t + v \bullet \nabla) \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon) + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 - \sigma \\
&= \eta'_{\varrho} (\partial_t + v \bullet \nabla) \varrho + \eta'_{\varepsilon} (\partial_t + v \bullet \nabla) \varepsilon + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div} \psi_0 - \sigma \\
&= \eta'_{\varrho} (\partial_t \varrho + v \bullet \nabla \varrho + \varrho \operatorname{div} v) + \eta'_{\varepsilon} (\partial_t \varepsilon + v \bullet \nabla \varepsilon + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q + p \operatorname{div} v) \\
&\quad + \operatorname{div} v \cdot (\eta - \varrho \eta'_{\varrho} - \varepsilon \eta'_{\varepsilon} - \eta'_{\varepsilon} p) - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q + \operatorname{div} \psi_0 - \sigma \\
&= \eta'_{\varrho} (\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v)) + \eta'_{\varepsilon} (\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) + p \operatorname{div} v) \\
&\quad + \operatorname{div} v \cdot \underbrace{(\eta - \varrho \eta'_{\varrho} - (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon})}_{= 0 \text{ (Gibbs relation)}} + \underbrace{\nabla \eta'_{\varepsilon} \bullet q - \sigma}_{= 0} + \operatorname{div} \underbrace{(\psi_0 - \eta'_{\varepsilon} q)}_{= 0} \\
&= \eta'_{\varrho} (\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v)) + \eta'_{\varepsilon} (\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) + p \operatorname{div} v),
\end{aligned}$$

if we define (siehe Abschnitt 11)

$$\eta'_{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}, \quad \eta'_{\varrho} = \frac{\mu}{\theta}.$$

Thus we have just repeated the calculation of the proof of the entropy inequality, but now for a larger class. It gives that

$$\begin{aligned}
& \partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) + p \operatorname{div} v \\
&= \theta (\partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v + \psi_0) - \sigma) - \mu (\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v))
\end{aligned}$$

for all functions satisfying the Gibbs relation. Thus, since $\theta > 0$, we can replace in system (IV16.28) the equation $\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\varepsilon v + q) + p \operatorname{div} v = 0$ by

$$0 = \partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v + \psi_0) - \sigma = \partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v) + \frac{1}{\theta} \operatorname{div} q$$

and obtain (IV16.29). □

16.13 Adiabatic processes (Definition). A physical process is called *adiabatic*, if the heat flux $q = 0$. *Zusatz:* If $q = -k(\varrho, \theta) \nabla \theta$ (then the entropy principle is satisfied, if $k \geq 0$) this is the case, if the heat capacity $k = 0$.

$\varepsilon = c_V \theta$!

Therefore, if we have an adiabatic process then $q = 0$ and the entropy equation in (IV16.29) becomes

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t \eta + \operatorname{div}(\eta v) = \partial_t(\varrho \eta^{\text{sp}}) + \operatorname{div}(\varrho \eta^{\text{sp}} v) \\
&= \eta^{\text{sp}} (\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v)) + \varrho (\partial_t \eta^{\text{sp}} + v \bullet \nabla \eta^{\text{sp}}) = \varrho (\partial_t + v \bullet \nabla) \eta^{\text{sp}},
\end{aligned}$$

hence $(\partial_t + v \bullet \nabla) \eta^{\text{SP}} = 0$. Since η^{SP} does not depend on v it is plausible to assume the stronger condition that $(\partial_t, \nabla) \eta^{\text{SP}} = 0$ and therefore, since Ω is connected,

$$\eta^{\text{SP}} = \text{const.} \quad (\text{IV16.30})$$

Therefore this condition implies the entropy equality. Thus

$$\begin{aligned} -\Delta \phi &= \varrho, \\ \partial_t \varrho + \text{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \text{div}(\varrho v v^T + p \text{Id}) &= \varrho \nabla \phi, \\ \eta^{\text{SP}} &= \text{const} \end{aligned} \quad (\text{IV16.31})$$

are the equations we assume. And that η^{SP} is constant means by 2.5(3)

$$\begin{aligned} \text{const} &= \eta^{\text{SP}} = c_V \log \varepsilon - c_P \log \varrho + \text{const} \\ &= c_V (\log \varepsilon - \gamma \log \varrho) + \text{const} = c_V \log \frac{\varepsilon}{\varrho^\gamma} + \text{const}, \end{aligned}$$

that is, there exists a constant $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ with $\varepsilon = c_\varepsilon \varrho^\gamma$ hence $c_V \theta \varrho = \varepsilon = c_\varepsilon \varrho^\gamma$ or

$$\theta = \theta_\gamma(\varrho) := \frac{c_\varepsilon}{c_V} \varrho^{\gamma-1}, \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V}. \quad (\text{IV16.32})$$

Then 2.5(2) says, it is $R = c_p - c_v$,

$$p = R \theta \varrho = \frac{R c_\varepsilon}{c_V} \varrho^\gamma = c_\varepsilon (\gamma - 1) \varrho^\gamma \quad (\text{IV16.33})$$

a constitutive equation, which was assumed also in (IV16.21). Hence, the solutions which were found with this assumption on the pressure apply for ideal gases and they are adiabatic solutions.

16.14 Polytropic processes (Definition). A process is defined *polytropic*, see [28, II Physical principles] specially [28, II.3 Polytropic changes], if

$$\eta^{\text{SP}} = c \log \theta.$$

Then there exists a constant c_ε such that

$$p = c_\varepsilon (\gamma' - 1) \varrho^{\gamma'} \quad \text{with} \quad \gamma' := \frac{c_P - c}{c_V - c} \quad (\text{instead of } \gamma = \frac{c_P}{c_V}).$$

$\varepsilon = c_V \theta \varrho!$

Beweis. It is by assumption, since $\varepsilon = c_V \theta \varrho$,

$$\eta^{\text{SP}} = c \log \theta = c(\log \varepsilon - \log \varrho) + \text{const}$$

and by 2.5(3), since $p = R \theta \varrho$,

$$\eta^{\text{SP}} = c_V \log \varepsilon - c_P \log \varrho + \text{const}$$

hence

$$\text{const} = (c_V - c) \log \varepsilon - (c_P - c) \log \varrho = (c_V - c) \log \frac{\varepsilon}{\varrho^{\gamma'}}$$

which gives the assertion. \square

Die Frage ist, ob die stationären Lösungen von 16.11 stabil sind bezüglich des zeitabhängigen Modells (IV16.29). Dies kann man beantworten, indem man das instationäre System numerisch berechnet.

Für das weitere Studium der Sterne unter Selbstgravitation sind andere physikalische Prinzipien vonnöten. Das Material wird durch die Gravitation stark gepresst, was chemische Reaktionen hervorruft als auch die Ausbreitung von Strahlung.

17 Flüssigkristalle

– Dieser Abschnitt folgt noch –

18 Übungen

18.1 Spezifische freie Energie. Sei

$$g(\vec{c}) := \sum_{k=1}^M c_k (\log c_k - 1)$$

für $\vec{c} = (c_k)_k \in \mathbb{R}^M$ with $c_k > 0$ for $k = 1, \dots, M$. Zeige:

$$\left(\sum_{k=1}^M c_k g'_{c_k} \right) - g = \sum_{k=1}^M c_k.$$

18.2 Diffusionskoeffizienten. Sei

$$\sum_k \mathbf{J}_k = 0 \quad \text{and} \quad \sum_k c_k = 1.$$

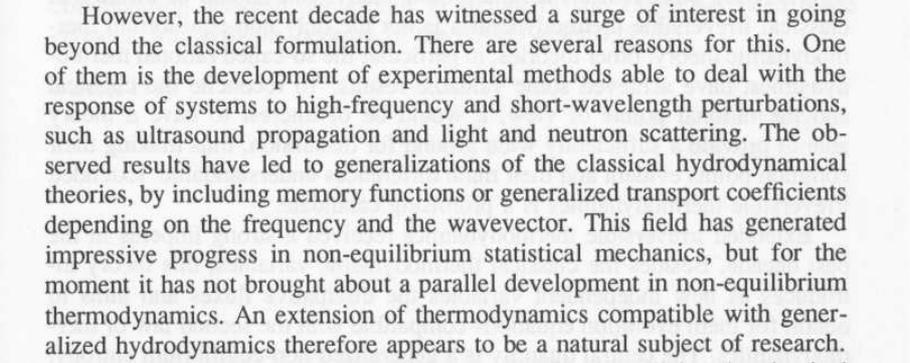
Zeige: Sind für beliebige Funktionen c_k mit der angegebenen Nebenbedingung $\mathbf{J}_k = -\sum_l d_{kl} \nabla c_l$, so folgt

$$\sum_k d_{kl} = D \quad \text{für alle } l$$

mit einer Funktion D .

V Höhere Momente

Für manche Prozesse ist die Angabe eines Systems für die Masse, den Impuls und die Energie nicht hinreichend, um die Dynamik genau genug zu beschreiben. Dies gilt insbesondere für die in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts durchgeführten Experimente, siehe den Text der Abb. 1 und Abb. 2.



However, the recent decade has witnessed a surge of interest in going beyond the classical formulation. There are several reasons for this. One of them is the development of experimental methods able to deal with the response of systems to high-frequency and short-wavelength perturbations, such as ultrasound propagation and light and neutron scattering. The observed results have led to generalizations of the classical hydrodynamical theories, by including memory functions or generalized transport coefficients depending on the frequency and the wavevector. This field has generated impressive progress in non-equilibrium statistical mechanics, but for the moment it has not brought about a parallel development in non-equilibrium thermodynamics. An extension of thermodynamics compatible with generalized hydrodynamics therefore appears to be a natural subject of research.

Abb. 1: Aus dem Buch von Jou & Casas-Vázquez & Lebon

Es sind also Modelle von mehr als den klassischen 5 Momenten erforderlich, welche die Dichte ϱ , die Geschwindigkeit v und die innere Energie ε (beziehungsweise für die Temperatur θ) darstellen. Basis für diese Theorie sind die Boltzmann-Gleichungen für Materialien aus einzelnen Molekülen, die einen gewissen auf Impuls- und Energiebilanz basierten Kollisionsmechanismus haben, also für Gase (siehe Abschnitt 2). Aus diesen Gleichungen lassen sich die üblichen Erhaltungsgleichungen extrahieren. Man erhält darüber hinaus eine ganze Hierarchie von Differentialgleichungen für höhere Momente (siehe Abschnitt 3). Ein Teil dieser Gleichungen wird als Grundlage für die Theorie genommen.

Es bleibt aber trotzdem das Entropieprinzip als grundlegende Eigenschaft bestehen. Daher wurde die Theorie auch “Extended Thermodynamics” genannt, obwohl ja nur das Entropieprinzip auf eine andere Klasse von Modellen angewandt wird (in unserer Sprache wird eine neue Matrix Z vonnöten sein). Von dieser Theorie handeln die Abschnitte.

Our aim is to propose a theory which goes beyond the classical formulation of thermodynamics. This is achieved by enlarging the space of basic independent variables, through the introduction of non-equilibrium variables, such as the dissipative fluxes appearing in the balance equations. The next step is to find evolution equations for the dissipative fluxes. Whereas the evolution equations for the classical variables are given by the usual balance laws, no general criteria exist concerning the evolution equations of the dissipative fluxes, with the exception of the restrictions imposed on them by the second law of thermodynamics.

The independent character of the fluxes is made evident in high-frequency phenomena. In general, they are *fast* variables that decay to their local-equilibrium values after a short relaxation time. Whereas many authors have studied the elimination of such *fast* variables in order to obtain a description of the system in terms of slow variables, our aim is the opposite one. We want to describe phenomena at frequencies comparable to the inverse of the relaxation times of the fluxes. Therefore, at such time scales, they must be included in the set of basic independent variables.

Abb. 2: Aus dem gleichen Buch

Referenzen: Im Zusammenhang der “Extended Thermodynamics” verweisen wir auf die Bücher von Müller [88] und Jou & Casas-Vázquez & Lebon [82]. Wir verweisen weiter auf den Originalartikel von Grad [108]. Zur Boltzmann Gleichung siehe den Ausgangsartikel von Boltzmann in [98] und die Darstellungen in [Wikipedia: Boltzmann Gleichung] und andererseits in [Wikipedia: H-Theorem].

1 Cattaneo's 8-Momente Gleichung

Für manche Prozesse ist die Angabe einer Gleichung für die Masse, den Impuls und die Energie nicht hinreichend, um die Dynamik zu beschreiben. Es bleibt aber trotzdem das Entropieprinzip als grundlegende Eigenschaft bestehen. Die Entropie muss nur noch von weiteren Variablen abhängen. Wir geben hier das Beispiel von Cattaneo (1948) an. Es besteht aus der Energiebilanz, zusammen mit den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls, aber mit dem Unterschied, dass für den Wärmefluss keine konstitutive Gleichung wie üblich vorausgesetzt wird, sondern eine Differentialgleichung.

Referenzen: Zum Cattaneo Modell siehe den Ausgangsartikel von Cattaneo [101], den Artikel von Herrera & Falcon [45, Speziell die Gleichung (6)], und die generellen Bemerkungen in Müller [87, 2.1 The Cattaneo Equation] und Dou & Casas-Vázquez & Lebon [82, 6.6 Heat Conduction in a Rotating Rigid Cylinder]. In einer neuerlichen Arbeit [66] hat Straughan dies auf poröse Medien angewandt, und dabei das Modell von Christov benutzt. Christov [30] hat ein beobachterunabhängiges Modell angegeben.

Wir haben also Massen-, Impuls- und Energieerhaltung (siehe (III.2.5))

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= v \bullet \mathbf{f}, \\ e &= \varepsilon + \frac{\varrho}{2} |v|^2,\end{aligned}\tag{V1.1}$$

und versuchen, ein Entropieprinzip herzuleiten, wobei die Entropie η nun im Gegensatz zu Abschnitt III.1 noch vom Wärmefluss q abhängt, der als unabhängige Variable betrachtet wird. Das heißt wir nehmen an, dass

$$\eta = \widehat{\eta}(\varrho, \varepsilon, q).\tag{V1.2}$$

1.1 Lemma. Da η ein objektiver Skalar sein muss, hängt η in Wirklichkeit nur vom Modulus von q , d.h. von $|q|^2$, ab. Es gibt daher einen objektiven Skalar $\tau = \widehat{\tau}(\varrho, \varepsilon, |q|)$ mit

$$\eta'_{q} = -\tau q.$$

Beweis. Es sind ϱ und ε objektive Skalare. Da η ein objektiver Skalar ist, muss daher die konstitutiven Funktion in (V1.2) für alle Werte Qq^* denselben Wert wie für q^* haben. Also folgt die Behauptung. \square

Es soll das Entropieprinzip

$$\sigma := \partial_t \eta + \operatorname{div} \psi \geq 0$$

erfüllt sein, wobei der Entropiefluss noch zu bestimmen ist. Um die Entropieproduktion σ zu berechnen, definieren wir wie immer $\dot{g} = \partial_t g + v \bullet \nabla g$ für jede Funktion g , und schreiben die Gleichungen in (V1.1) entsprechend um und erhalten das äquivalente System

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div} v &= 0, \\ \varrho \dot{v} + \varrho \operatorname{div} v + \operatorname{div} \Pi &= \mathbf{f}, \\ \dot{e} + \varepsilon \operatorname{div} v + \operatorname{div} q &= -(\operatorname{D}v) \bullet \Pi.\end{aligned}$$

Nun ist in Analogie zum Beweis von III.2.4

$$\begin{aligned}\sigma &= \dot{\eta} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \eta'_{\varrho} \dot{\varrho} + \eta'_{\varepsilon} \dot{\varepsilon} + \eta'_{q} \bullet \dot{q} + \eta \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \operatorname{D}v \bullet ((\eta - \varrho \eta'_{\varrho} - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi) \\ &\quad + \eta'_{q} \bullet \dot{q} - \eta'_{\varepsilon} \operatorname{div} q + \operatorname{div}(\psi - \eta v) \\ &= \operatorname{D}v \bullet ((\eta - \varrho \eta'_{\varrho} - \varepsilon \eta'_{\varepsilon}) \operatorname{Id} - \eta'_{\varepsilon} \Pi) \\ &\quad + q \bullet (\nabla \eta'_{\varepsilon} - \tau \dot{q}) + \operatorname{div}(\psi - \eta v - \eta'_{\varepsilon} q).\end{aligned}$$

Wenn wir wie immer die Temperatur θ und den Druck p definieren durch

$$\frac{1}{\theta} = \eta'_{\varepsilon}, \quad \eta = \varrho \eta'_{\varrho} + (\varepsilon + p) \eta'_{\varepsilon}, \quad (\text{V1.3})$$

und wenn wir den Entropiefluss durch

$$\psi = \eta v + \eta'_{\varrho} q \quad (\text{V1.4})$$

festlegen, dann wird die Entropieproduktion gleich

$$\sigma = \frac{1}{\theta} \text{D}v \bullet (p \text{Id} - \Pi) + q \bullet (\nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) - \tau \dot{q}).$$

Das Ziel ist es, dass die Entropieproduktion nichtnegativ ist, d.h. $\sigma \geq 0$. Indem wir ausnutzen, dass

$$q \bullet (\text{D}v q) = \sum_{ij} q_i q_j \partial_j v_i = \text{D}v \bullet (q q^{\text{T}}),$$

können wir die Entropieungleichung schreiben als

$$\sigma = \frac{1}{\theta} \text{D}v \bullet (p \text{Id} - \lambda \theta q q^{\text{T}} - \Pi) + q \bullet (\nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) + \lambda \text{D}v q - \tau \dot{q}) \geq 0 \quad (\text{V1.5})$$

mit einer beliebigen Funktion λ , was ein objektiver Skalar sein soll. Wir wollen jetzt wie üblicherweise annehmen, dass beide Terme nichtnegativ sind, d.h. es soll gelten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \text{D}v \bullet (p \text{Id} - \lambda \theta q q^{\text{T}} - \Pi) &\geq 0, \\ q \bullet (\nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) + \lambda \text{D}v q - \tau \dot{q}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung schreiben wir wie gewohnt als

$$\text{D}v \bullet S \geq 0, \quad \Pi := p \text{Id} - S - \lambda \theta q q^{\text{T}} \quad (\text{V1.6})$$

mit einer objektiven Matrix S , so dass also Π wie gewünscht eine objektive Matrix ist. Hier hat Π die Standardform, falls der λ -Term verschwindet. Die zweite Ungleichung ist erfüllt, wenn

$$q \bullet M q \geq 0, \quad \tau \dot{q} - \lambda \text{D}v q = \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) - M q. \quad (\text{V1.7})$$

Wir müssen sicherstellen, dass die hier aufgestellten Gleichungen und Ungleichungen objektiv sind. Deshalb beweisen wir das Folgende.

1.2 Lemma. Die Gleichung und die Ungleichung in (V1.7) sind beobachtungsunabhängig, falls M die Transformationseigenschaft

$$M \circ Y = (\lambda^* - \tau^*) \dot{Q} Q^{\text{T}} + Q M^* Q^{\text{T}}$$

We now write energy balances for the solid and fluid parts of the porous medium separately, and likewise write Cattaneo–Christov heat flux laws for each of the solid and fluid components (cf. Straughan 2008, pp. 14–15), which only deals with the classical Fourier theory. The solid and fluid parts are denoted by subscript s,f. Then we have the energy balance and Cattaneo law for the solid,

$$(\rho_0 c)_s T_{,t} = -\tilde{Q}_{i,j} \quad (2.6)$$

and

$$\tau_s \tilde{Q}_{i,t} = -\tilde{Q}_i - k_s T_{,i}, \quad (2.7)$$

where c is the specific heat, τ_s is the relaxation time, k_s is thermal conductivity and \tilde{Q}_i the heat flux. For the fluid, the energy balance and Christov (2009) heat flux laws take the form

$$(\rho_0 c_p)_f (T_{,t} + V_i T_{,i}) = -\tilde{Q}_{i,j} \quad (2.8)$$

and

$$\tau_f (\tilde{Q}_{i,t} + V_j \tilde{Q}_{i,j} - \tilde{Q}_j V_{i,j}) = -\tilde{Q}_i - k_f T_{,i} \quad (2.9)$$

where c_p is the specific heat at constant pressure, k_f is the thermal conductivity and τ_f is the relaxation time. (The classical Cattaneo law is found from equation (2.9) by putting $\mathbf{V} \equiv \mathbf{0}$. If then $\tau_f = 0$, one recovers Fourier's law $\tilde{Q}_i = -k_f T_{,i}$. Equation (2.9) is an invariant form of Cattaneo law valid in a moving body and proposed by Christov (2009)).

Abb. 3: Aus dem Paper von Straughan

erfüllt, d.h. der antisymmetrische Anteil M^A diese Eigenschaft hat und der symmetrische Anteil M^S eine objektive Matrix ist:

$$\begin{aligned} M^S \circ Y &= Q M^{*S} Q^T, \\ M^A \circ Y &= (\lambda^* - \tau^*) \dot{Q} Q^T + Q M^{*A} Q^T. \end{aligned}$$

Beweis. Es ist v ist eine Geschwindigkeit, also $v \circ Y = \dot{X} + Qv^*$, und q ein objektiver Vektor, d.h. $q \circ Y = Qq^*$. Indem wir diese Identität ableiten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_{x_j^*} (Qq^*) &= \partial_{x_j^*} (q \circ Y) = \sum_i (\partial_{x_i} q) \circ Y Q_{ij}, \\ \partial_{t^*} (Qq^*) &= (\partial_t q) \circ Y + \sum_i (\partial_{x_i} q) \circ Y \dot{X}_i, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \dot{q} \circ Y &= (\partial_t q) \circ Y + \sum_i v_i \circ Y (\partial_{x_i} q) \circ Y \\ &= (\partial_t q) \circ Y + \sum_i (\partial_{x_i} q) \circ Y \dot{X}_i + \sum_i (v_i \circ Y - \dot{X}_i) (\partial_{x_i} q) \circ Y \\ &= \partial_{t^*} (Qq^*) + \sum_{ij} Q_{ij} v_j^* (\partial_{x_i} q) \circ Y \\ &= \partial_{t^*} (Qq^*) + \sum_j v_j^* \partial_{x_j^*} (Qq^*) \\ &= Q (\partial_{t^*} q^* + \sum_j v_j^* \partial_{x_j^*} q^*) + \dot{Q} q^* \\ &= Q ((q^*) \cdot) + \dot{Q} q^*. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Transformationsregel

$$\dot{q} \circ Y = Q(q^*) \cdot + \dot{Q}q^*$$

gilt. Hier ist also $\dot{q} = (\partial_t + v \bullet \nabla_x)q$ und $\dot{q}^* = (q^*) \cdot = (\partial_{t^*} + v^* \bullet \nabla_{x^*})q^*$. Da $v \circ Y = \dot{X} + Qv^*$, ist (indem wir diese Gleichung nach x^* ableiten)

$$Dv \circ Y = \dot{Q}Q^T + QDv^*Q^T,$$

folglich wird (es ist τ und λ ein objektiver Skalar)

$$\begin{aligned} & (\tau \dot{q} - \lambda Dv q + Mq) \circ Y \\ &= \tau^* (Q \dot{q}^* + \dot{Q}q^*) + (M \circ Y - \lambda^* (\dot{Q}Q^T + QDv^*Q^T))Qq^* \\ &= Q(\tau^* \dot{q}^* - \lambda^* Dv^* q^*) + (M \circ Y + (\tau^* - \lambda^*) \dot{Q}Q^T)Qq^* \\ &= Q(\tau^* \dot{q}^* - \lambda^* Dv^* q^* + M^* q^*), \end{aligned}$$

falls

$$M \circ Y + (\tau^* - \lambda^*) \dot{Q}Q^T = QM^*Q^T.$$

□

Insgesamt ist damit den beiden Gleichungen und Ungleichungen (V1.6) und (V1.7), die sich aus dem Entropieprinzip ergaben, Genüge getan.

1.3 Theorem. Wenn die Temperatur und der Druck wie in (V1.3) definiert sind und für die Lösungen von (V1.1) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Pi &= p\text{Id} - S - \lambda \theta q q^T, \\ \tau \dot{q} - \lambda Dv q &= \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) - Mq \end{aligned}$$

gelten, wobei M die Bedingung in 1.2 hat, so ist das Entropieprinzip erfüllt, falls

$$Dv \bullet S \geq 0, \quad q \bullet Mq \geq 0.$$

Wenn wir nun $\lambda = \tau$ setzen, sind die Bedingungen von Cattaneo-Christov erfüllt.

1.4 Cattaneo-Christov Modell. Es ist $\lambda = \tau$ in 1.3 und M symmetrisch. Dann ist das Entropieprinzip erfüllt, falls zusätzlich zu (V1.1)

$$\begin{aligned} \Pi &= p\text{Id} - S - \tau \theta q q^T \\ \tau (\partial_t q + \sum_i v_i \partial_i q - \sum_i q_i \partial_i v) &= \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) - Mq \end{aligned} \tag{V1.8}$$

und

$$Dv \bullet S \geq 0, \quad q \bullet Mq \geq 0.$$

Relaxationszeit: Die Funktion τ hängt mit der "Relaxationszeit" zusammen. Geht $\tau \rightarrow 0$, so konvergiert das Modell zu dem geübten klassischen Modell.

Fassen wir also zusammen.

Cattaneo-Christov Modell:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= v \bullet \mathbf{f}, \\ \tau(\partial_t q + v \bullet \nabla q - q \bullet \nabla v) &= \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) - M q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi &= p \operatorname{Id} - S - \tau \theta q q^T, \\ e &= \varepsilon + \frac{\varrho}{2} |v|^2, \quad \varepsilon \text{ die innere Energie,} \\ Dv \bullet S &\geq 0, \quad M \text{ symmetrisch positiv definit,} \\ \theta &\text{ die absolute Temperatur,} \\ q &\text{ der Wärmefluss,} \\ \tau &\text{ proportional zur Relaxationszeit.} \end{aligned}$$

(V1.9)

Siehe auch die Gleichungen in der Abb. 3 ((2.8) und (2.9), bei der Tempe-

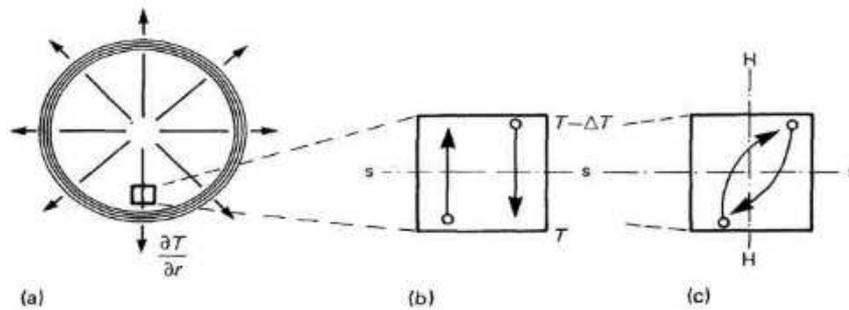


Abb. 4: Paradoxon (aus dem Buch von Müller)

raturgleichung fehlt der Term mit $\operatorname{div} v$). Es gibt aber auch andere Modelle, und zwar für $\lambda = 0$, d.h. der Drucktensor Π ist gegenüber dem normalen Drucktensor nicht geändert. Der Grund ist, dass $q \bullet (Dv)^A q = 0$ ist.

1.5 Beispiel. Es ist $\lambda = 0$ in 1.3 und $M^A = -\tau Dv^A$ und $M_0 := M^S$ positiv definit. Dann ist das Entropieprinzip erfüllt, falls zusätzlich zu (V1.1)

$$\begin{aligned} \Pi &= p \operatorname{Id} - S \\ \tau(\dot{q} - (Dv)^A q) &= \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) - M_0 q \end{aligned} \tag{V1.10}$$

mit $Dv \bullet S \geq 0$.

Ist v die Geschwindigkeit eines sich drehenden Zylinders, so sind die beiden Gleichungen für q , d.h. die zweiten Gleichungen in (V1.8) und (V1.10), identisch, die beiden Gleichungen für Π jedoch nicht. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf das Paradoxon in Abb. 4.

2 Boltzmann Gleichung

Die Boltzmann Gleichung ist ein Erhaltungssatz für eine Wahrscheinlichkeit

$$(t, x, c) \mapsto f(t, x, c) \in \mathbb{R},$$

die angibt, wie wahrscheinlich es ist, dass in einem Gas ein Partikel an einem Ort x zu einer Zeit t sich mit einer gewissen Geschwindigkeit c fortbewegt. Die Differentialgleichung für f lautet

$$\begin{aligned} \partial_t f + \sum_{i=1}^n c_i \partial_{x_i} f + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i \partial_{c_i} f &= \mathbf{r}, \\ \sum_{i=1}^n \partial_{c_i} \mathbf{g}_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V2.1})$$

The quantity f is the density of atoms at (t, x) with velocity c , and \mathbf{g} denotes the external acceleration and is a function of (t, x, c) , and \mathbf{r} is the “collision product”, which we explain later in this section in (V2.8), and is also a function of (t, x, c) . First let us clarify frame indifference. The variables (t, x, c) and the probability f and acceleration \mathbf{g} and the collision rate \mathbf{r} have the following transformation behaviour under an observer change.

2.1 Observer change. With the usual notations we have for the coordinates the transformation

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ c \end{bmatrix} = Y_B \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \\ c^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} T(t^*) \\ X(t^*, x^*) \\ \dot{X}(t^*, x^*) + Q(t^*)c^* \end{bmatrix}, \quad (\text{V2.2})$$

where T , X , and Q are given by the classical Newton transformation

$$Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} T(t^*) \\ X(t^*, x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^* + \mathbf{a} \\ Q(t^*)x^* + \mathbf{b}(t^*) \end{bmatrix}.$$

So we can say, the variable (t, x) transforms like usual and c satisfies $c = \dot{X}(t^*, x^*) + Q(t^*)c^*$ like a velocity. Moreover, the probability f and the collision product \mathbf{r} are objective scalars, that is

$$f(t, x, c) = f^*(t^*, x^*, c^*), \quad \mathbf{r}(t, x, c) = \mathbf{r}^*(t^*, x^*, c^*), \quad (\text{V2.3})$$

if coordinates transform as above. The *acceleration* satisfies

$$\mathbf{g}(t, x, c) = \ddot{X}(t^*, x^*) + 2\dot{Q}(t^*)c^* + Q(t^*)\mathbf{g}^*(t^*, x^*, c^*). \quad (\text{V2.4})$$

The transformation rule for the acceleration is the same as for the force in II.3.7 except that the velocity is taken as the individual velocity and the equation is divided by the mass density. We mention that this rule is mandatory if one wants to achieve an equation like (V3.1) for the moments (see the statement in 3.5). With this transformation rules it is true, that

2.2 Lemma. The Boltzmann equations (V2.1) are objective.

Beweis. The transformation of the variables (t, x, c) is given in (V2.2). Then (V2.3) implies that

$$f^*(t^*, x^*, c^*) = f(t^* + a, Q(t^*)x^* + b(t^*), \dot{X}(t^*, x^*) + Q(t^*)c^*)$$

and from there we obtain (we omit arguments)

$$\begin{aligned}\nabla_{c^*} f^* &= Q^T \nabla_c f, \\ \nabla_{x^*} f^* &= Q^T \nabla_x f + (D_{x^*} \dot{X})^T \nabla_c f = Q^T \nabla_x f + \dot{Q}^T \nabla_c f, \\ \partial_{t^*} f^* &= \partial_t f + \dot{X} \bullet \nabla_x f + (\ddot{X} + \dot{Q}c^*) \bullet \nabla_c f.\end{aligned}$$

We obtain

$$\begin{aligned}\partial_{t^*} f^* + c^* \bullet \nabla_{x^*} f^* + \mathbf{g}^* \bullet \nabla_{c^*} f^* \\ = \partial_t f + (\dot{X} + Qc^*) \bullet \nabla_x f + (\ddot{X} + 2\dot{Q}c^* + Q\mathbf{g}^*) \bullet \nabla_c f.\end{aligned}$$

Since $c = \dot{X} + Qc^*$ the result follows, if $\mathbf{g} = \ddot{X} + 2\dot{Q}c^* + Q\mathbf{g}^*$, that is (V2.4) is assumed. Here we have used that \mathbf{r} is an objective scalar.

We also have to show that the condition $\text{div}_c \mathbf{g} = 0$ is objective. To prove this we compute the derivative of (V2.4) with respect to c^* , that is

$$D_c \mathbf{g} Q = 2\dot{Q} + QD_{c^*} \mathbf{g}^* \quad \text{or} \quad D_c \mathbf{g} = 2\dot{Q}Q^T + QD_{c^*} \mathbf{g}^* Q^T.$$

From this it follows that $\text{trace } D_c \mathbf{g} = \text{trace } D_{c^*} \mathbf{g}^*$, since $\dot{Q}Q^T$ is antisymmetric. \square

Referenzen: Zur Boltzmann Gleichung siehe den Ausgangsartikel von Boltzmann in [98] und die Darstellungen in [Wikipedia: H-Theorem] sowie [Wikipedia: Boltzmann Gleichung]. Darüberhinaus siehe die Ausführungen in I.Müller [87, 5.2.1 The Boltzmann equation] und für Systeme in DeGroot & Mazur [6, Ch. IX §2-4 The Boltzmann equation]. Als mathematische Arbeit siehe DiPerna & Lions [35].

The entropy principle for the Boltzmann equation has the following form.

2.3 H-Theorem. If $a, b \in \mathbb{R}$ and $a > 0$ then

$$\begin{aligned}\eta(t, x) &:= - \int a \ln(bf(t, x, c)) f(t, x, c) dc, \\ \psi_i(t, x) &:= - \int a c_i \ln(bf(t, x, c)) f(t, x, c) dc\end{aligned}$$

satisfies

$$\partial_t \eta(t, x) + \text{div} \psi(t, x) = - \int a \ln(bf(t, x, c)) \mathbf{r}(t, x, c) dc \geq 0,$$

if \mathbf{r} is given as in (V2.8) below.

Beweis. We compute

$$\frac{d}{df}(\ln(bf) \cdot f) = \ln(bf) + 1$$

and therefore with $\varphi := -\ln(bf) - 1$ we obtain

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(- \int \log(bf) f \, dc \right) + \sum_i \partial_{x_i} \left(- \int c_i \log(bf) f \, dc \right) \\ &= - \int \partial_t (\ln(bf) f) \, dc - \sum_i \int c_i \partial_{x_i} (\ln(bf) f) \, dc \\ &= \int \varphi (\partial_t f + \sum_i c_i \partial_{x_i} f) \, dc = \int (\varphi \mathbf{r} - \sum_i \varphi \mathbf{g}_i \partial_{c_i} f) \, dc \\ &= \int \varphi \mathbf{r} \, dc + \sum_i \int \partial_{c_i} (\mathbf{g}_i \log(bf) f) \, dc = \int \varphi \mathbf{r} \, dc, \end{aligned}$$

if f vanishes fast enough for $|c| \rightarrow \infty$. That the last term is nonnegative, is a consequence of 2.5(2). In fact, there the integral over \mathbf{r} is an integral of a probability times (the quantities $\varphi_k, \varphi'_k, f_k, f'_k$ are defined as there)

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi'_1 - \varphi'_2)(f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \\ &= (-\ln(bf_1) - \ln(bf_2) + \ln(bf'_1) + \ln(bf'_2))(f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \\ &= (\ln(f'_1 f'_2) - \ln(f_1 f_2))(f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \geq 0 \end{aligned}$$

since the logarithm is a monotone increasing function. \square

Hence the H -Theorem plays the role of the entropy principle and it is due to the special form of the collision term, which will be introduced now.

2.4 Kollision von Massepunkten. Es seien zwei Massepunkte gegeben mit Massen m_k für $k = 1, 2$, die mit Geschwindigkeiten c_k aufeinandertreffen. Nach der Kollision sind die Massen unverändert und die Geschwindigkeiten sind c'_k . Bei der Kollision bleiben die Massen, der Impuls und die Energie erhalten (siehe I.3.2 für die Massen und den Impuls), d.h. es gilt

$$\begin{aligned} m_1 c_1 + m_2 c_2 &= m_1 c'_1 + m_2 c'_2, \\ \frac{m_1}{2} |c_1|^2 + \frac{m_2}{2} |c_2|^2 &= \frac{m_1}{2} |c'_1|^2 + \frac{m_2}{2} |c'_2|^2. \end{aligned}$$

Das ist äquivalent dazu, dass die Geschwindigkeiten c'_1 und c'_2 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} c'_1 &= \frac{m_1}{m_s} c_1 + \frac{m_2}{m_s} (c_2 + \mathbf{k}'), \quad m_s = m_1 + m_2, \\ c'_2 &= \frac{m_1}{m_s} (c_1 - \mathbf{k}') + \frac{m_2}{m_s} c_2, \quad \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |\mathbf{k}'| = |c_1 - c_2|. \end{aligned}$$

Also sind (für $n = 3$) die sechs Gleichungen für c'_1 und c'_2 durch vier Gleichungen der Impuls- und Energiebilanz gegeben. Die zwei Freiheitsgrade sind durch $\mathbf{k}' \in \partial B_{|c_1 - c_2|}(0) \subset \mathbb{R}^n$ ausgedrückt.

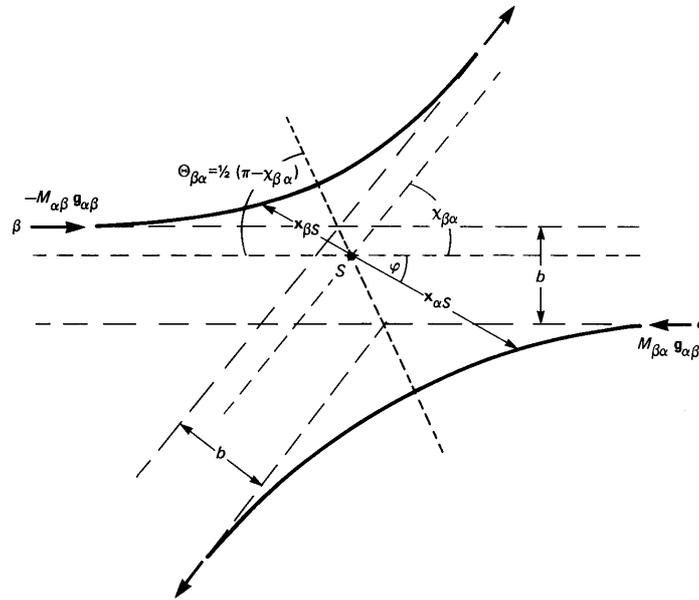


Abb. 5: “Orbits of atoms in interaction” aus I.Müller [87, Fig. 5.7]

Es ist nicht gesagt, dass sich die Teilchen wirklich treffen (siehe Abb. 5), sondern in einem gewissen Abstand sieht das so aus. Lokal kann also ein Abstoßungspotential wirksam sein.

Beweis. Wir definieren den Schwerpunkt der beiden Massen durch die Gesamtmasse

$$m_s := m_1 + m_2$$

und den Impuls durch

$$m_s c_s = m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 c'_1 + m_2 c'_2,$$

also ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts

$$c_s := \frac{m_1}{m_s} c_1 + \frac{m_2}{m_s} c_2 = \frac{m_1}{m_s} c'_1 + \frac{m_2}{m_s} c'_2. \quad (\text{V2.5})$$

Physikalisch bedeutet dies, wenn man mit der Geschwindigkeit c_s an dem Stoß vorbeifliegt, sieht man die beiden Körper aufeinandertreffen mit Geschwindigkeiten $c_k - c_s$ und nach dem Stoß mit $c'_k - c_s$ auseinanderfliegen, denn aus der Impulsbilanz folgt $0 = m_1 c_1 + m_2 c_2 - m_s c_s = m_1 c'_1 + m_2 c'_2 - m_s c_s$ und daher

$$m_1(c_1 - c_s) = -m_2(c_2 - c_s) \quad \text{und} \quad m_1(c'_1 - c_s) = -m_2(c'_2 - c_s).$$

Da gilt

$$\begin{aligned} c_1 - c_s &= \left(1 - \frac{m_1}{m_s}\right)c_1 - \frac{m_2}{m_s}c_2 = \frac{m_2}{m_s}(c_1 - c_2), \\ c_2 - c_s &= -\frac{m_1}{m_s}c_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_s}\right)c_2 = -\frac{m_1}{m_s}(c_1 - c_2) \end{aligned} \quad (\text{V2.6})$$

und

$$\begin{aligned}c'_1 - c_s &= \left(1 - \frac{m_1}{m_s}\right)c'_1 - \frac{m_2}{m_s}c'_2 = \frac{m_2}{m_s}(c'_1 - c'_2), \\c'_2 - c_s &= -\frac{m_1}{m_s}c'_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_s}\right)c'_2 = -\frac{m_1}{m_s}(c'_1 - c'_2)\end{aligned}\tag{V2.7}$$

definieren wir den **Kollisionsvektor** (en: *collision vector*) durch

$$\mathbf{k}' = c'_1 - c'_2.$$

Aus der Energiebilanz

$$m_1|c_1|^2 + m_2|c_2|^2 - m_s|c_s|^2 = m_1|c'_1|^2 + m_2|c'_2|^2 - m_s|c_s|^2$$

folgt unter Zuhilfenahme von (V2.6)

$$\begin{aligned}m_1|c_1|^2 + m_2|c_2|^2 - m_s|c_s|^2 &= m_1(|c_1|^2 - |c_s|^2) + m_2(|c_2|^2 - |c_s|^2) \\&= m_1(c_1 - c_s) \bullet (c_1 + c_s) + m_2(c_2 - c_s) \bullet (c_2 + c_s) \\&= \frac{m_1 m_2}{m_s}(c_1 - c_2) \bullet (c_1 + c_s) - \frac{m_1 m_2}{m_s}(c_1 - c_2) \bullet (c_2 + c_s) \\&= \frac{m_1 m_2}{m_s}|c_1 - c_2|^2,\end{aligned}$$

und genauso mit Hilfe von (V2.7)

$$m_1|c'_1|^2 + m_2|c'_2|^2 - m_s|c_s|^2 = \frac{m_1 m_2}{m_s}|c'_1 - c'_2|^2,$$

und daher ist nach der Energiebilanz

$$|\mathbf{k}'| = |c'_1 - c'_2| = |c_1 - c_2|.$$

Aus der Impulserhaltung folgt mit $m_s c_s = m_1 c_1 + m_2 c_2$

$$\begin{aligned}m_s c_s &= m_1 c'_1 + m_2 c'_2 \\&= (m_1 + m_2) \frac{c'_1 + c'_2}{2} + (m_1 - m_2) \frac{c'_1 - c'_2}{2} \\&= m_s \frac{c'_1 + c'_2}{2} + (m_1 - m_2) \frac{\mathbf{k}'}{2},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{c'_1 + c'_2}{2} &= c_s - \frac{m_1 - m_2}{m_s} \frac{\mathbf{k}'}{2}, \\ \frac{c'_1 - c'_2}{2} &= \frac{\mathbf{k}'}{2},\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}c'_1 &= c_s + \frac{m_2}{m_s} \mathbf{k}', & c_s &= \frac{m_1}{m_s} c_1 + \frac{m_2}{m_s} c_2, & m_s &= m_1 + m_2, \\ c'_2 &= c_s - \frac{m_1}{m_s} \mathbf{k}', & \mathbf{k}' &\in \mathbb{R}^n \text{ mit } |\mathbf{k}'| = |c_1 - c_2|,\end{aligned}$$

was identisch mit der Behauptung ist. Wir führen noch die Probe aus. Nehmen wir diese Formeln an, so folgt daraus die Impulserhaltung

$$\begin{aligned} m_1 c'_1 + m_2 c'_2 &= m_1 c_s + \frac{m_1 m_2}{m_s} \mathbf{k}' + m_2 c_s - \frac{m_2 m_1}{m_s} \mathbf{k}' \\ &= (m_1 + m_2) c_s = m_s c_s = m_1 c_1 + m_2 c_2, \end{aligned}$$

und die Energieerhaltung

$$\begin{aligned} m_1 |c'_1|^2 + m_2 |c'_2|^2 &= m_1 \left| c_s + \frac{m_2}{m_s} \mathbf{k}' \right|^2 + m_2 \left| c_s - \frac{m_1}{m_s} \mathbf{k}' \right|^2 \\ &= (m_1 + m_2) |c_s|^2 + \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{m_s^2} |\mathbf{k}'|^2 \\ &= m_s \left| \frac{m_1}{m_s} c_1 + \frac{m_2}{m_s} c_2 \right|^2 + \frac{m_1 m_2}{m_s} |c_2 - c_1|^2 \\ &= m_1 |c_1|^2 + m_2 |c_2|^2. \end{aligned}$$

Dies beendet die Probe. □

Wir beschränken uns hier auf eine Gleichung, d.h. eine Wahrscheinlichkeit f , und nehmen an, dass alle Massen m_i gleich sind. Sind dann $f(t, x, c_1)$ und $f(t, x, c_2)$ die Wahrscheinlichkeiten für Teilchen mit Geschwindigkeit c_1 und c_2 , so ist (bis auf einen positiven Faktor)

$$W(c_1 - c_2, c'_1 - c'_2)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Kollision zwei Geschwindigkeiten c'_1 und c'_2 vorhanden sind, dass heißt $f(t, x, c'_1)$ und $f(t, x, c'_2)$ zu betrachten sind, wobei wir 2.4 zu berücksichtigen haben, d.h. es tritt keine Reaktion auf und die Stöße verlaufen nach den Regeln der Thermodynamik. Wir haben also

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, x, c_1) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B_{|c_1 - c_2|}(0)} \left(f(t, x, c'_1) f(t, x, c'_2) \right. \\ &\quad \left. - f(t, x, c_1) f(t, x, c_2) \right) \cdot W(c_1 - c_2, \mathbf{k}') dH^{n-1}(\mathbf{k}') dc_2, \end{aligned} \quad (\text{V2.8})$$

wobei $c'_1 = c_s + \frac{\mathbf{k}'}{2}$, $c'_2 = c_s - \frac{\mathbf{k}'}{2}$, $c_s = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

Wenn wir zur Abkürzung schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}(t, x, c_1), \\ f_1 &= f(t, x, c_1), \quad f_2 = f(t, x, c_2), \\ f'_1 &= f(t, x, c'_1), \quad f'_2 = f(t, x, c'_2), \\ \mathbf{k} &= c_1 - c_2 \quad (\text{es ist } \mathbf{k}' = c'_1 - c'_2), \end{aligned}$$

schreibt sich dies als

$$\mathbf{r}_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B_{|c_1 - c_2|}(0)} (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \cdot W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \, dH^{n-1}(\mathbf{k}') \, dc_2.$$

Ist dann $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion und $\varphi_1 = \varphi(t, x, c_1)$, so gilt

$$\begin{aligned} \int \varphi_1 \mathbf{r}_1 \, dc_1 &= \int \varphi(t, x, c_1) \mathbf{r}(t, x, c_1) \, dc_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B_{|c_1 - c_2|}(0)} \varphi_1 (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \cdot W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \, dH^{n-1}(\mathbf{k}') \, dc_2 \, dc_1. \end{aligned}$$

Assume that

$$\left. \begin{aligned} W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= W(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \\ W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= W(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}') \end{aligned} \right\} \text{for } |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|. \quad (\text{V2.9})$$

From these symmetry properties one obtains

2.5 Theorem. Let the probabilities W satisfy (V2.9). Then we have the following symmetry properties:

(1) For any function $(c'_1, c'_2, c_1, c_2) \mapsto g(c'_1, c'_2, c_1, c_2)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B_{|c_1 - c_2|}(0)} g(c'_1, c'_2, c_1, c_2) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ & \qquad \qquad \qquad dH^{n-1}(\mathbf{k}') \, dc_2 \, dc_1 \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B_{|c_1 - c_2|}(0)} g(c_1, c_2, c'_1, c'_2) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ & \qquad \qquad \qquad dH^{n-1}(\mathbf{k}') \, dc_2 \, dc_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B_{|c_1 - c_2|}(0)} g(c'_2, c'_1, c_2, c_1) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ & \qquad \qquad \qquad dH^{n-1}(\mathbf{k}') \, dc_2 \, dc_1. \end{aligned}$$

(2) If the collision term \mathbf{r} satisfies (V2.8), then it follows for any test function φ that

$$\begin{aligned} & \int \varphi(t, x, c_1) \mathbf{r}(t, x, c_1) \, dc_1 \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\partial B_{|c_1 - c_2|}(0)} (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi'_1 - \varphi'_2) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ & \qquad \qquad \qquad dH^{n-1}(\mathbf{k}') \, dc_2 \, dc_1. \end{aligned}$$

Here $\varphi_1 = \varphi(t, x, c_1)$ and similar $\varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2$ like above.

Beweis (1). In the integrals there is

$$c'_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + \mathbf{k}'), \quad c'_2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - \mathbf{k}'),$$

which is due to the fact that

$$c'_1 + c'_2 = c_1 + c_2, \quad \mathbf{k}' = c'_1 - c'_2, \quad \mathbf{k} := c_1 - c_2,$$

therefore

$$c_1 = \frac{1}{2}(c'_1 + c'_2 + \mathbf{k}), \quad c_2 = \frac{1}{2}(c'_1 + c'_2 - \mathbf{k}).$$

Thus the two variables

$$s = \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \quad k = c_1 - c_2,$$

satisfy

$$dc_2 dc_1 = dk ds$$

and with $r = |c_1 - c_2| = |c'_1 - c'_2|$

$$dk = dH^{n-1}(\mathbf{k}) \llcorner \partial B_r(0) dr,$$

so that

$$\begin{aligned} & dH^{n-1}(\mathbf{k}') \llcorner \partial B_{|c_1 - c_2|}(0) dc_2 dc_1 \\ &= dH^{n-1}(\mathbf{k}') \llcorner \partial B_r(0) dH^{n-1}(\mathbf{k}) \llcorner \partial B_r(0) dr ds, \end{aligned}$$

which shows that the measure is symmetric in (c_1, c_2) and (c'_1, c'_2) and also in (c_1, c_2) and (c_2, c_1) . \square

Beweis (2). This follows from (1). \square

2.6 Property. If the collision term \mathbf{r} satisfies (V2.8) with (V2.9) then

$$\int \varphi(t, x, c) \mathbf{r}(t, x, c) dc = 0$$

for the so-called *summational invariants*

$$\varphi(t, x, c) = 1, \quad \varphi(t, x, c) = c, \quad \varphi(t, x, c) = \frac{|c|^2}{2}.$$

Beweis. This follows from 2.5(2) since $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi'_1 + \varphi'_2$ for the summational invariants follows from the fact that the collisions satisfy conservation of mass, momentum, and kinetic energy. \square

3 Die Chapman-Enskog Hierarchie

Wir gehen aus von der Boltzmann Gleichung (V2.1), was eine Differentialgleichung für eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$(t, x, c) \mapsto f(t, x, c)$$

darstellt. Wir definieren zu dieser Größe die höheren Momente.

3.1 Höhere Momente. Für $k_1, \dots, k_M \in \{0, \dots, n\}$ ist

$$F_{k_1, \dots, k_M}(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} m c_{k_1} \dots c_{k_M} f(t, x, c) dc$$

wobei m die Partikelmasse ist und $\underline{c} := (1, c)$, also

$$\underline{c} = (c_0, c) = (c_0, c_1, \dots, c_n), \quad c_0 := 1.$$

Bemerkung: Diese Definition kann für verschiedene Indices die gleiche Funktion ergeben, z.B. ist $F_{k_0} = F_k$.

Wenn man nun annimmt, dass f die Boltzmann Gleichung (V2.1) erfüllt und für $|c| \rightarrow \infty$ stark genug abfällt, ist für diese höheren Momente folgende Differentialgleichung in den Variablen (t, x) erfüllt:

Gleichung für die höheren Momente:

Für $i_1, \dots, i_N \in \{0, \dots, n\}$ gilt

$$\partial_t F_{i_1, \dots, i_N} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_{i_1, \dots, i_N i} = R_{i_1, \dots, i_N} + G_{i_1, \dots, i_N}$$

F_{k_1, \dots, k_M} wie in 3.1 gegeben und

$$R_{i_1, \dots, i_N}(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} m c_{i_1} \dots c_{i_N} \mathbf{r}(t, x, c) dc$$

$$G_{i_1, \dots, i_N}(t, x) := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_i(t, x, c) \partial_{c_i} (c_{i_1} \dots c_{i_N}) f(t, x, c) dc$$

(V3.1)

We prove this with the help of a general test function $(t, x, c) \mapsto \varphi(t, x, c)$ and integrating the Boltzmann equation over the velocity $c \in \mathbb{R}^n$.

3.2 Theorem. For all functions $(t, x, c) \mapsto \varphi(t, x, c)$ it follows from (V2.1) that

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\int \varphi f dc \right) + \sum_i \partial_{x_i} \left(\int c_i \varphi f dc \right) \\ &= \int \varphi \mathbf{r} dc + \int \left(\partial_t \varphi + \sum_i c_i \partial_{x_i} \varphi + \sum_i \mathbf{g}_i \partial_{c_i} \varphi \right) f dc, \end{aligned}$$

provided all c -integrals exist.

Beweis. The only nontrivial term is

$$\int \varphi \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i \partial_{c_i} f \, dc = - \int \sum_{i=1}^n \partial_{c_i} (\varphi \mathbf{g}_i) f \, dc = - \sum_i \int \mathbf{g}_i \partial_{c_i} \varphi \cdot f \, dc,$$

since $\operatorname{div}_c \mathbf{g} = 0$. □

We take the test function

$$\varphi(t, x, c) = m c_{i_1} \cdots c_{i_N}.$$

Then 3.2 gives the equation (V3.1) with

$$R_{i_1, \dots, i_N} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \mathbf{r} \, dc = \int_{\mathbb{R}^n} m c_{i_1} \cdots c_{i_N} \mathbf{r}(t, x, c) \, dc$$

and, since φ does not depend on t and x ,

$$\begin{aligned} G_{i_1, \dots, i_N} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_t \varphi + \sum_i c_i \partial_{x_i} \varphi + \sum_i \mathbf{g}_i \partial_{c_i} \varphi \right) f \, dc \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \mathbf{g}_i (\partial_{c_i} \varphi) f \, dc = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_i(t, x, c) \partial_{c_i} (c_{i_1} \cdots c_{i_N}) f(t, x, c) \, dc. \end{aligned}$$

If \mathbf{g} depends linearly on c (this means affine linear) then this integral is a linear combination of the functions F_{j_1, \dots, j_N} plus an absolute term. Such a form of \mathbf{g} is related to the general rule (V2.4), see also 3.5.

Referenzen: Siehe [Wikipedia: Chapman-Enskog theory] und Chapman & Cowling [81] (aus historischen Gründen siehe das Vorwort von C. Cercignani in der Ausgabe von 1990).

Wir sehen, dass die ersten Momente gerade die Erhaltungsgleichung für Masse, Impuls und Energie ergeben. Wir nehmen dafür die 0-te und die 1-ten Momente und bilden die Spur der 2-ten Momente. Die Variablen unter der Zeitableitung nennen wir ϱ , ϱv und $2e$.

3.3 Klassische Momente. Wir definieren (es wird angenommen, dass ϱ

positiv ist)

$$\begin{aligned}\varrho &:= \int_{\mathbb{R}^n} m f \, dc = F_0, \\ \varrho v &:= \int_{\mathbb{R}^n} m f c \, dc = (F_i)_{i=1, \dots, n}, \\ \Pi &:= \int_{\mathbb{R}^n} m f (c - v)(c - v)^T \, dc, \\ e &= \varepsilon + \frac{\varrho}{2} |v|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_{ii} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{m}{2} |c|^2 f \, dc, \\ \varepsilon &:= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{m}{2} |c - v|^2 f \, dc, \\ q &:= \int_{\mathbb{R}^n} m f |c - v|^2 (c - v) \, dc, \\ \mathbf{f} &:= \int_{\mathbb{R}^n} m f \mathbf{g} \, dc.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathbf{f}, \\ \partial_t e + \operatorname{div}(e v + \Pi^T v + q) &= g + v \bullet \mathbf{f},\end{aligned}\tag{V3.2}$$

wobei Π symmetrisch ist und

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Pi_{kk} \quad \text{und} \quad g = \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g} \bullet (c - v) f \, dc\tag{V3.3}$$

objektive Skalare sind. Hier wurde die spezielle Gestalt des Kollisionsterms aus (V2.8) (siehe 2.6) benutzt, d.h. dieser Kollisionsterm gibt keinen Beitrag zur Masse, zum Impuls und zur Energie.

Wir bemerken, dass die Gleichungen in (V3.2) mit denen in Abschnitt III.2 übereinstimmen, obgleich sie speziell sind wegen des Druckes in (V3.3).

Beweis. The collision part is zero for the required equations. The reason is that a single collision respects conservation of mass, momentum, and energy. This results in the equations 2.6

$$R_0 = 0, \quad R_i = 0 \text{ for } i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n R_{ii} = 0.$$

Therefore it follows from (V3.1) that

$$\partial_t F_0 + \sum_i \partial_{x_i} F_i = R_0 + G_0 = 0,$$

since $F_{0i} = F_i$, which is the mass conservation. In the following we shall use that the definition of v implies

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(c - v) \, dc = 0.\tag{V3.4}$$

Now we get from (V3.1) for $k = 1, \dots, n$

$$\partial_t F_k + \sum_i \partial_{x_i} F_{k i} = R_k + G_k = G_k.$$

It is $F_k = \varrho v_k$ and for $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} F_{k i} &= \int_{\mathbb{R}^n} m f c_k c_i \, dc \\ &= v_k v_i \int_{\mathbb{R}^n} m f \, dc + \int_{\mathbb{R}^n} m f (c_k c_i - v_k v_i) \, dc \\ &= \varrho v_k v_i + \int_{\mathbb{R}^n} m f (c - v)_k v_i \, dc + \int_{\mathbb{R}^n} m f v_k (c - v)_i \, dc \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} m f (c - v)_k (c - v)_i \, dc \\ &= \varrho v_k v_i + \Pi_{k i}, \end{aligned}$$

where we have used (V3.4). And from (V3.1)

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_i \partial_{c_i} c_k f \, dc \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_i \delta_{i,k} f \, dc = \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_k f \, dc = \mathbf{f}_k. \end{aligned}$$

Thus the momentum balance is shown. For the energy we obtain from (V3.1) by taking the sum of the equation for F_{kk} for $k = 1, \dots, n$

$$\partial_t \left(\sum_k F_{kk} \right) + \sum_i \partial_{x_i} \left(\sum_k F_{k k i} \right) = \sum_k (R_{kk} + G_{kk}) = \sum_k G_{kk}.$$

We have to compute the single terms. It is

$$\begin{aligned} 2e &:= \sum_k F_{kk} = \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} m c_k c_k f \, dc \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} m |c|^2 f \, dc = \int_{\mathbb{R}^n} m (|c - v|^2 + 2(c - v) \bullet v + |v|^2) f \, dc \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} m |c - v|^2 f \, dc + 2v \bullet \int_{\mathbb{R}^n} m f (c - v) \, dc + |v|^2 \int_{\mathbb{R}^n} m f \, dc \\ &= 2\varepsilon + \varrho |v|^2, \end{aligned}$$

where we have used (V3.4). This clarifies the energy. Next we consider the energy flux

$$\begin{aligned} \sum_k F_{k k i} &= \int_{\mathbb{R}^n} m f |c|^2 c_i \, dc \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} m f |c|^2 \, dc v_i + \int_{\mathbb{R}^n} m f |c|^2 (c - v)_i \, dc \\ &= 2e v_i + \int_{\mathbb{R}^n} m f |c|^2 (c - v)_i \, dc. \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} |c|^2(c-v)_i &= |v|^2(c-v)_i + (|c|^2 - |v|^2)(c-v)_i \\ &= |v|^2(c-v)_i + 2(v \bullet (c-v))(c-v)_i + |c-v|^2(c-v)_i. \end{aligned}$$

Integrating over c the first term vanishes by (V3.4), and therefore

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} m f |c|^2 (c-v)_i \, dc \\ &= 2 \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} m f (c-v)_k (c-v)_i \, dc v_k + \int_{\mathbb{R}^n} m f |c-v|^2 (c-v)_i \, dc \\ &= 2 \sum_k \Pi_{ki} v_k + \int_{\mathbb{R}^n} m f |c-v|^2 (c-v)_i \, dc, \end{aligned}$$

therefore

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kki} &= 2e v_i + 2 \sum_k \Pi_{ki} v_k + \int_{\mathbb{R}^n} m f |c-v|^2 (c-v)_i \, dc \\ &= 2e v_i + 2(\Pi^T v)_i + q_i. \end{aligned}$$

This gives the terms of the formula in the assertion. What is left is the energy production

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n G_{kk} &= \sum_{k,i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_i \partial_{c_i} (c_k c_k) f \, dc \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_k c_k f \, dc = 2 \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g} \bullet c f \, dc \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g} \bullet (c-v) f \, dc + 2 \mathbf{f} \bullet v = 2g + 2 \mathbf{f} \bullet v, \end{aligned}$$

if

$$g := \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g} \bullet (c-v) f \, dc.$$

If we are an observer for which \mathbf{g} is independent of c , then g vanishes. In general, g is an objective scalar. We show this by using the transformation rule (V2.4) for an acceleration

$$\mathbf{g}(t, x, c) = \ddot{X}(t^*, x^*) + 2\dot{Q}(t^*)c^* + Q(t^*)\mathbf{g}^*(t^*, x^*, c^*). \quad (\text{V3.5})$$

We obtain (not writing the arguments), since $c-v = Q(c^* - v^*)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \bullet (c-v) &= Q(t^*)^T (\ddot{X}(t^*, x^*) + 2\dot{Q}(t^*)v^*) \bullet (c^* - v^*) \\ &\quad + 2(c^* - v^*) \bullet \dot{Q}(t^*)^T Q(t^*) (c^* - v^*) + (Q(t^*)\mathbf{g}^*) \bullet Q(t^*) (c^* - v^*). \end{aligned}$$

The first term vanishes after integration since $Q(t^*)^T (\ddot{X}(t^*, x^*) + 2\dot{Q}(t^*)v^*)$ is independent of c^* , and the second term vanishes since $\dot{Q}(t^*)^T Q(t^*)$ is antisymmetric. Hence

$$\int \mathbf{g} \bullet (c-v) f \, dc = \int \mathbf{g}^* \bullet (c^* - v^*) f^* \, dc^*.$$

□

Dieses Resultat verstärkt uns in der Annahme, dass die Gleichungen höherer Ordnung, die ja auch eine gewisse Realität widerspiegeln, von Nutzen in den Anwendungen sind, auf jeden Fall, wenn es sich um Gase handelt.

Transformationsverhalten

Wir lernen jetzt noch eine effiziente Methode kennen, um die Transformationsregel für Gleichungen höherer Momente zu beschreiben. Dies ist wichtig, da wir diese Gleichungen unabhängig von der Boltzmann Gleichung nehmen wollen zur Beschreibung verschiedener Materialien. Indem wir die Koordinaten $y = (t, x)$ nennen, schreibt sich die Differentialgleichung in (V3.1) auch als

$$\sum_{k=0}^n \partial_{y_k} F_{i_1, \dots, i_N k} = R_{i_1, \dots, i_N} + G_{i_1, \dots, i_N}. \tag{V3.6}$$

Wir nehmen diese Gleichungen nun für alle $i_1, \dots, i_N \in \{0, 1, \dots, n\}$ als gegeben an. Sie enthalten dann alle Differentialgleichungen für Momente der Ordnung kleiner oder gleich N . Für diese Differentialgleichungen gilt die folgende Regel bei Beobachtertransformationen.

3.4 Transformationsregel. Es gilt für $k_1, \dots, k_M \in \{0, \dots, n\}$

$$F_{k_1, \dots, k_M} \circ Y = \sum_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_M=0}^n Y_{k_1 \bar{k}_1} \cdots Y_{k_M \bar{k}_M} F_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_M}^* \tag{V3.7}$$

Beachte: Die Indices laufen von 0 an.

Beweis. Es ergibt sich aus 3.1 die folgende Identität (V3.7) für

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = Y \left(\begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} T(t^*) \\ X(t^*, x^*) \end{bmatrix}, \quad DY = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix},$$

und mit dem Integrationswechsel $c = \dot{X}(t^*, x^*) + Q(t^*)c^*$, wenn wir dies schreiben als

$$\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix} = \underline{c} = DY c^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{X} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{X} + Qc^* \end{bmatrix}.$$

Also ist wegen $f(t, x, c) = f^*(t^*, x^*, c^*)$

$$\begin{aligned}
 F_{k_1, \dots, k_N}(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} m c_{k_1} \dots c_{k_N} f(t, x, c) \, dc \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} m c_{k_1} \dots c_{k_N} f^*(t^*, x^*, c^*) \, dc^* \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} m \left(\sum_{\bar{k}_1=0}^n Y_{k_1 \bar{k}_1} c_{\bar{k}_1}^* \right) \dots \left(\sum_{\bar{k}_N=0}^n Y_{k_N \bar{k}_N} c_{\bar{k}_N}^* \right) f^* \, dc^* \\
 &= \sum_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_N=0}^n Y_{k_1 \bar{k}_1} \dots Y_{k_N \bar{k}_N} \int_{\mathbb{R}^n} m c_{\bar{k}_1}^* \dots c_{\bar{k}_N}^* f^* \, dc^* \\
 &= \sum_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_N=0}^n Y_{k_1 \bar{k}_1} \dots Y_{k_N \bar{k}_N} F_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_N}^* .
 \end{aligned} \tag{V3.8}$$

□

In den einzelnen Termen ausgeschrieben kann diese Transformationsregel sehr kompliziert aussehen, deshalb ist die allgemeine Beschreibung dieser Regel die am leichtesten merkbare. Außerdem steht diese Transformationsregel im Zusammenhang mit der generellen Formel (I5.3) in dieser Vorlesung.

3.5 Bemerkung. Die physikalischen Eigenschaften der Größen in (V3.1) sind dadurch gegeben, dass in der schwachen Version von (V3.1) die Testfunktionen

$$\zeta_{i_1 \dots i_N} \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \text{ f\"ur } i_1, \dots, i_N \in \{0, 1, \dots, n\}$$

das Transformationsverhalten

$$\zeta_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* = \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^n Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y$$

für $\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N \in \{0, 1, \dots, n\}$ besitzen.

Beweis. Wir haben also das Transformationsverhalten $\zeta^* = Z^T \zeta \circ Y$, wobei

$$Z_{(i_1, \dots, i_N)(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N)} = Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N} .$$

Nach (I5.3) ist die Transformationsformel erfüllt, falls mit $F_{i_1 \dots i_N 0} := F_{i_1 \dots i_N}$ gilt

$$F_{i_1 \dots i_N k} \circ Y = \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \bar{k}=0}^n Z_{(i_1, \dots, i_N)(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N)} Y_{k \bar{k}} F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* \tag{V3.9}$$

und wenn mit $g_{i_1 \dots i_N} := R_{i_1 \dots i_N} + G_{i_1 \dots i_N}$

$$\begin{aligned}
 g_{i_1 \dots i_N} \circ Y &= \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \bar{k}=0}^n (Z_{(i_1, \dots, i_N)(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N)})_{, \bar{k}} F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* \\
 &\quad + \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N}^n Z_{(i_1, \dots, i_N)(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N)} g_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* .
 \end{aligned} \tag{V3.10}$$

Die Gleichung (V3.9) ist äquivalent zu (V3.7) für $M = N + 1$, was schon bewiesen wurde. Es bleibt also noch (V3.10) zu beweisen. Anstatt dessen beweisen wir die Aussage mit Hilfe von Testfunktionen. \square

Beweis (über Testfunktionen). Da $\operatorname{div}_c \mathbf{g} = 0$ können wir die Boltzmann Gleichung schreiben als Divergenzgleichung

$$\partial_t f + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (c_i f) + \sum_{i=1}^n \partial_{c_i} (\mathbf{g}_i f) = \mathbf{r}.$$

Mit $y = (t, x)$ und $c = (1, c)$ kann das auch geschrieben werden als

$$\sum_{k=0}^n \partial_{y_k} (c_k f) + \sum_{i=1}^n \partial_{c_i} (\mathbf{g}_i f) = \mathbf{r}.$$

Wir können dies natürlich auch mit Testfunktionen $(y, c) \mapsto \varphi(y, c)$ (sie brauchen in c keinen kompakten Träger zu haben) schreiben als

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^n \partial_{y_k} \varphi \cdot c_k f + \sum_{i=1}^n \partial_{c_i} \varphi \cdot \mathbf{g}_i f + \varphi \cdot \mathbf{r} \right) dc dy = 0.$$

Wenn wir

$$\varphi(y, c) = \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^n \zeta_{i_1 \dots i_N}(y) m c_{i_1} \cdots c_{i_N}$$

setzen, wird das obige Integral zu

$$0 = \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n \partial_{y_k} \zeta_{i_1 \dots i_N} F_{i_1 \dots i_N k} + \zeta_{i_1 \dots i_N} (G_{i_1 \dots i_N} + R_{i_1 \dots i_N}) \right) dy.$$

Wähle nun ζ^* und ζ gemäß der Formulierung im Satz. Da dann

$$\begin{aligned} \partial_{y_k^*} \zeta_{i_1 \dots i_N}^* &= \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^n \left(\sum_{k=0}^n (\partial_{y_k} \zeta_{i_1 \dots i_N}) \circ Y \cdot Y_{i_1}{}_{i_1} \cdots Y_{i_N}{}_{i_N} Y_k{}_{i_k} \right. \\ &\quad \left. + \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot \partial_{y_k^*} (Y_{i_1}{}_{i_1} \cdots Y_{i_N}{}_{i_N}) \right) \end{aligned}$$

wird das *-Integral zu

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \bar{k}=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \partial_{y_k^*} \zeta_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* dy^* \\
 &\quad + \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* (G_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* + R_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^*) dy^* \\
 &= \sum_{\substack{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \bar{k}, \\ i_1, \dots, i_N, k \\ = 0}}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\partial_{y_k} \zeta_{i_1 \dots i_N}) \circ Y \cdot Y_{i_1 \prime \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \prime \bar{i}_N} Y_{k \prime \bar{k}} F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* dy^* \\
 &\quad + \sum_{\substack{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \bar{k} \\ i_1, \dots, i_N = 0}}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot \partial_{y_k^*} (Y_{i_1 \prime \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \prime \bar{i}_N}) F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* dy^* \\
 &\quad + \sum_{\substack{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \\ i_1, \dots, i_N = 0}}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot Y_{i_1 \prime \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \prime \bar{i}_N} (G_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* + R_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^*) dy^* .
 \end{aligned}$$

For the first term we use

$$\sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \bar{k}=0}^n Y_{i_1 \prime \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \prime \bar{i}_N} Y_{k \prime \bar{k}} F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* = F_{i_1 \dots i_N k} \circ Y ,$$

which is (V3.7) (this has been proved above), and we see that it equals to the integral

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i_1, \dots, i_N, k=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\partial_{y_k} \zeta_{i_1 \dots i_N}) \circ Y \cdot F_{i_1 \dots i_N k} \circ Y dy^* \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_N, k=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \partial_{y_k} \zeta_{i_1 \dots i_N} F_{i_1 \dots i_N k} dy .
 \end{aligned}$$

The last term is

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \\ i_1, \dots, i_N = 0}}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot Y_{i_1 \prime \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \prime \bar{i}_N} R_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* dy^* \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot R_{i_1 \dots i_N} \circ Y dy^* \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} R_{i_1 \dots i_N} dy ,
 \end{aligned}$$

since

$$Y_{i_1 \prime \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \prime \bar{i}_N} R_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* = R_{i_1 \dots i_N} \circ Y ,$$

which follows immediately from the definition of $R_{i_1 \dots i_N}$. Thus we have to show that

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N, \bar{k}=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot \partial_{y_k^*} (Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N}) F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* dy^* \\ & + \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N=0}^n \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N} G_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* dy^* \\ & = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_{i_1 \dots i_N} \circ Y \cdot G_{i_1 \dots i_N} \circ Y dy^*, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N=0}^n \left(\sum_{\bar{k}=0}^n \partial_{y_k^*} (Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N}) F_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N \bar{k}}^* \right. \\ & \left. + Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N} G_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_N}^* \right) = G_{i_1 \dots i_N} \circ Y, \end{aligned}$$

and this is really what we have to show. Now, considering the c -integrals which give these quantities we see that it is enough to show

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n \partial_{c_k} (\mathcal{L}_{i_1} \dots \mathcal{L}_{i_N}) \mathbf{g}_k \right) \circ Y_B \\ & = \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_N=0}^n \left(\sum_{\bar{k}=0}^n \partial_{y_k^*} (Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N}) c_{\bar{i}_1}^* \dots c_{\bar{i}_N}^* c_{\bar{k}}^{*'} \right. \\ & \left. + \sum_{\bar{k}=1}^n Y_{i_1 \bar{i}_1} \dots Y_{i_N \bar{i}_N} \partial_{c_k^*} (c_{\bar{i}_1}^* \dots c_{\bar{i}_N}^*) \mathbf{g}_{\bar{k}}^* \right). \end{aligned}$$

This is satisfied, if for $m = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n \partial_{c_k} \mathcal{L}_{i_m} \cdot \mathbf{g}_k \right) \circ Y_B \\ & = \sum_{\bar{i}_m=0}^n \left(\sum_{\bar{k}=0}^n \partial_{y_k^*} Y_{i_m \bar{i}_m} \cdot c_{\bar{i}_m}^{*'} c_{\bar{k}}^{*'} + \sum_{\bar{k}=1}^n Y_{i_m \bar{i}_m} \partial_{c_k^*} c_{\bar{i}_m}^* \cdot \mathbf{g}_{\bar{k}}^* \right). \end{aligned}$$

This is true, if for $i_m \geq 1$

$$\mathbf{g}_{i_m} \circ Y_B = \ddot{X}_{i_m} + 2 \sum_{\bar{k}=1}^n \dot{Q}_{i_m \bar{k}} c_{\bar{k}}^* + \sum_{\bar{k}=1}^n Q_{i_m \bar{k}} \mathbf{g}_{\bar{k}}^*,$$

which is equivalent to the equation (V2.4). \square

Wir sehen, dass die Objektivität von Gleichungen, welche aus den Boltzmann Gleichungen abgeleitet werden, stark mit der Transformationsformel zusammenhängt, die an \mathbf{g} in Analogon zur Kraft gestellt wurde. Insofern ist diese Transformationsformel für \mathbf{g} eindeutig bestimmt.

4 Grad's 13-Momente Gleichung

Wir betrachten in diesem Abschnitt das System aus 13-Momenten von Grad. Es leitet sich aus der Chapman-Enskog Hierarchie her, und zwar aus der 0-ten, den 1-ten und 2-ten Momenten, sowie aus einer Spur der 3-ten Momente. Zusammen sind dies bei einer Symmetrie der 2-ten Momente

$$1 + 3 + 6 + 3 = 13 \text{ Gleichungen (bei } n = 3).$$

Wir werden dieses Differentialgleichungssystem aufstellen, und dann im nächsten Abschnitt als unabhängiges System betrachten und das Entropieprinzip für eine geeignete Entropie betrachten.

Referenzen: Wir verweisen auf den Originalartikel von Grad [108]. Desweiteren sei auf die Bücher von Müller [88] und Jou & Casas-Vázquez & Lebon [82] hingewiesen, die im Zusammenhang der "Extended Thermodynamics" erschienen sind.

Die Boltzmann Gleichung war ein Erhaltungssatz für die Wahrscheinlichkeit $(t, x, c) \mapsto f(t, x, c)$ von Partikeln mit einer Geschwindigkeit c . Daraus haben wir in 3.3 die folgenden Gleichungen für die höheren Momente

$$F_{k_1, \dots, k_M}(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} m c'_{k_1} \cdots c'_{k_M} f(t, x, c) dc$$

für $k_1, \dots, k_M \in \{0, \dots, n\}$

sukzessive in $N \geq 0$ hergeleitet:

$$\partial_t F_{k_1, \dots, k_N} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_{k_1, \dots, k_N i} = \mathbf{f}_{k_1, \dots, k_N}$$

für $k_1, \dots, k_N \in \{0, \dots, n\}$.

(V4.1)

Hierbei ist

$$\mathbf{f}_{k_1, \dots, k_N} = R_{i_1, \dots, i_N} + G_{i_1, \dots, i_N},$$

$$R_{i_1, \dots, i_N} := \int_{\mathbb{R}^n} m c'_{i_1} \cdots c'_{i_N} \mathbf{r}(t, x, c) dc,$$

$$G_{i_1, \dots, i_N} := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} m \mathbf{g}_i(t, x, c) \partial_{c_i} (c'_{i_1} \cdots c'_{i_N}) f(t, x, c) dc,$$
(V4.2)

wobei \mathbf{g} die externe Beschleunigung und \mathbf{r} der Kollisionsteil der Boltzmann Gleichung ist. (Beide Funktionen, \mathbf{g} und \mathbf{r} , hängen von c wesentlich ab!) Es sei nochmal bemerkt, dass die Gleichungen (V4.1) für N die Gleichungen für $N - 1$ und kleinere Ordnungen enthalten, da k_1, \dots, k_N von 0 an laufen und da wegen $c'_0 = 1$ gilt

$$F_{k_1, \dots, k_{i-1} 0 k_i, \dots, k_M} = F_{k_1, \dots, k_M}.$$

Mit dieser Identität ist auch zu verstehen, dass in (V4.1) die Gleichungen niedrigerer Momente dabei auch mehrfach auftreten können.

Von den unendlich vielen Gleichungen in (V4.1) betrachten wir in Grad's Theorie nur die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \partial_t F_0 + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i &= \mathbf{f}_0, \\
 \partial_t F_k + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_{ki} &= \mathbf{f}_k \text{ für } k = 1, \dots, n, \\
 \partial_t F_{kl} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_{kli} &= \mathbf{f}_{kl} \text{ für } k, l = 1, \dots, n, \\
 \partial_t F_{klm} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_{klmi} &= \mathbf{f}_{klm} \text{ für } k, l, m = 1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{V4.3}$$

Hier wird von der letzten Gleichungserie nur eine Gleichung benötigt, wir bleiben zunächst aber bei den Gleichungen (V4.3). Wie in 3.3 definieren wir

$$\begin{aligned}
 \varrho &:= \int_{\mathbb{R}^n} m f \, dc = F_0 > 0, \\
 \varrho v &:= \int_{\mathbb{R}^n} m f c \, dc = (F_i)_{i=1, \dots, n},
 \end{aligned}$$

und dazu die objektiven Tensoren (siehe dazu 3.4)

$$\begin{aligned}
 F_{k_1, \dots, k_M}^0(t, x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_{k_1} \dots (c - v)_{k_M} f(t, x, c) \, dc \\
 &\text{für } k_1, \dots, k_M = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir folgende Darstellung für die Größen F_{k_1, \dots, k_M} : Die Differenz $F_{k_1, \dots, k_M} - F_{k_1, \dots, k_M}^0$ lässt sich als Linearkombination von Termen schreiben, die zu einer geringeren Ordnung gehören. Mit obiger Definition von ϱ und v gilt das folgende

4.1 Lemma. Definiere $F_{k_1, \dots, k_M}^1 := F_{k_1, \dots, k_M} - F_{k_1, \dots, k_M}^0$, also

$$F_{k_1, \dots, k_M} = F_{k_1, \dots, k_M}^1 + F_{k_1, \dots, k_M}^0.$$

Dann gilt für $k, l, m = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 F_k^1 &= \varrho v_k, \quad F_k^0 = 0, \\
 F_{kl}^1 &= \varrho v_k v_l, \quad F_{kl}^0 \text{ ist der Drucktensor,} \\
 F_{klm}^1 &= \varrho v_k v_l v_m + (F_{kl}^0 v_m + F_{lm}^0 v_k + F_{km}^0 v_l) \\
 F_{klmi}^1 &= \varrho v_k v_l v_m v_i + \\
 &+ (F_{kl}^0 v_m v_i + F_{lm}^0 v_k v_i + F_{km}^0 v_l v_i + F_{mi}^0 v_k v_l + F_{li}^0 v_k v_m + F_{ki}^0 v_l v_m) \\
 &+ (F_{klm}^0 v_i + F_{lmi}^0 v_k + F_{kmi}^0 v_l + F_{kli}^0 v_m).
 \end{aligned}$$

Es sind also die Funktionen mit oberem Index 1 Polynome in v mit objektiven Koeffizientenfunktionen und diese sind die Funktionen mit oberem Index 0.

Beweis. Die Darstellung von F_k ergibt sich aus obiger Definition. Zur Darstellung von F_{kl} gilt für $c \in \mathbb{R}^n$

$$c_k c_l = v_k v_l + v_k (c - v)_l + (c - v)_k v_l + (c - v)_k (c - v)_l,$$

also ergibt Integration über c

$$\begin{aligned} F_{kl} &= \int_{\mathbb{R}^n} m c_k c_l f \, dc \\ &= v_k v_l \int_{\mathbb{R}^n} m f \, dc + v_k \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_l f \, dc + v_l \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_k f \, dc \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_k (c - v)_l f \, dc \\ &= \varrho v_k v_l + \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_k (c - v)_l f \, dc \\ &= \varrho v_k v_l + F_{kl}^0. \end{aligned}$$

Für die Darstellung von F_{klm} bemerke, dass

$$\begin{aligned} c_k c_l c_m - c_k c_l v_m &= c_k c_l (c - v)_m \\ &= (v_k v_l + v_k (c - v)_l + (c - v)_k v_l + (c - v)_k (c - v)_l) (c - v)_m \\ &= v_k v_l (c - v)_m + v_k (c - v)_l (c - v)_m + v_l (c - v)_k (c - v)_m \\ &\quad + (c - v)_k (c - v)_l (c - v)_m, \end{aligned}$$

also ergibt die Integration über c ähnlich wie vorher

$$\begin{aligned} F_{klm} - F_{kl} v_m &= \int_{\mathbb{R}^n} m c_k c_l (c - v)_m f \, dc \\ &= v_k v_l \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_m f \, dc \\ &\quad + v_k \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_l (c - v)_m f \, dc + v_l \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_k (c - v)_m f \, dc \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} m (c - v)_k (c - v)_l (c - v)_m f \, dc \\ &= v_k F_{lm}^0 + v_l F_{km}^0 + F_{klm}^0 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} F_{klm}^1 &:= F_{klm} - F_{klm}^0 = F_{kl} v_m + F_{lm}^0 v_k + F_{km}^0 v_l \\ &= \varrho v_k v_l v_m + (F_{kl}^0 v_m + F_{lm}^0 v_k + F_{km}^0 v_l). \end{aligned}$$

Schließlich gilt für die Darstellung von F_{klmi} wegen

$$\begin{aligned} & c_k c_l c_m - (c-v)_k (c-v)_l (c-v)_m \\ &= v_k v_l v_m + v_k v_l (c-v)_m + v_k v_m (c-v)_l + v_l v_m (c-v)_k \\ &+ v_k (c-v)_l (c-v)_m + v_l (c-v)_k (c-v)_m + v_m (c-v)_k (c-v)_l \end{aligned}$$

die Identität

$$\begin{aligned} & c_k c_l c_m c_i - c_k c_l c_m v_i = c_k c_l c_m (c-v)_i \\ &= v_k v_l v_m (c-v)_i \\ &+ v_k v_l (c-v)_m (c-v)_i + v_k v_m (c-v)_l (c-v)_i + v_l v_m (c-v)_k (c-v)_i \\ &+ v_k (c-v)_l (c-v)_m (c-v)_i \\ &+ v_l (c-v)_k (c-v)_m (c-v)_i \\ &+ v_m (c-v)_k (c-v)_l (c-v)_i \\ &+ (c-v)_k (c-v)_l (c-v)_m (c-v)_i \end{aligned}$$

und daraus durch Integration (wobei das erste Integral wegfällt),

$$\begin{aligned} F_{klmi} - F_{klm} v_i &= \int_{\mathbb{R}^n} m c_k c_l c_m (c-v)_i f \, dc \\ &= v_k v_l F_{mi}^0 + v_k v_m F_{li}^0 + v_l v_m F_{ki}^0 + v_k F_{lmi}^0 + v_l F_{kmi}^0 + v_m F_{kli}^0 + F_{klmi}^0. \end{aligned}$$

Und damit ist

$$\begin{aligned} F_{klmi}^1 &:= F_{klmi} - F_{klmi}^0 \\ &= F_{klm} v_i + F_{mi}^0 v_k v_l + F_{li}^0 v_k v_m + F_{ki}^0 v_l v_m + F_{lmi}^0 v_k + F_{kmi}^0 v_l + F_{kli}^0 v_m \\ &= (\varrho v_k v_l v_m + F_{kl}^0 v_m + F_{lm}^0 v_k + F_{km}^0 v_l + F_{klm}^0) v_i \\ &+ F_{mi}^0 v_k v_l + F_{li}^0 v_k v_m + F_{ki}^0 v_l v_m + F_{lmi}^0 v_k + F_{kmi}^0 v_l + F_{kli}^0 v_m. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

Die Differentialgleichungen (V4.3) werden also mit 4.1 zu

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\varrho v_i) &= \mathbf{f}_0, \\ \partial_t (\varrho v_k) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\varrho v_k v_i + F_{ki}^0) &= \mathbf{f}_k, \\ \partial_t (\varrho v_k v_l + F_{kl}^0) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (F_{kli}^1 + F_{kli}^0) &= \mathbf{f}_{kl}, \\ \partial_t (F_{klm}^1 + F_{klm}^0) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (F_{klmi}^1 + F_{klmi}^0) &= \mathbf{f}_{klm} \end{aligned} \tag{V4.4}$$

für $k, l, m = 1, \dots, n$, wobei die Größen mit Index 1 in 4.1 definiert sind. Es besteht natürlich die Möglichkeit, die Differentialgleichungen auch als

Gleichungen für $\dot{\varrho}$, \dot{v} , \dot{F}_{kl}^0 , \dot{F}_{klm}^0 zu schreiben, siehe [108, (5.17)]. Hierbei ist $\dot{h} = \partial_t h + v \bullet \nabla h$.

Wir haben es also mit den “abgeschnittenen” Gleichungen der unendlichen Hierarchie in Abschnitt 3 zu tun. Dieses endliche Gleichungssystem ist unterbestimmt, da es keine konstitutiven Gleichungen gibt, z.B. für den objektiven 4-Tensor F_{klmi}^0 . Die Frage ist also, wie das System “abzuschließen” ist. Das reduzierte Gleichungssystem kommt dadurch zustande, dass die Spur

$$F_{klm}^0 = \frac{1}{n+2} (S_m \delta_{kl} + S_k \delta_{lm} + S_l \delta_{km})$$

mit einem Wärmefluss S betrachtet wird, siehe [108, Section 5]. Hierdurch wird das System auf 13 Gleichungen reduziert.

An Weiterem wird noch gearbeitet.

VI Lichtgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit des Lichtes wurde mit

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

gemessen (c celeritas (*lat*)), d.h. dies ist der Wert im “Vakuum”, d.h. ohne die Störung von irgendeiner Materie. Sie liegt also bei ca. 300000 Kilometer pro Sekunde. Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium ist kleiner. Das mag man sich mit der Partikelvorstellung am besten klarmachen. Photonen stoßen in einem Medium mit den vorhandenen Partikeln zusammen und werden so gebremst. Die Messergebnisse sagen, dass in bodennaher Luft die Lichtgeschwindigkeit ca. $299710 \frac{km}{s}$ beträgt, in Wasser ca. $225000 \frac{km}{s}$ und in Gläsern mit hoher optischer Dichte ca. $160000 \frac{km}{s}$.

[Wikipedia: Lichtgeschwindigkeit]: Seit 1983 wird das Meter über diejenige Entfernung definiert, die Licht im 299792458-ten Bruchteil einer Sekunde zurücklegt. Präzise Entfernungsmessungen werden heute direkt auf die Lichtgeschwindigkeit bezogen, z.B. bei Laserentfernungsmessern oder beim GPS (Global Positioning System).

Das Licht braucht also ca. 8 Minuten von der Sonne zur Erde, denn die Entfernung der Erde zur Sonne ist ca. 149,6 Millionen Kilometer, genauer zwischen 147,1 Mkm und 152,1 Mkm **[Wikipedia: Sonne]**. Bei einer Entfernung der Erde von durchschnittlich 149,6 Mkm von der Sonne ist die Geschwindigkeit der Erde (bei in Ruhe befindlicher Sonne) etwa

$$\frac{2\pi \cdot 149,6 \text{ Mkm}}{365,25 \text{ dies}} = \frac{2\pi \cdot 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}}{365,25 \cdot 86400 \text{ s}} = 29,79 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Das ergibt einmal eine Bewegung von einer weit entfernten Lichtquelle weg und nach einem halben Jahr auf diese Lichtquelle zu, also insgesamt 0,02% der Lichtgeschwindigkeit. In Abb. 1, siehe **[Wikipedia: Äther (Physik)]**, wurde dies in Verbindung mit einem “Äther” gebracht. Allerdings wurde experimentell immer dieselbe Lichtgeschwindigkeit gemessen, was ein Problem darstellte. In **[Wikipedia: Michelson-Morley-Experiment]** heißt es: “Diese Problematik konnte erst durch die Spezielle Relativitätstheorie gelöst werden, in der auf ein bevorzugtes Bezugssystem wie den Äther verzichtet wird.

Deswegen gilt es als eines der bedeutendsten Experimente in der Geschichte der Physik.” Dies hat das physikalische Weltbild grundlegend verändert. Tests der speziellen Relativitätstheorie werden bis heute durchgeführt. Sie waren für die Entwicklung und Akzeptanz der Theorie von entscheidender Bedeutung, wobei moderne Experimente in Übereinstimmung mit der Theorie sind. “Die Stärke der Theorie liegt vielmehr darin, dass sie die einzige ist,

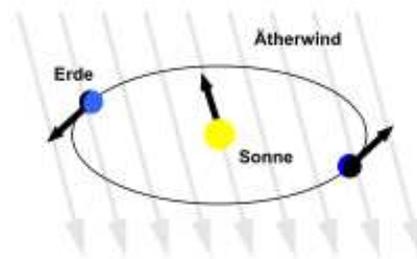


Abb. 1: “Wenn elektromagnetische Wellen an einen ruhenden Äther gebunden wären, müsste man die Eigenbewegung von Erde und Sonne als Ätherwind messen können” aus [Wikipedia: Michelson-Morley-Experiment].

die mehrere grundverschiedene Experimente widerspruchsfrei erklären kann. Mögliche Abweichungen, die im Gültigkeitsbereich der speziellen Relativitätstheorie liegen, können nur noch im experimentell schwer zugänglichen Bereich der Planck-Skala oder im Neutrino-Sektor liegen.” Soweit der Abschnitt aus [Wikipedia: Tests der speziellen Relativitätstheorie].

Die auf dem EINSTEINSCHEN Relativitätsprinzip (das wir kurz Relativitätsprinzip nennen werden) basierende Mechanik heißt *relativistische Mechanik*. In dem Grenzfall, in dem die Geschwindigkeiten der bewegten Körper klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, kann der Einfluß der endlichen Wirkungsgeschwindigkeit auf die Bewegung vernachlässigt werden. Dann geht die relativistische Mechanik in die gewöhnliche Mechanik über, die die Annahme einer sofortigen Wirkungsausbreitung enthält. Diese gewöhnliche Mechanik wird auch als NEWTONSCHE oder klassische Mechanik bezeichnet. Der Grenzübergang von der relativistischen zur klassischen Mechanik erfolgt formal dadurch, daß wir in den Formeln der ersteren $c \rightarrow \infty$ gehen lassen.

Abb. 2: Aus Landau & Lifschitz [84, II Seite 2]

Dass die Physik, in der mit endlicher Lichtgeschwindigkeit gearbeitet wird, anders ist als die klassische Physik, drückt sich darin aus, dass statt der Newton’schen Beobachtertransformationen nun allgemeinere Transformationen erforderlich sind. Dabei werden insbesondere Lorentz-Transformationen als lineare Transformationen benutzt. Dies hat Auswirkungen auf physikalische Gesetze, sie müssen objektiv sein und das hängt von den zugrundegelegten Transformationen ab. Nun enthalten die Lorentz-Transformationen die Zahl c , wobei man die klassische Physik erhält, wenn man den Limes $c \rightarrow \infty$

betrachtet. Nun ist es aber so, dass die Lorentz-Transformationen nicht die gesamte nichtklassische Physik repräsentieren können, sie generieren nur lineare Beobachtertransformationen (siehe [23, Section I.4]). Deswegen haben wir es mit allgemeineren Transformationen zu tun, und in der Tat werden die Erhaltungssätze in einer Form präsentiert, die invariant unter beliebigen Beobachtertransformationen sind.

1 Beobachtertransformationen

Wir bezeichnen die Koordinaten, die ein Beobachter in der *Raumzeit* \mathbb{R}^4 benutzt, mit $y \in \mathbb{R}^4$. Darüberhinaus hat jeder Beobachter \mathcal{B} eine Matrix $G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Sind \mathcal{B} und \mathcal{B}^* zwei Beobachter, dann ist die Beobachtertransformation $y = Y(y^*)$ definiert durch folgende Transformationsformel

$$G \circ Y = DY G^* (DY)^T, \quad (\text{VI.1.1})$$

was in Koordinaten geschrieben heißt

$$G_{\alpha\beta} \circ Y = \sum_{\gamma, \delta=0}^3 Y_{\alpha'\gamma} Y_{\beta'\delta} G_{\gamma\delta}^* \text{ für } \alpha, \beta = 0, 1, \dots, 3.$$

Die Matrizen G und G^* sind also die Matrizen für die beiden Beobachter \mathcal{B} und \mathcal{B}^* , und sie sind Bestandteil der physikalischen Gesetze, die die Beobachter aufstellen. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass sie symmetrisch sind. Und wie bisher nehmen wir an, dass die Determinante von Beobachtertransformationen gleich 1 ist.

Im Grunde liegt der Unterschied zur klassischen Physik darin, dass für relativistischen Beobachtertransformationen die Matrix G invertierbar ist wie die Standardmatrix

$$G_{\mathbf{c}} := \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mathbf{c}^2} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{c} > 0$ die wesentliche Konstante ist. Im Limes $\mathbf{c} \rightarrow \infty$ wir erhalten die klassische Matrix (siehe Aufgabe 6.1)

$$G_{\infty} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix}.$$

In Standardbeispielen wird im relativistischen Fall immer $G = G_{\mathbf{c}}$ gewählt, das heißt im Lorentzfall:

1.1 Lorentzfall. Beim *Lorentzfall* meinen wir einen Beobachter mit Matrix $G = G_{\mathbf{c}}$ und Variablen $y = (t, x) \in \mathbb{R}^4$, wobei t die Zeitvariable ist und wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$ die Raumvariablen sind. *Bemerkung:* Diese Definition betrifft nur einen einzigen Beobachter, es ist hier nicht von Beobachtertransformationen die Rede.

1.2 Notation. A contravariant m -tensor $T = (T_{k_1 \dots k_m})_{k_1, \dots, k_m}$ is defined by

$$T_{k_1 \dots k_m} \circ Y = \sum_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m \geq 0} Y_{k_1 \bar{k}_1} \cdots Y_{k_m \bar{k}_m} T_{\bar{k}_1 \dots \bar{k}_m}^*, \quad (\text{VI.1.2})$$

and the definition of a covariant m -tensor $T = (T_{k_1 \dots k_m})_{k_1, \dots, k_m}$

$$T_{\bar{k}_1 \dots \bar{k}_m}^* = \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 0} Y_{k_1 \bar{k}_1} \cdots Y_{k_m \bar{k}_m} T_{k_1 \dots k_m} \circ Y. \quad (\text{VI.1.3})$$

Here $y = Y(y^*)$ is the observer transformation.

A 4-vector \underline{q} is

$$\begin{aligned} \text{contravariant if} \quad & \underline{q} \circ Y = DY \underline{q}^*, \\ \text{covariant if} \quad & \underline{q}^* = DY^T \underline{q} \circ Y, \end{aligned}$$

and a 4-matrix \underline{M} is

$$\begin{aligned} \text{contravariant if} \quad & \underline{M} \circ Y = DY \underline{M}^* DY^T, \\ \text{covariant if} \quad & \underline{M}^* = DY^T \underline{M} \circ Y DY. \end{aligned}$$

Es ist G eine contravariante Matrix.

2 Maxwell Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen sind im Allgemeinen gegeben durch eine Erhaltungsgleichung, das Ampère'sche "Durchflutungsgesetz" (*en*: "Ampère's circuital law"). Sie wird durch eine konstitutive Annahme vervollständigt, für die das Faraday'sche "Induktionsgesetz" (*en*: "Faraday's law of induction") gilt. Dieser Abschnitt gliedert sich somit in

- "Ampère's circuital law": $\operatorname{div}_y \mathfrak{H} = \mathbf{j}$

In Lorentz frame:

$$\mathfrak{H} = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} \rho \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{j}_3 \end{bmatrix},$$

H magnetische Feldstärke, D elektrische Flussdichte, \mathbf{j} elektrische Stromdichte,

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div}_x D &= \rho, \\ -\partial_t D + \operatorname{rot}_x H &= \mathbf{j} \end{aligned}} \quad ^{1)}$$

- Consequence: $\operatorname{div}_y \mathbf{j} = 0$

- Electrical quantities: $\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{G} \mathfrak{E} \mathbf{G}^T - \mathfrak{P}$, $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

In Lorentz frame:

$$\mathfrak{E} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

E elektrische Feldstärke, B magnetische Flussdichte.

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E + P, \quad H = \frac{1}{\mu_0} B - M}$$

- "Faraday's law of induction": $\mathfrak{E}_{ik'l} + \mathfrak{E}_{kl'i} + \mathfrak{E}_{li'k} = 0$

In Lorentz frame:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div}_x B &= 0, \\ \partial_t B + \operatorname{rot}_x E &= 0 \end{aligned}}$$

Die eingerahmten Gleichungen sind die "Maxwell-Hertz'schen Gleichungen".

Referenzen: [\[Wikipedia: Maxwell-Gleichungen\]](#) und die englische Seite [\[Wikipedia: Maxwell's equations\]](#), sowie [\[Wikipedia: Electromagnetism\]](#), und [\[Wikipedia: Mathematical descriptions of the electromagnetic field\]](#).

¹We write "rot" instead of "curl"

Die Erhaltungsgleichung von Ampère ist das

Durchflutungsgesetz (en: Ampère's circuital law):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \mathfrak{H} &= \mathbf{j}, \\ \mathfrak{H}: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ schiefsymmetrisch,} \end{aligned} \quad (\text{VI2.1})$$

und die Testfunktionen ζ sind ein kovarianter Vektor:
 $\zeta^* = DY^T \zeta \circ Y$ mit der Beobachtertransformation Y

d.h. für Testfunktionen $y \mapsto \zeta(y) \in \mathbb{R}^4$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(\sum_{kl} \partial_l \zeta_k \cdot \mathfrak{H}_{kl} + \sum_k \zeta_k j_k \right) dL^4 = 0. \quad (\text{VI2.2})$$

Die Schiefsymmetrie von \mathfrak{H} hat folgende Konsequenz:

2.1 Lemma. Es folgt

$$\operatorname{div}_y \mathbf{j} = 0$$

und diese Gleichung ist eine skalare Gleichung, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^4} \sum_k \partial_{y_k} \eta \cdot j_k dL^4 = 0$$

für Testfunktionen η , welche sich gemäß $\eta^* = \eta \circ Y$ transformieren.

Beweis. Wir setzen $\zeta_k := \partial_k \eta$ mit einer skalaren Funktion η (aus $\eta^* = \eta \circ Y$ folgt dann die an ζ geforderte Transformation). Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^4} \left(\sum_{kl} \partial_l \zeta_k \cdot \mathfrak{H}_{kl} + \sum_k \zeta_k j_k \right) dL^4 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \left(\sum_{kl} \partial_{l_k} \eta \cdot \mathfrak{H}_{kl} + \sum_k \partial_k \eta \cdot j_k \right) dL^4. \end{aligned}$$

Da $(\mathfrak{H}_{kl})_{kl}$ eine schiefsymmetrische und $(\partial_{l_k} \eta)_{kl}$ eine symmetrische Matrix ist, verschwindet der erste Summand. Wir haben also

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(\sum_k \partial_k \eta \cdot j_k \right) dL^4 = 0,$$

die Behauptung. □

In (VI2.1) wurde eine Aussage über die physikalische Bedeutung gemacht, nämlich dass die Testfunktion sich wie ein kovarianter Vektor verhält. Es folgt nach (I5.8), dass dies erfüllt ist, wenn für alle Beobachtertransformationen Y gilt:

$$\mathfrak{H}_{kl} \circ Y = \sum_{\bar{k}, \bar{l} \geq 0} Y_{k' \bar{k}} Y_{l' \bar{l}} \mathfrak{H}_{\bar{k} \bar{l}}^*, \quad (\text{VI2.3})$$

$$\mathfrak{j}_k \circ Y = \sum_{p, q \geq 0} Y_{k' pq} \mathfrak{H}_{pq}^* + \sum_{l \geq 0} Y_{k' l} \mathfrak{j}_l^*,$$

und da $Y_{k' pq}$ symmetrisch in p und q ist, wohingegen \mathfrak{H}_{pq}^* in p und q antisymmetrisch ist, verschwindet dieser Term, also ist

$$\mathfrak{j}_k \circ Y = \sum_{l \geq 0} Y_{k' \bar{l}} \mathfrak{j}_l^*. \quad (\text{VI2.4})$$

Die Bedeutung von \mathfrak{H} und \mathfrak{j} wird klarer, wenn man die Gleichungen im Lorentzfall hinschreibt. Zur Definition des Lorentzfalls siehe 1.1.

2.2 Speziell. Betrachte den Lorentz Fall, siehe 1.1, also $y = (t, x)$. Die Antisymmetrie von \mathfrak{H} kann geschrieben werden als

$$\mathfrak{H} = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{j} = \begin{bmatrix} \rho \\ \mathfrak{j}_1 \\ \mathfrak{j}_2 \\ \mathfrak{j}_3 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Differentialgleichung in (VI2.1) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x D &= \rho, \\ -\partial_t D + \operatorname{rot}_x H &= \mathfrak{j} \end{aligned}$$

H magnetische Feldstärke,
 D elektrische Flussdichte,
 \mathfrak{j} elektrische Stromdichte
 ρ Ladungsdichte

(VI2.5)

(Diese Gleichungen werden in der Literatur, z.B. [84, §30], auch als die “zweite Gruppe der Maxwell-Gleichungen” bezeichnet, und in [49, Drittes Buch VII §1] als die “erste Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes”.)

Folgerung: Aus diesen Gleichungen folgt (siehe 2.1)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x \mathfrak{j} = 0.$$

(VI2.6)

Wir definieren noch für jeden 3-Vektor q

$$\mathcal{R}(q) := \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI2.7})$$

d.h. $\mathcal{R}(q)$ ist diejenige Matrix, die

$$\mathcal{R}(q)z = z \times q \text{ für alle } z \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{VI2.8})$$

und für eine Vektorfeld $q: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div}_x \mathcal{R}(q) = \operatorname{rot}_x q \quad (\text{VI2.9})$$

erfüllt. Man kann nun die generellen Transformationsformeln in (VI2.3) für \mathfrak{H} und \mathbf{j} umschreiben und erhält für den Lorentzfall die entsprechenden Transformationsregeln für D , H , $\boldsymbol{\rho}$ und \mathbf{j} , siehe dazu 3.1.

Beweis. Die Koordinaten sind $y = (t, x)$. Daher ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \mathfrak{H} &= \operatorname{div}_y \begin{bmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \partial_t \begin{bmatrix} 0 \\ -D_1 \\ -D_2 \\ -D_3 \end{bmatrix} + \partial_{x_1} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ -H_3 \\ H_2 \end{bmatrix} + \partial_{x_2} \begin{bmatrix} D_2 \\ H_3 \\ 0 \\ -H_1 \end{bmatrix} + \partial_{x_3} \begin{bmatrix} D_3 \\ -H_2 \\ H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_{x_1} D_1 + \partial_{x_2} D_2 + \partial_{x_3} D_3 \\ -\partial_t D_1 + \partial_{x_2} H_3 - \partial_{x_3} H_2 \\ -\partial_t D_2 - \partial_{x_1} H_3 + \partial_{x_3} H_1 \\ -\partial_t D_3 + \partial_{x_1} H_2 - \partial_{x_2} H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{div}_x D \\ -\partial_t D + \operatorname{rot}_x H \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(siehe auch (VI2.9)), und $\operatorname{div}_y \mathbf{j} = \partial_t \boldsymbol{\rho} + \operatorname{div}_x \mathbf{j}$. \square

Beweis der Folgerung. Man kann die letzte Gleichung natürlich auch aus den Differentialgleichungen in (t, x) herleiten. Es ist

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} = \partial_t \operatorname{div}_x D = \operatorname{div}_x (\partial_t D) = \operatorname{div}_x (\operatorname{rot}_x H - \mathbf{j}) = -\operatorname{div}_x \mathbf{j},$$

da $\operatorname{div}_x \operatorname{rot}_x = 0$. \square

Die Differentialgleichung (VI2.1) gilt im Allgemeinen natürlich auch im Distributionssinn, d.h. für \mathfrak{H}_{kl} und \mathbf{j}_k in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ gilt das Gesetz (VI2.1) von Ampère in der gleichen Form

$$\boxed{\operatorname{div}_y \mathfrak{H} = \mathbf{j} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^4).} \quad (\text{VI2.10})$$

Wir geben einige wichtige Beispiele an, und zwar betrachten wir die Situation in 2.2. Wir behandeln das elektrische Feld D bei einer Punktladung und dann das magnetische Feld H um einen elektrischen Leiter.

2.3 Beispiel. Wir betrachten jetzt distributionelle Lösungen von (VI2.5), und zwar zunächst nur einen einzelnen Beobachter. Der betrachte den stationären Fall, also $D \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ zeitunabhängig sowie $H = 0$ und $\mathbf{j} = 0$. Sie seien Lösungen von

$$\operatorname{div}_x[D] = \boldsymbol{\rho} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}), \quad (\text{VI2.11})$$

und trivialerweise der zweiten Differentialgleichung von (VI2.5). Gegeben sei nun die Punktladung mit Ladung $Q \in \mathbb{R}$ im Punkte $0 \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$D(x) := \frac{Q}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}, \quad \boldsymbol{\rho} := Q\boldsymbol{\mu}_0, \quad \langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_0 \rangle := \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, 0) dt,$$

eine Distributionslösung von (VI2.11).

Zusatz: Auch das Faraday'sche Induktionsgesetz ist erfüllt (ohne Polarisation und Magnetisierung) da $\operatorname{rot}_x[D] = 0$.

Bemerkung: $\boldsymbol{\mu}_0$ ist also das eindimensionale Maß auf $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$.

Für einen anderen Beobachter ist dieselbe Ladung natürlich in Bewegung, und deshalb kann dann \mathfrak{H} , also D und H , mit Hilfe von (VI2.3) berechnet werden, siehe dazu 3.2.

Beweis. Es ist im \mathbb{R}^3

$$\varphi(x) := \frac{Q}{4\pi|x|}, \quad \nabla_x \varphi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}, \quad -\Delta_x[\varphi] = Q\boldsymbol{\delta}_0,$$

so dass also $[D] = \nabla_x[-\varphi] = -[\nabla_x \varphi]$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und damit

$$\operatorname{div}_x[D] = \operatorname{div}_x \nabla_x[-\varphi] = -\Delta_x[\varphi] = Q\boldsymbol{\mu}_0$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. □

Beweis Zusatz. Es ist $[D] = \nabla_x[-\varphi]$ und damit ist E , mit $[D] = \varepsilon_0[E]$, ein Gradient (siehe 2.13). Alle anderen Größen sind 0. □

2.4 Superposition. Es gilt hier das *Gesetz der Superposition* (en: *superposition principle*). Sind Ladungen $Q(x_\alpha)$ an den Punkten x_α gegeben, so ist die stationäre Lösung von (VI2.11) gegeben durch

$$D(x) = \sum_{\alpha} \frac{Q(x_\alpha)}{4\pi} \frac{x - x_\alpha}{|x - x_\alpha|^3}, \quad \boldsymbol{\rho} = \sum_{\alpha} Q(x_\alpha)\boldsymbol{\mu}_{x_\alpha}.$$

Beachte, dass D nur in L^1_{loc} liegt. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung über eine Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ mit einem Maß λ auf Λ erhält man

$$D(x) = \int_{\Lambda} \frac{Q(x')}{4\pi} \frac{x - x'}{|x - x'|^3} d\lambda(x'), \quad \boldsymbol{\rho} = Q\lambda.$$

Es ist

$$[D] = -\nabla_x[\varphi], \quad \varphi(x) := \int_{\Lambda} \frac{q(x')}{4\pi|x-x'|} d\lambda(x').$$

In allen Fällen gilt $\operatorname{div}_x[D] = \rho$.

Wir betrachten nun das Magnetfeld um einen Strom in einem Leiter.

2.5 Beispiel. Wir betrachten distributionelle Lösungen von (VI2.5), und zwar zunächst nur einen einzelnen Beobachter. Der betrachte den stationären Fall, also sei $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{j} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ zeitunabhängig und Lösung von

$$\operatorname{rot}_x[H] = \mathbf{j} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3). \quad (\text{VI2.12})$$

Ein Beispiel für eine solche Distribution tritt dann auf, wenn wir einen elektrischen Leiter als eindimensionales Objekt Γ im \mathbb{R}^3 auffassen. Ist dieser Leiter eine Gerade, also etwa

$$\Gamma := \{s\mathbf{e}_3; s \in \mathbb{R}\}, \quad \langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_\Gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, s\mathbf{e}_3) ds dt,$$

und ist $\mathbf{i} \in \mathbb{R}$ ein konstanter “Strom” in Richtung \mathbf{e}_3 , so ist

$$H(x) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \frac{x_1\mathbf{e}_2 - x_2\mathbf{e}_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{i}\mathbf{e}_3\boldsymbol{\mu}_\Gamma,$$

eine Lösung von $\operatorname{rot}_x[H] = \mathbf{j}$. Es gilt auch $\operatorname{div}_x\mathbf{j} = 0$.

Bemerkung: Über D und \mathbf{j} wird hier nichts gesagt.

Zusatz: Auch das Faraday’sche Induktionsgesetz ist erfüllt (ohne Polarisaton und Magnetisierung), denn $\operatorname{div}_x[H] = 0$.

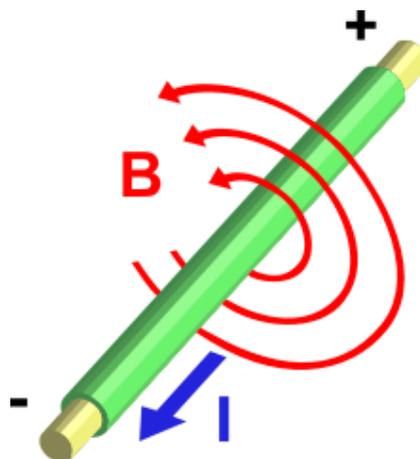


Abb. 3: Aus Wikipedia

Für einen anderen Beobachter ist der Leiter natürlich in Bewegung, und deshalb kann dann H und auch D , also \mathfrak{H} , mit Hilfe von (VI2.3) berechnet werden, siehe dazu 3.4.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\mathbf{i} = 1$. Dann ist also

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_3 \mu_\Gamma, \quad H(x) = \frac{(-x_2, +x_1, 0)}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{\mathbf{e}_3 \times x}{2\pi|(x_1, x_2)|^2}$$

für $x \neq 0$, somit

$$H(x) = (\partial_{x_2} \varphi(x_1, x_2), -\partial_{x_1} \varphi(x_1, x_2), 0), \\ \varphi(x_1, x_2) := \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Nun ist φ die zweidimensionale Fundamentallösung des negativen Laplaceoperators, d.h. es gilt

$$-\Delta_{(x_1, x_2)}[\varphi] = \delta_0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \quad \text{somit} \quad -\Delta_{(x_1, x_2, x_3)}[\varphi] = \mu_\Gamma \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Also gilt in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$[H] = \partial_{x_2}[\varphi] \mathbf{e}_1 - \partial_{x_1}[\varphi] \mathbf{e}_2, \\ \text{rot}_x[H] = (\partial_{x_1}[H_2] - \partial_{x_2}[H_1])\mathbf{e}_3 = -\Delta_x[\varphi]\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mu_\Gamma = \mathbf{j}.$$

Das ist die Behauptung an H . Da $\mathbf{j} = \mathbf{e}_3 \mu_\Gamma$ und Γ die Gerade in Richtung \mathbf{e}_3 ist, folgt $\text{div}_x \mathbf{j} = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. \square

Beweis des Zusatzes. Es ist

$$[H] = \partial_2[\varphi] \mathbf{e}_1 - \partial_1[\varphi] \mathbf{e}_2 = \text{rot}_x(-[\varphi]\mathbf{e}_3),$$

und damit, mit $B = \mu_0 H$, ist B eine Rotation (siehe 2.13). \square

Wie die Felder für eine bewegte Ladung aussehen, wird im Abschnitt 3 untersucht.

Für \mathfrak{H} mögen die folgenden konstitutiven Gleichungen gelten, welche die Einführung der elektrischen Größen \mathfrak{E} und der magnetischen Größen \mathfrak{P} erfordert,

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{G} \mathfrak{E} \mathbf{G}^T - \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{E}, \mathfrak{P} \text{ schiefssymmetrisch,} \quad (\text{VI2.13})$$

in Komponentenschreibweise

$$\mathfrak{H}_{kl} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{k, l \geq 0} \mathbf{G}_{k\bar{k}} \mathbf{G}_{l\bar{l}} \mathfrak{E}_{\bar{k}\bar{l}} - \mathfrak{P}_{kl}.$$

Die Transformationsformeln (VI2.3) schreiben sich wie folgt um.

2.6 Lemma. Ist (VI2.13) erfüllt mit einem objektiven Skalar μ_0 und hat \mathfrak{P} dieselbe Transformationformel wie \mathfrak{H} (d.h. ist es ein kontravarianter Tensor), so folgt

$$\mathfrak{E}^* = DY^T \mathfrak{E} \circ Y DY, \quad (\text{VI2.14})$$

also ist \mathfrak{E} ein kovarianter Tensor.

Beweis. Es ist \mathfrak{E} eingeführt durch $\mathfrak{H} + \mathfrak{P} = \frac{1}{\mu_0} G \mathfrak{E} G^T$, also gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H} + \mathfrak{P}) \circ Y &= \frac{1}{\mu_0 \circ Y} G \circ Y \mathfrak{E} \circ Y (G \circ Y)^T \\ &= \frac{1}{\mu_0 \circ Y} DY G^* (DY^T \mathfrak{E} \circ Y DY) G^{*T} DY^T. \end{aligned}$$

Da \mathfrak{H} und \mathfrak{P} kontravariante Tensoren sind, ist die linke Seite gleich

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H} + \mathfrak{P}) \circ Y &= DY (\mathfrak{H}^* + \mathfrak{P}^*) DY^T \\ &= \frac{1}{\mu_0^*} DY G^* \mathfrak{E}^* G^{*T} DY^T, \end{aligned}$$

also muss $\mathfrak{E}^* = DY^T \mathfrak{E} \circ Y DY$ sein. \square

Die Bedeutung von \mathfrak{E} und \mathfrak{P} wird wiederum klar, wenn man die Gleichungen im Lorentzfall hinschreibt.

2.7 Speziell. Betrachte den Lorentz-Fall, also ist $G = G_c$ und die Koordinaten sind $y = (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Dann schreibe

$$\mathfrak{E} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{P} = \begin{bmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & 0 & M_3 & -M_2 \\ P_2 & -M_3 & 0 & M_1 \\ P_3 & M_2 & -M_1 & 0 \end{bmatrix}$$

und \mathfrak{H} wie in 2.2, so ist die Darstellung (VI2.13) äquivalent zu

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad H = \frac{1}{\mu_0} B - M$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

E elektrische Feldstärke

B magnetische Flussdichte

$\mu_0 = \text{const}$ Permeabilität (in Vakuum)

$\varepsilon_0 = \text{const}$ Permittivität (in Vakuum)

P elektrische Polarisation

M Magnetisierung

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & D^T \\ -D & \mathcal{R}(H) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -P^T \\ P & \mathcal{R}(M) \end{bmatrix} = \mathfrak{H} + \mathfrak{P} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{G}_c \mathfrak{E} \mathbf{G}_c^T \\ & = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E^T \\ E & \mathcal{R}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c^2} E^T \\ -\frac{1}{c^2} E & \mathcal{R}(B) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

also folgt die Behauptung, denn $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. \square

Die Konstanten ε_0 und μ_0 sind gemessene Größen, und zwar haben wir im Vakuum oder freien Raum die folgenden Konstanten:

Elektrische Feldkonstante (*en*: electric permittivity):

$$\varepsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \quad (F=\text{farad}),$$

$$\left(F = \frac{As}{V} = \frac{(As)^2}{kg} \left(\frac{s}{m} \right)^2, A=\text{ampere} \right),$$

Magnetische Feldkonstante (*en*: magnetic permeability):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \quad (H=\text{henry}),$$

$$\left(\frac{H}{m} = \frac{N}{A^2}, N=\text{newton}, N = \frac{kg\,m}{s^2} \right),$$

Lichtgeschwindigkeit (*en*: speed of light):

$$\mathbf{c} = c_0 = 299792.458 \frac{km}{s} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

(VI.2.15)

Referenzen: Siehe [[Wikipedia: Magnetische Feldkonstante](#)] bzw. [[Wikipedia: Permeability \(electromagnetism\)](#)] und [[Wikipedia: Elektrische Feldkonstante](#)] bzw. [[Wikipedia: Vacuum permittivity](#)] und für eine Liste der Dimensionen siehe [[Wikipedia: Electromagnetism](#)] oder [130, Electromagnetism].

Die Maxwell-Gleichungen werden komplettiert durch das Faraday'sche "Induktionsgesetz" (*en*: "Faraday's law of induction"). (Die Gleichungen dieses Gesetzes werden in der Literatur, z.B. [84, §26 (26,5)], als die "erste Gruppe der Maxwell-Gleichungen" bezeichnet, und z.B. in [49, Drittes Buch VI §1]

als die “zweite Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes”.) Es gilt das

Induktionsgesetz (en: Faraday’s law of induction):

$$\mathfrak{E}_{ik'l} + \mathfrak{E}_{kl'i} + \mathfrak{E}_{li'k} = 0 \text{ für } i, k, l = 0, \dots, 3$$

Da \mathfrak{E} schiefssymmetrisch, nur für
verschiedene Indizes nichttrivial, d.h. für
 $\{i, k, l\}$ gleich $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

(VI2.16)

Wir zeigen nun, dass dieses Gesetz bei Beobachterwechsel gleich bleibt.

2.8 Theorem. Ein Feld $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$ erfülle

$$\begin{aligned} F_{ik'l} + F_{kl'i} + F_{li'k} &= 0 \text{ für } i, k, l = 0, \dots, 3, \\ F_{kl} + F_{lk} &= 0 \text{ für } k, l = 0, \dots, 3. \end{aligned} \quad (\text{VI2.17})$$

Wenn es das Transformationsverhalten

$$F_{ij}^* = \sum_{k,l} Y_{k'i} Y_{l'j} F_{kl} \circ Y$$

hat (d.h. wenn es ein covarianter Tensor ist), dann ist (VI2.17) objektiv.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} & F_{ik'l}^* + F_{kl'i}^* + F_{li'k}^* \\ &= \left(\sum_{\bar{i}, \bar{k}} Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k} F_{\bar{i}\bar{k}} \circ Y \right)_{,l} + \left(\sum_{\bar{k}, \bar{l}} Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{l}'l} F_{\bar{k}\bar{l}} \circ Y \right)_{,i} \\ & \quad + \left(\sum_{\bar{l}, \bar{i}} Y_{\bar{l}'l} Y_{\bar{i}'i} F_{\bar{l}\bar{i}} \circ Y \right)_{,k} \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{k}} (Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k})_{,l} F_{\bar{i}\bar{k}} \circ Y + \sum_{\bar{k}, \bar{l}} (Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{l}'l})_{,i} F_{\bar{k}\bar{l}} \circ Y \\ & \quad + \sum_{\bar{l}, \bar{i}} (Y_{\bar{l}'l} Y_{\bar{i}'i})_{,k} F_{\bar{l}\bar{i}} \circ Y \\ &+ \sum_{\bar{i}, \bar{k}, \bar{l}} Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{l}'l} F_{\bar{i}\bar{k}\bar{l}} \circ Y + \sum_{\bar{k}, \bar{l}, \bar{i}} Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{l}'l} Y_{\bar{i}'i} F_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}} \circ Y \\ & \quad + \sum_{\bar{l}, \bar{i}, \bar{k}} Y_{\bar{l}'l} Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k} F_{\bar{l}\bar{i}\bar{k}} \circ Y \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{k}} \left((Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k})_{,l} + (Y_{\bar{i}'k} Y_{\bar{k}'l})_{,i} + (Y_{\bar{i}'l} Y_{\bar{k}'i})_{,k} \right) F_{\bar{i}\bar{k}} \circ Y \\ &+ \sum_{\bar{i}, \bar{k}, \bar{l}} Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{l}'l} (F_{\bar{i}\bar{k}\bar{l}} + F_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}} + F_{\bar{l}\bar{i}\bar{k}}) \circ Y \\ &= \sum_{\bar{i}, \bar{k}, \bar{l}} Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{l}'l} (F_{\bar{i}\bar{k}\bar{l}} + F_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}} + F_{\bar{l}\bar{i}\bar{k}}) \circ Y, \end{aligned}$$

da F antisymmetrisch ist und

$$\begin{aligned} & (Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'k})'l + (Y_{\bar{i}'k} Y_{\bar{k}'l})'i + (Y_{\bar{i}'l} Y_{\bar{k}'i})'k \\ &= Y_{\bar{i}'il} Y_{\bar{k}'k} + Y_{\bar{i}'i} Y_{\bar{k}'kl} + Y_{\bar{i}'ki} Y_{\bar{k}'l} + Y_{\bar{i}'k} Y_{\bar{k}'li} + Y_{\bar{i}'lk} Y_{\bar{k}'i} + Y_{\bar{i}'l} Y_{\bar{k}'ik} \end{aligned}$$

symmetrisch in \bar{i} und \bar{k} . \square

2.9 Speziell. Betrachte den Lorentz-Fall, also $G = G_c$ und die Koordinaten sind $y = (t, x)$. Dann ist das Induktionsgesetz (VI2.16) äquivalent zu

$$\operatorname{div}_x B = 0,$$

$$\partial_t B + \operatorname{rot}_x E = 0$$

E elektrische Feldstärke,

B magnetische Flussdichte.

Beweis. Es sind nur vier Gleichungen des Induktionsgesetzes nichttrivial und unabhängig voneinander, und zwar für (i, k, l) gleich $(0, 1, 2)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 2, 3)$. Wir erhalten

$$(0, 1, 2): \quad -E_1'2 + B_3'0 + E_2'1 = 0,$$

$$(0, 1, 3): \quad -E_1'3 - B_2'0 + E_3'1 = 0,$$

$$(0, 2, 3): \quad -E_2'3 + B_1'0 + E_3'2 = 0,$$

$$(1, 2, 3): \quad B_3'3 + B_1'1 + B_2'2 = 0.$$

\square

Insgesamt sind die elektrischen Maxwell-Hertz-Gleichungen im Lorentzfall gleich

Maxwell-Gleichungen im Lorentzfall:

$$\operatorname{div}_x D = \boldsymbol{\rho}, \quad -\partial_t D + \operatorname{rot}_x H = \mathbf{j},$$

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad H = \frac{1}{\mu_0} B - M, \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

$$\operatorname{div}_x B = 0, \quad \partial_t B + \operatorname{rot}_x E = 0$$

$$\text{Folgerung: } \partial_t \boldsymbol{\rho} + \operatorname{div}_x \mathbf{j} = 0.$$

(VI2.18)

Es gibt eine Methode, das Faraday'sche Induktionsgesetz zu erfüllen, und die ist \mathfrak{E} durch Ableitungen auszudrücken. Dies folgt aus den Voraussetzungen von Faraday, indem man das Lemma von Poincaré anwendet,

2.10 Lemma von Poincaré.² “Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet \mathcal{U} im \mathbb{R}^N ist jede **geschlossene** Differentialform, d.h. ω mit $d\omega = 0$, eine **exakte** Form, d.h. es gibt eine Differentialform λ mit $d\lambda = \omega$.”

Hinweis: λ ist nicht eindeutig definiert.

Wir nehmen nun $N = 4$ und es sind die folgenden Beispiele von Bedeutung.

(1) Es sei $\underline{F} = (F_k)_{k \geq 0} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $d\left(\sum_{k \geq 0} F_k dy_k\right) = 0$. Dann gibt es eine Funktion $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\underline{F} = -\underline{\nabla}\phi$, d.h.

$$d\phi = - \sum_{k \geq 0} F_k dy_k .$$

(2) Es sei $\underline{\mathcal{E}} = (E_{kl})_{k,l \geq 0} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit $d\left(\sum_{k,l \geq 0} E_{kl} dy_k \wedge dy_l\right) = 0$ und $E_{kl} + E_{lk} = 0$ für alle $k, l \geq 0$. Dann gibt es ein $\underline{A} = (A_k)_{k \geq 0} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit

$$d\left(\sum_{k \geq 0} A_k dy_k\right) = \frac{1}{2} \sum_{k,l \geq 0} E_{kl} dy_k \wedge dy_l ,$$

d.h. $E_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ für $k, l \geq 0$.

Beweis Hinweis. Jedes λ' mit $d\lambda' = \omega$ ist ebenfalls eine Lösung. Also gilt: Ist μ' mit $d\mu' = 0$ so ist $\lambda' := \lambda + \mu'$ eine weitere Lösung. Es sei verwiesen auf [21, Poincaré Lemma]. Siehe auch [Wikipedia: Poincaré-Lemma]. \square

Beweis (1). Die Voraussetzung ist

$$0 = d\left(\sum_{k \geq 0} F_k dy_k\right) = \sum_{k,l \geq 0} \partial_l F_k dy_l \wedge dy_k = \sum_{k < l} (\partial_l F_k - \partial_k F_l) dy_l \wedge dy_k ,$$

also $\partial_l F_k - \partial_k F_l = 0$ für $k < l$. As Folgerung haben wir

$$- \sum_{k \geq 0} F_k dy_k = d\phi = \sum_{k \geq 0} \partial_k \phi dy_k$$

also $-F_k = \partial_k \phi$, oder $\underline{F} = -\underline{\nabla}\phi$. \square

Beweis (2). Die Voraussetzung sagt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\sum_{k,l \geq 0} E_{kl} dy_k \wedge dy_l\right) = \sum_{j,k,l \geq 0} \partial_j E_{kl} dy_j \wedge dy_k \wedge dy_l \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j,k,l \geq 0} (\partial_j E_{kl} + \partial_k E_{lj} + \partial_l E_{jk}) dy_j \wedge dy_k \wedge dy_l \\ &= 2 \sum_{j < k < l} (\partial_j E_{kl} + \partial_k E_{lj} + \partial_l E_{jk}) dy_j \wedge dy_k \wedge dy_l , \end{aligned}$$

² Wir setzen elementare Kenntnisse über Differentialformen voraus.

also $\partial_j E_{kl} + \partial_k E_{lj} + \partial_l E_{jk} = 0$ für $0 \leq j < k < l \leq 3$. Und die Konklusion besagt, dass

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k < l} E_{kl} dy_k \wedge dy_l &= \sum_{k, l \geq 0} E_{kl} dy_k \wedge dy_l = 2d\left(\sum_{k \geq 0} A_k dy_k\right) \\ &= 2 \sum_{k, l \geq 0} \partial_l A_k dy_l \wedge dy_k = 2 \sum_{k < l} (\partial_k A_l - \partial_l A_k) dy_k \wedge dy_l, \end{aligned}$$

was $E_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ für $k < l$ also auch für $k, l \geq 0$ bedeutet. \square

2.11 4-Vektorpotential. Die Voraussetzung (VI2.16) impliziert nach dem Lemma von Poincaré, dass

$$\mathfrak{E}_{ik} = \underline{A}_{k'i} - \underline{A}_{i'k} \text{ für } i, k = 0, \dots, 3 \quad (\text{VI2.19})$$

mit $\underline{A}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, Wenn \underline{A} gegeben ist, so erfüllt $\underline{A}^* = DY^T \underline{A} \circ Y$ ebenfalls die Eigenschaft (VI2.19) mit \mathfrak{E}^* . *Warnungen:* Die Existenz von \underline{A} ist nur für ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der Raumzeit gesichert. Und: Falls \underline{A} durch eine Integralformel mittels \mathfrak{E} dargestellt wird, führt die Nichteindeutigkeit von \underline{A} auch dazu, dass \underline{A}^* nicht durch dieselbe Integralformel, natürlich auf \mathfrak{E}^* angewandt, dargestellt wird.

Also ist im Folgenden immer vorausgesetzt, dass das Gebiet einfach zusammenhängend ist, was z.B. erfüllt ist, wenn der ganze Raum betrachtet wird. Die Darstellung (VI2.19) ist in der Matrixschreibweise

$$\mathfrak{E} = (D\underline{A})^T - D\underline{A}. \quad (\text{VI2.20})$$

Beweis. Die Faraday'sche Voraussetzung (VI2.16) an \mathfrak{E} ist äquivalent, siehe den Beweis von 2.10(2), zu der Voraussetzung in 2.10(2). Die Konklusion von 2.10(2) sagt aus, dass $\mathfrak{E}_{kl} = \partial_k \underline{A}_l - \partial_l \underline{A}_k = \underline{A}_{l'k} - \underline{A}_{k'l}$. Aus dieser Darstellung folgt natürlich, dass \mathfrak{E} antisymmetrisch ist und das Faraday'sche Induktionsgesetz (VI2.16) erfüllt. Wenn wir dann

$$\underline{A}_k^* = \sum_{\bar{k}} Y_{\bar{k}'k} \underline{A}_{\bar{k}} \circ Y \quad (\text{VI2.21})$$

definieren, also durch die Transformationsformel für kovariante Vektoren \underline{A} , so folgt durch Bildung der Ableitungen

$$\underline{A}_{k'i}^* = \sum_{\bar{k}} Y_{\bar{k}'k} \sum_{\bar{i}} Y_{\bar{i}'i} \underline{A}_{\bar{k}\bar{i}} \circ Y + \sum_{\bar{k}} Y_{\bar{k}'ki} \underline{A}_{\bar{k}} \circ Y.$$

Da $Y_{\bar{k}'ki}$ symmetrisch in k und i ist, folgt, wenn $\mathfrak{E}_{ik}^* := \underline{A}_{k'i}^* - \underline{A}_{i'k}^*$,

$$\mathfrak{E}_{ik}^* = \underline{A}_{k'i}^* - \underline{A}_{i'k}^* = \sum_{\bar{k}, \bar{i}} Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{i}'i} (\underline{A}_{\bar{k}\bar{i}} - \underline{A}_{\bar{i}\bar{k}}) \circ Y = \sum_{\bar{k}, \bar{i}} Y_{\bar{k}'k} Y_{\bar{i}'i} \mathfrak{E}_{\bar{i}\bar{k}} \circ Y,$$

was die Transformationsformel für \mathfrak{E} ist. \square

Das Vektorpotential ist, wie beim Lemma von Poincaré schon gesagt, nicht eindeutig definiert, es gilt die

2.12 Eichinvarianz (Gauge invariance) . Ist f irgendeine skalare Funktion und wird in 2.11 das Vektorpotential \underline{A} durch

$$\underline{A}' := \underline{A} + \underline{\nabla}f$$

ersetzt, so ändert sich dadurch \mathfrak{E} nicht. *Bemerkung:* Ist f ein objektiver Skalar, so ist $\underline{\nabla}f$ kovariant, also mit \underline{A} auch \underline{A}' ein kovarianter Vektor.

Beweis. Folgt unmittelbar aus (VI2.19), siehe auch Aufgabe 6.5. □

2.13 Speziell. Im Lorentz Fall 2.7 gilt mit $\underline{A} = (-\Phi, A_1, A_2, A_3)$

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_{x_i}\Phi - \partial_t A_i \text{ für } i = 1, 2, 3, \\ B &= \text{rot}_x A \text{ wobei } A = (A_1, A_2, A_3), \end{aligned}$$

also

$$E = -\nabla_x \Phi - \partial_t A, \quad B = \text{rot}_x A.$$

Die Eichinvarianz lautet dann, dass für eine skalare Funktion f gilt, dass

$$\Phi' := \Phi - \partial_t f \quad \text{und} \quad A' := A + \nabla_x f$$

dieselben Felder E und B ergeben.

Beweis. Dies folgt als Spezialfall aus der Eichinvarianz 2.12, kann aber auch direkt eingesehen werden:

$$\begin{aligned} -E &= \nabla_x \Phi + \partial_t A = \nabla_x \Phi' + \nabla_x \partial_t f + \partial_t A' - \partial_t \nabla_x f = \nabla_x \Phi' + \partial_t A', \\ B &= \text{rot}_x A = \text{rot}_x (A' - \nabla_x f) = \text{rot}_x A' - \text{rot}_x \nabla_x f = \text{rot}_x A', \end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir im allgemeinen Fall

2.14 Maxwell Gleichungen ohne Polarisation. In Abwesenheit von \mathfrak{P} gilt

$$\sum_{j \geq 0} \partial_j \left(\sum_{k \neq l} (G_{ik} G_{jl} - G_{il} G_{jk}) \partial_l \underline{A}_k \right) = \mu_0 j_i$$

für alle i . Das sind also die gesamten Maxwell-Gleichungen ohne Polarisation und Magnetisierung, d.h. $\mathfrak{P} = 0$.

Beweis. Es gilt, da $\mathfrak{P} = 0$ ist, das Ampère'sche Durchflutungsgesetz

$$\mathbf{j} = \underline{\operatorname{div}} \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\operatorname{div}} (\mathbf{G} \mathfrak{E} \mathbf{G}^T) = \frac{1}{\mu_0} \underline{\operatorname{div}} (G(\underline{D}\underline{A} - \underline{D}\underline{A}^T) \mathbf{G}^T)$$

und andererseits ist das Faraday'sche Induktionsgesetz wegen der Einführung des 4er-Vektorpotentials \underline{A} erfüllt. \square

Die Abwesenheit von \mathfrak{P} bedeutet, dass die Gleichung

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{G} \mathfrak{E} \mathbf{G}^T$$

erfüllt ist. Im Lorentz-Fall $\mathbf{G} = \mathbf{G}_c$ und $y = (t, x)$ folgt damit, dass $\underline{\operatorname{div}} \mathfrak{H} = \mathbf{j}$ äquivalent ist zu

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ -\frac{1}{c^2} \partial_t E + \operatorname{rot} B &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned}} \quad (\text{VI2.22})$$

Daraus folgt, siehe [48, (6.10) and (6.11)], dass die Maxwell-Gleichungen zu den folgenden Differentialgleichungen äquivalent sind.

2.15 Speziell. Betrachte den Lorentz-Fall, also $\mathbf{G} = \mathbf{G}_c$ und $y = (t, x)$. Dann sind die Maxwell-Gleichungen ohne Polarisation 2.14 äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi - \partial_t \operatorname{div} A &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A - \Delta A + \nabla \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \operatorname{div} A \right) &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Beweis. Wenn $\mathfrak{P} = 0$ ist, also keine Polarisation P und keine Magnetisierung M präsent ist, so sind sie Maxwell-Gleichungen äquivalent zu (VI2.22) und den Gleichungen in 2.13

$$E = -\nabla \Phi - \partial_t A, \quad B = \operatorname{rot} A.$$

Einsetzen dieser Gleichungen in (VI2.22) ergibt die Behauptung, wobei die Gleichung $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = -\Delta A + \nabla \operatorname{div} A$ gilt, siehe Übung 6.4. \square

Wir vereinfachen dieses System, indem wir geeignet eichen. Das System heißt dann auch Lorenz geeicht.³

Referenzen: Zur Lorenz Eichung siehe [Wikipedia: Lorenz-Eichung], sowie Jackson [48, 6.3 Gauge Transformations, Lorenz Gauge, Coulomb Gauge]. Es sei auch verwiesen auf das Originalpaper von Lorenz [115].

³Two persons, the Danish physicist and mathematician Ludwig Lorenz (1829-1891) and the Dutch physicist Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

2.16 Lorenz Konvention (L. Lorenz 1867). Assume the Lorentz frame $G = G_c$ and $y = (t, x)$. Then by a certain gauge transformation one can assume⁴

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \operatorname{div}_x A = 0. \quad (\text{VI2.23})$$

Remark: This condition is observer independent if written $\underline{\operatorname{div}}(GA) = 0$.

Beweis. If \underline{A} is the original quantity we switch to $\underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla} f$. We want that $\underline{\operatorname{div}}(GA') = 0$ which means

$$\underline{\operatorname{div}}(-G\nabla f) = \underline{\operatorname{div}}(GA).$$

Given \underline{A} this differential equation has a solution f . The solution f is unique under certain given boundary values in spacetime (that is, the correct initial and boundary values). Hence the new vector \underline{A}' has the property $\underline{\operatorname{div}}(GA') = 0$. In the Lorentz case one has

$$\underline{\operatorname{div}}(-G\nabla f) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 f - \Delta f$$

and with $\underline{A}' = (-\Phi', A'_1, A'_2, A'_3)$

$$0 = \underline{\operatorname{div}}(GA') = \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi' + \operatorname{div} A'.$$

□

Beweis Remark. By (VI2.21) \underline{A} is a covariant vector and therefore GA a contravariant vector so that $\underline{\operatorname{div}}(GA)$ is an objective scalar. □

With this we obtain the wave equations in electrodynamics.

2.17 Electromagnetic waves. By choosing the Lorenz condition 2.16 the Maxwell equations without polarization 2.15 read

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi - \Delta \Phi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A - \Delta A &= \mu_0 \mathbf{j}, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \operatorname{div} A &= 0. \end{aligned}$$

These are two wave equations with a differential equation coupling them.

This you will find in [48, (6.14)–(6.16)].

Beweis. Insert the identity (VI2.23) into the equations in 2.15. □

In the general case where $G = \text{const}$ these equations read as follows.

⁴see [84, §46], specially the correct second comment in this paragraph

2.18 General electromagnetic waves. If $G = \text{const}$ then Maxwell equations without polarization 2.15 read

$$\sum_{j,l} \partial_{jl} \left(G_{jl} \left(\sum_k G_{ik} \underline{A}_k \right) \right) = \mu_0 j_i \quad \text{für alle } i \geq 0,$$

$$\sum_j \partial_j \left(\sum_k G_{jk} \underline{A}_k \right) = 0.$$

Beweis. Nach 2.14 ist, da G konstant ist,

$$\begin{aligned} \mu_0 j_i &= \sum_j \partial_j \left(\sum_{k,l} (G_{ik} G_{jl} - G_{il} G_{jk}) \partial_l \underline{A}_k \right) \\ &= \sum_{j,l} \partial_{jl} \left(G_{jl} \sum_k G_{ik} \underline{A}_k \right) - \underbrace{\sum_l \partial_l \left(G_{il} \sum_j \partial_j \left(\sum_k G_{jk} \underline{A}_k \right) \right)}_{= 0}, \end{aligned}$$

where the second summand is zero. □

Remark: Es wird noch die Aussendung von Licht behandelt.

3 Bewegte Ladungen

Hier untersuchen wir, wie die Felder bei zeitabhängigen Ladungen aussehen, wobei wir die Maxwell-Gleichungen für Distributionen, siehe (VI2.10), benutzen müssen, wie das auch schon in den Beispielen einer Punktladung in 2.3 und eines Leiters in 2.5 der Fall war. Wie dort betrachten wir den Lorentz-Fall, also ist $G = G_c$ und $y = (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sind die Koordinaten. Die Distributionslösungen sind dann die entsprechenden Lösungen von (VI2.5).

Referenzen: Für eine gleichförmige bewegte Ladung siehe [84, Kap. V §38], für das Feld einer allgemein bewegten Ladung siehe [84, Kap. VIII].

Aus den generellen Transformationsformeln in (VI2.3) für \mathfrak{H} und \mathfrak{j} folgen folgende Transformationsformeln für D , H , $\boldsymbol{\rho}$ und \mathfrak{j} , und zwar im Spezialfall einer linearen Beobachtertransformation.

3.1 Spezielle Transformationsformel. Wir betrachten zwei Beobachter, die im Lorentz-Fall wie in 2.2 sind. Dann gilt für die Transformationsformeln (VI2.3) und (VI2.4), wenn die Beobachtertransformation Y speziell eine Lorentz-Transformation mit $DY = L_c(V, Q)$ ist, wobei V und Q Konstanten sind,

$$\begin{aligned} D \circ Y &= \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q D^* - \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{B}(V) (V \times Q H^*), \\ H \circ Y &= \gamma V \times (\mathbf{B}(V) Q D^*) + \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q H^*, \end{aligned} \tag{VI3.1}$$

sowie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} \circ Y &= \gamma \boldsymbol{\rho}^* + \frac{\gamma}{c^2} V \bullet (Q \mathfrak{j}^*), \\ \mathfrak{j} \circ Y &= \gamma \boldsymbol{\rho}^* V + \mathbf{B}(V) Q \mathfrak{j}^*. \end{aligned} \tag{VI3.2}$$

Beachte: Diese Formeln gelten nur für Funktionen, die Dichten des Lebesgue-Maßes in der Raumzeit sind.

Beweis. Die Transformationsformeln (VI2.3) und (VI2.4) besagen

$$\begin{bmatrix} 0 & D^T \\ -D & \mathcal{R}(H) \end{bmatrix} \circ Y = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \mathbf{B}(V) Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & D^{*T} \\ -D^* & \mathcal{R}(H^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{c^2} Q^T V & Q^T \mathbf{B}(V) \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \mathfrak{j} \end{bmatrix} \circ Y = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \mathbf{B}(V) Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^* \\ \mathfrak{j}^* \end{bmatrix}.$$

Ausrechnen ergibt nun wegen $\mathbf{B}(V) - \frac{\gamma}{c^2} V V^T = \mathbf{B}(V)^{-1}$ und wenn wir

$B := \mathbf{B}(V)$ schreiben

$$\begin{aligned} D \circ Y &= \gamma B^{-1} Q D^* - \frac{\gamma}{c^2} B Q \mathcal{R}(H^*) Q^T V, \\ \mathcal{R}(H) \circ Y &= \gamma (V \otimes (B Q D^*) - (B Q D^*) \otimes V) + B Q \mathcal{R}(H^*) Q^T B, \end{aligned}$$

sowie die behaupteten Formeln (VI3.2) für $\boldsymbol{\rho}$ and \mathbf{j} . Nun gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$ unter Benutzung von (VI2.8) und wegen der Symmetrie der Matrix B

$$\begin{aligned} z_2 \bullet (B Q \mathcal{R}(H^*) Q^T B^T) z_1 &= (Q^T B z_2) \bullet (\mathcal{R}(H^*) Q^T B z_1) \\ &= (Q^T B z_2) \bullet ((Q^T B z_1) \times H^*) \\ &= H^* \bullet ((Q^T B z_2) \times (Q^T B z_1)) = (Q H^*) \bullet ((B z_2) \times (B z_1)) \end{aligned} \quad (\text{VI3.3})$$

Dies ist gleich

$$= (B z_2) \bullet ((B z_1) \times (Q H^*)) = z_2 \bullet B((B z_1) \times (Q H^*))$$

und wir erhalten

$$B Q \mathcal{R}(H^*) Q^T B^T z_1 = B((B z_1) \times Q H^*).$$

Nun setzen wir $z_1 := B^{-T} V$ und erhalten

$$B Q \mathcal{R}(H^*) Q^T V = B(V \times (Q H^*))$$

und damit erhalten wir für Flussdichte D

$$D \circ Y = \gamma B^{-1} Q D^* - \frac{\gamma}{c^2} B(V \times Q H^*)$$

Dies ist die erste Behauptung. Nun zu obiger zweiten Gleichung für $\mathcal{R}(H)$. Unter Benutzung von (VI2.8) erhalten wir für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (H \circ Y) \bullet (z_2 \times z_1) &= z_2 \bullet (z_1 \times (H \circ Y)) = z_2 \bullet (\mathcal{R}(H) \circ Y) z_1 \\ &= \gamma z_2 \bullet (V \otimes (B Q D^*) - (B Q D^*) \otimes V) z_1 + z_2 \bullet (B Q \mathcal{R}(H^*) Q^T B^T) z_1. \end{aligned}$$

The first term equals

$$\begin{aligned} &= \gamma (z_2 \bullet V \cdot z_1 \bullet (B Q D^*) - z_2 \bullet (B Q D^*) \cdot z_1 \bullet V) \\ &= \gamma (V \times (B Q D^*)) \bullet (z_2 \times z_1), \end{aligned}$$

hence it is a vector times $z_2 \times z_1$. The second term equals, as computed in (VI3.3),

$$\begin{aligned} &= (Q H^*) \bullet ((B z_2) \times (B z_1)) = \gamma (Q H^*) \bullet B^{-1}(z_2 \times z_1) \\ &= (\gamma B^{-1} Q H^*) \bullet (z_2 \times z_1) \end{aligned}$$

since (see the exercise 6.8)

$$(\mathbf{B}(V)z_2) \times (\mathbf{B}(V)z_1) = \gamma \mathbf{B}(V)^{-1}(z_2 \times z_1),$$

hence the second term of is also a vector times $z_2 \times z_1$. Thus we have proved that

$$H \circ Y = \gamma(V \times (BQD^*)) + \gamma B^{-1}QH^*$$

Dies ist die zweite Behauptung. \square

Wir geben nun vor, dass der *-Beobachter die Situation von 2.3 vorfindet, also die Ladung Q im Punkt 0 beobachtet, d.h.

$$D^*(t^*, x^*) = \frac{Q}{4\pi} \frac{x^*}{|x^*|^3}, \quad H^* = 0,$$

$$\rho^* := Q \mu_{\Gamma^*}, \quad \mathbf{j}^* = 0,$$

mit der Punktladung

$$\Gamma^* = \{(t^*, 0); t^* \in \mathbb{R}\}, \quad \xi^*(t^*) = 0 \text{ für } t^* \in \mathbb{R}$$

wobei μ_{Γ^*} das eindimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist. Ein sich bewegendes Beobachter sieht die Punktladung, wie sie sich bewegt. Wir betrachten beide Beobachter im Lorentz-Fall, und die Beobachtertransformation Y sei linear und bestehe aus einer Lorentz-Transformation $DY = \mathbf{L}_c(V, Q)$ wie in 3.1, das heißt

$$t = \gamma t^* + \frac{\gamma}{c^2} V^T Q x^*,$$

$$x = \gamma t^* V + \mathbf{B}(V) Q x^*. \quad (\text{VI3.4})$$

Deshalb ist die Ladung jetzt am Punkt $\xi(t)$ wenn $(t, \xi(t)) = Y(t^*, \xi^*(t^*))$ wobei $\xi^*(t^*) = 0$, also ist $\xi(t) = tV$. Eine beliebige Bewegung $t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^3$ wird im Beispiel von Liénhard-Wiechert 3.6 weiter unten behandelt.

3.2 Gleichförmig bewegte Ladung. Es sei $V \in \mathbb{R}^3$ und die Ladung Q befinde sich an einer sich bewegendes Stelle $\xi(t) = tV$. Dann ist eine Lösung in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ von

$$\operatorname{div}_x [D] = Q \mu_{\Gamma},$$

$$-\partial_t [D] + \operatorname{rot}_x [H] = Q V \mu_{\Gamma},$$

wobei D und H gegeben sind durch

$$D(t, x) := \frac{\gamma Q}{4\pi} \frac{x - tV}{|\mathbf{B}(V)(x - tV)|^3},$$

$$H(t, x) := V \times D(t, x).$$

Hier ist $\Gamma := \{(t, x); x = \xi(t)\}$ und das Maß μ_{Γ} ist

$$\langle \zeta, \mu_{\Gamma} \rangle := \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) dt.$$

Zusatz: Auch das Faraday'sche Induktionsgesetz ist erfüllt (ohne Magnetisierung und Polarization).

Bei einer Bewegung auf die Ladung zu oder von der Ladung weg tritt somit ein magnetisches Feld H auf.

Beweis 1. Version. Die Transformationsformeln in 3.1 liefern, d.h. (VI3.1) mit $H^* = 0$,

$$D \circ Y = \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q D^*, \quad H \circ Y = \gamma V \times (\mathbf{B}(V) Q D^*), \quad (\text{VI3.5})$$

es sind also beide Größen D und H nichtnull. Nun ist wegen (VI3.4)

$$\begin{aligned} x - tV &= \mathbf{B}(V) Q x^* - \frac{\gamma}{c^2} (V^T Q x^*) V \\ &= (\mathbf{B}(V) - \frac{\gamma}{c^2} V V^T) Q x^* = \mathbf{B}(V)^{-1} Q x^* \end{aligned}$$

wegen $\mathbf{B}(V)^{-1} = \mathbf{B}(V) - \frac{\gamma}{c^2} V V^T$. Also erhalten wir für D

$$D(t, x) = \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q D^*(x^*) = \frac{Q\gamma}{4\pi |x^*|^3} \mathbf{B}(V)^{-1} Q x^* = \frac{Q\gamma}{4\pi} \frac{x - tV}{|x^*|^3}$$

und $|x^*| = |Q x^*|$ sowie $Q x^* = \mathbf{B}(V)(x - tV)$, also

$$D(t, x) = \frac{Q\gamma}{4\pi} \frac{x - tV}{|\mathbf{B}(V)(x - tV)|^3}.$$

Jetzt zum Vektorfeld H . Nach (VI3.5) gilt

$$\begin{aligned} H \circ Y &= \gamma V \times (\mathbf{B}(V) Q D^*) \\ &= V \times \mathbf{B}(V)^2 (\gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q D^*) = V \times \mathbf{B}(V)^2 (D \circ Y) \end{aligned}$$

or

$$H = V \times \mathbf{B}(V)^2 D = V \times (\text{Id} + (\gamma^2 - 1) \widehat{V} \widehat{V}^T) D = V \times D.$$

Nun zur rechten Seite. Wäre j^* eine glatte Funktion, so gilt nach (VI2.4) die Identität $j \circ Y = DY j^*$, wobei $y = Y(y^*)$ die Beobachtertransformation ist. Daraus folgt für Testfunktionen ζ , die kovariante Vektoren $\zeta^* = DY^T \zeta \circ Y$ sind,

$$\zeta^* \bullet j^* = (DY^T \zeta \circ Y) \bullet j^* = (\zeta \circ Y) \bullet (DY j^*) = (\zeta \bullet j) \circ Y,$$

und damit

$$\begin{aligned} \langle \zeta^*, [j^*] \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} &= \int \zeta^* \bullet j^* \, dL^4(y^*) \\ &= \int (\zeta \bullet j) \circ Y \, dL^4(y^*) = \int \zeta \bullet j \, dL^4(y) = \langle \zeta, [j] \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)}. \end{aligned}$$

Also gilt das auch für $j^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3)$, das heißt für kovariantes ζ und da auch $j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3)$

$$\langle \zeta^*, j^* \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)} = \langle \zeta, j \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)}. \quad (\text{VI3.6})$$

Diese Gleichung ersetzt (VI2.4), d.h. ist allgemeiner. Nun gilt

$$j^* = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_0 \quad \text{und} \quad \text{DY} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \mathbf{B}(V) Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma q \\ \gamma q V \end{bmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} \langle \zeta^*, j^* \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)} &= \int_{\mathbb{R}} \zeta^*(t^*, 0) \bullet \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} dt^* \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta \circ Y(t^*, 0) \bullet \text{DY} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} dt^* = \int_{\mathbb{R}} \zeta \circ Y(t^*, 0) \bullet \begin{bmatrix} \gamma q \\ \gamma q V \end{bmatrix} dt^* \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, tV) \bullet \begin{bmatrix} q \\ qV \end{bmatrix} dt \quad (\text{wegen } t = \gamma t^* \text{ für } x^* = 0) \\ &= \int \zeta \bullet \begin{bmatrix} q \\ qV \end{bmatrix} d\boldsymbol{\mu}_\Gamma = \left\langle \zeta, \begin{bmatrix} q \\ qV \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_\Gamma \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)} = \langle \zeta, j \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)}, \end{aligned}$$

wenn

$$j := \begin{bmatrix} q \\ qV \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_\Gamma.$$

Da die Gleichungen invariant unter Beobachterwechsel sind, ist damit die Behauptung bewiesen. \square

Beweis 2. Version. Wir können auch, als Probe zum ersten Beweis, die Differentialgleichungen explizit nachprüfen. Es gilt außerhalb $\{(t, x); x = tV\}$ für das angegebene

$$D(t, x) = \tilde{D}(x - tV), \quad \tilde{x} := x - tV, \quad \tilde{D}(\tilde{x}) := \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \frac{\tilde{x}}{|\mathbf{B}(V)\tilde{x}|^3}.$$

Dann gilt mit $B := \mathbf{B}(V)$

$$\begin{aligned} \text{div}_x D &= \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \sum_{i \geq 1} \partial_{\tilde{x}_i} \frac{\tilde{x}_i}{|\tilde{B}\tilde{x}|^3} = \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{|\tilde{B}\tilde{x}|^3} - \frac{3\tilde{x}_i}{|\tilde{B}\tilde{x}|^4} \partial_{\tilde{x}_i} |\tilde{B}\tilde{x}| \right) \\ &= \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{|\tilde{B}\tilde{x}|^3} - \frac{3\tilde{x}_i}{|\tilde{B}\tilde{x}|^5} \sum_{j \geq 1} (B\tilde{x})_j B_{ji} \right) \\ &= \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \left(\frac{3}{|\tilde{B}\tilde{x}|^3} - \frac{3}{|\tilde{B}\tilde{x}|^5} \sum_{j \geq 1} |(B\tilde{x})_j|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Nun zur Differentialgleichung $\operatorname{div}_x[D] = \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu}_\Gamma$ im ganzen Raum. Für skalare Testfunktionen ζ ist mit $K_\varepsilon := \{\tilde{x}; |B\tilde{x}| < \varepsilon\}$

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, \operatorname{div}_x[D] \rangle &= -\langle \nabla_x \zeta, [D] \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x \zeta(t, x) \bullet D(t, x) \, dx \, dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\tilde{x}} \zeta(t, \tilde{x} + tV) \bullet \tilde{D}(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \, dt \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial K_\varepsilon} \zeta(t, \tilde{x} + tV) \nu_{K_\varepsilon}(\tilde{x}) \bullet \tilde{D}(\tilde{x}) \, d\mathbb{H}^2(\tilde{x}) \, dt \\
&= \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \zeta(t, \tilde{x} + tV) \frac{\nu_{K_\varepsilon}(\tilde{x}) \bullet \tilde{x}}{|B\tilde{x}|^3} \, d\mathbb{H}^2(\tilde{x}) \, dt \\
&= \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial K_\varepsilon} \left(\zeta(t, \tilde{x} + tV) \frac{\tilde{x}}{\varepsilon} \right) \bullet \nu_{K_\varepsilon}(\tilde{x}) \, d\mathbb{H}^2(\tilde{x}) \, dt \\
&= \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_1} (\zeta(t, \varepsilon z + tV) z) \bullet \nu_{K_1}(z) \, d\mathbb{H}^2(z) \, dt \quad (\text{mit } \tilde{x} = \varepsilon z) \\
&= \frac{\mathbf{Q}\gamma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, tV) \left(\int_{\partial K_1} z \bullet \nu_{K_1}(z) \, d\mathbb{H}^2(z) \right) \, dt \\
&= \mathbf{Q} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, tV) \, dt = \int \zeta \mathbf{Q} \, d\boldsymbol{\mu}_\Gamma = \langle \zeta, \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu}_\Gamma \rangle,
\end{aligned}$$

da

$$\int_{\partial K_1} z \bullet \nu_{D_1}(z) \, d\mathbb{H}^2(z) = \int_{K_1} \operatorname{div} z \, dL^3(z) = 3L^3(K_1) = 3 \frac{4\pi}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{4\pi}{\gamma},$$

denn K_1 ist ein Ellipsoid mit den Hauptachsen 1, 1, und $\frac{1}{\gamma}$.

Jetzt zum Vektorfeld H . Da D von der Zeit abhängt und $-\partial_t[D] + \operatorname{rot}_x[H]$ außerhalb der Singularität 0 ergeben muss, folgt dass $H \neq 0$. In der Tat ist $H = V \times D$, und wir berechnen $-\partial_t[D] + \operatorname{rot}_x[H]$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ für dieses H . Für eine vektorwertige Testfunktion ζ definiere

$$\tilde{\zeta}(t, \tilde{x}) := \zeta(t, x) \text{ für } \tilde{x} = x - tV$$

so dass

$$\partial_t \zeta = \partial_t \tilde{\zeta} - (V \bullet \nabla_{\tilde{x}}) \tilde{\zeta}, \quad \nabla_x \zeta = \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\zeta}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, -\partial_t[D] + \operatorname{rot}_x[H] \rangle &= \langle \partial_t \zeta, [D] \rangle + \langle \operatorname{rot}_x \zeta, [H] \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_t \zeta \bullet D + \operatorname{rot}_x \zeta \bullet (V \times D)) \, d(t, x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_t \zeta - V \times \operatorname{rot}_x \zeta) \bullet D \, d(t, x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_t \tilde{\zeta} - (V \bullet \nabla_{\tilde{x}}) \tilde{\zeta} - V \times \operatorname{rot}_{\tilde{x}} \tilde{\zeta}) \bullet \tilde{D} \, d(t, \tilde{x}).
\end{aligned}$$

By a general rule, see exercise 6.3, we have

$$(V \bullet \nabla_{\tilde{x}}) \tilde{\zeta} + V \times \text{rot}_{\tilde{x}} \tilde{\zeta} = \sum_{i \geq 1} V_i \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\zeta}_i = \nabla_{\tilde{x}} (V \bullet \tilde{\zeta})$$

since $V = \text{const.}$ Therefore the integral is

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_t \tilde{\zeta} - \nabla_{\tilde{x}} (V \bullet \tilde{\zeta})) \bullet \tilde{D} \, d(t, \tilde{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_t \tilde{\zeta} \, dt \right)}_{=0} \bullet \tilde{D} \, d\tilde{x} - \left\langle \nabla_{\tilde{x}} (V \bullet \tilde{\zeta}), [\tilde{D}] \right\rangle \\ &= \left\langle V \bullet \tilde{\zeta}, \nabla_{\tilde{x}} [\tilde{D}] \right\rangle = \left\langle V \bullet \tilde{\zeta}, \mathbf{Q} \mu_{\Gamma} \right\rangle = \left\langle \tilde{\zeta}, \mathbf{Q} V \mu_{\Gamma} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Beweis Zusatz. Nach der 1. Version des Beweises ist das Problem mittels einer Beobachtertransformation auf 2.3 zurückgeführt. Da das Faraday'sche Induktionsprinzip beobachterunabhängig ist, muss es, da es in 2.3 gilt, auch hier erfüllt sein. □

Wir berechnen nun die Felder um einen Strom in einem Leiter. In 2.5 the magnetic field H has been computed. But there is also a corresponding independent electric displacement field D .

3.3 Beispiel. Sei \mathbf{Q} eine konstante Ladungsdichte auf dem Leiter Γ von 2.5. Dann ist eine zugehörige elektrische Flussdichte D , die

$$\text{div}_x [D] = \boldsymbol{\rho} := \mathbf{Q} \mu_{\Gamma} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \quad (\text{VI3.7})$$

erfüllt, gegeben durch

$$D(x) = \frac{\mathbf{Q}}{2\pi} \frac{(x_1, x_2, 0)}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\mathbf{Q}}{2\pi} \frac{x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2}{|x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2|^2} \quad \text{für } x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

Da die Lösung stationär ist, gilt natürlich $\partial_t \boldsymbol{\rho} = 0$. *Zusatz:* Auch das Faraday'sche Induktionsgesetz ist erfüllt (ohne Magnetisierung und Polarisation), denn $\text{rot}_x [D] = 0$.

Da die Situation stationär ist, sind die in 2.5 und 3.3 vorkommenden \mathbf{i} und \mathbf{Q} nicht gekoppelt, es gilt ja hier auch $\partial_t \boldsymbol{\rho} = 0$ und $\text{div}_x \mathbf{j} = 0$.

Beweis. Zur Differentialgleichung (VI3.7) im ganzen Raum ist zu sagen, dass der Beweis ähnlich verläuft wie für H im Beweis von 2.5. Wenn wir φ wie dort definieren, ist für $x \neq 0$

$$D(x) = -\mathbf{Q} (\partial_{x_1} \varphi(x_1, x_2), \partial_{x_2} \varphi(x_1, x_2), 0).$$

Dann ist für $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, \operatorname{div}_x [D] \rangle &= -\mathbf{Q} \langle \zeta, (\partial_{x_1} [\partial_{x_1} \varphi] + \partial_{x_2} [\partial_{x_2} \varphi]) \rangle \\
&= \mathbf{Q} \left(\langle \partial_{x_1} \zeta, [\partial_{x_1} \varphi] \rangle + \langle \partial_{x_2} \zeta, [\partial_{x_2} \varphi] \rangle \right) \\
&= \mathbf{Q} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1,2} \partial_{x_i} \zeta(x_1, x_2, x_3) \cdot \partial_{x_i} \varphi(x_1, x_2) \right) dL^3(x) \\
&= \mathbf{Q} \int_{\mathbb{R}} \langle \nabla_{\mathbb{R}^2} \zeta(\cdot, x_3), [\nabla_{\mathbb{R}^2} \varphi] \rangle dL^1(x_3) \\
&= -\mathbf{Q} \int_{\mathbb{R}} \langle \zeta(\cdot, x_3), \Delta_{\mathbb{R}^2} [\varphi] \rangle dL^3(x_3) \\
&= \mathbf{Q} \int_{\mathbb{R}} \zeta(0, 0, x_3) dL^3(x_3) = \langle \zeta, \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}_\Gamma \rangle .
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun einen bewegten Leiter. Der *-Beobachter finde die Situation von 2.5 vor mit der Vervollständigung in 3.3, also

$$\begin{aligned}
D^*(t^*, x^*) &= \frac{\mathbf{Q}}{2\pi} \frac{(x_1^*, x_2^*, 0)}{|x_1^*|^2 + |x_2^*|^2}, \quad \boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}_{\Gamma^*} \\
H^*(t^*, x^*) &= \frac{\mathbf{I}}{2\pi} \frac{(-x_2^*, x_1^*, 0)}{|x_1^*|^2 + |x_2^*|^2}, \quad \mathbf{j}^* = \mathbf{I} \mathbf{e}_3 \boldsymbol{\mu}_{\Gamma^*},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Gamma^* &= \{(t^*, s \mathbf{e}_3); t^*, s \in \mathbb{R}\}, \\
\langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_{\Gamma^*} \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t^*, s \mathbf{e}_3) ds dt^*.
\end{aligned}$$

Zu dem bewegten Beobachter bestehe eine Lorentz-Transformation

$$(t, x) = Y(t^*, x^*) := \mathbf{L}_c(V, Q)(t^*, x^*), \text{ also } DY = \mathbf{L}_c(V, Q)$$

wie in 3.1. In dieser Situation erhalten wir folgende Gleichungen.

3.4 Bewegter Leiter. Betrachte obige Situation von 2.5 und 3.3. Sei der Leiter nun mit Geschwindigkeit $V \in \mathbb{R}^3$ bewegt, also

$$\Gamma := Y(\Gamma^*) = \{(t, tV + s\mathbf{B}(V)^{-1}Q\mathbf{e}_3); s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Differentialgleichungen lauten in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_x [D] &= \boldsymbol{\rho} := \left(\mathbf{Q} + \frac{\mathbf{I}}{c^2} V \bullet Q \mathbf{e}_3 \right) \boldsymbol{\mu}_\Gamma, \\
-\partial_t [D] + \operatorname{rot}_x [H] &= \mathbf{j} := \left(\mathbf{Q} V + \frac{\mathbf{I}}{\gamma} \mathbf{B}(V) Q \mathbf{e}_3 \right) \boldsymbol{\mu}_\Gamma,
\end{aligned}$$

wobei

$$\langle \zeta, \boldsymbol{\mu}_\Gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, tV + s\mathbf{B}(V)^{-1}Q\mathbf{e}_3) ds dt^*.$$

Die Lösung D und H dieses Problems findet sich in (VI3.10).

Wir betrachten nun die Spezialfälle, dass $Q = \text{Id}$ und V einerseits parallel und andererseits orthogonal zum unbewegten Leiter $\Gamma^* = \{(t^*, s\mathbf{e}_3); s \in \mathbb{R}\}$ liegt.

(1) Im Fall $V \parallel \mathbf{e}_3$ ist

$$\begin{aligned} D(t, x) &= \left(Q - \frac{1}{c^2} V \bullet \mathbf{e}_3 \right) D_0(x), \\ H(t, x) &= \left(Q V \bullet \mathbf{e}_3 + \mathbf{1} \right) \mathbf{e}_3 \times D_0(x). \end{aligned}$$

(2) Im Fall $V \perp \mathbf{e}_3$ ist

$$\begin{aligned} D(t, x) &= \left(Q \text{Id} - \frac{1}{c^2} \mathbf{e}_3 \otimes V \right) D_0(x - tV) \\ H(t, x) &= B(V)^{-1} \left((Q V + \mathbf{1} \mathbf{e}_3) \times (B(V) D_0(x - tV)) \right). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$D_0(z) := \frac{\gamma \mathbb{I}_2(z)}{2\pi |B(V) \mathbb{I}_2(z)|^2},$$

wobei $\mathbb{I}_2(z) := z - z \bullet \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$ die Projektion auf die Ebene ist, die senkrecht zum Leiter steht. *Im Falle (1):* Es gilt $B(V) \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_2$ und darüberhinaus $\mathbb{I}_2(x - tV) = \mathbb{I}_2(x)$, also $D_0(x - tV) = D_0(x)$.

The function D_0 satisfies

$$-\Delta[D_0] = \mathbf{H}^1 \llcorner \Gamma_0, \quad \Gamma_0 := \mathbb{R} \mathbf{e}_3 = \{s \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3; s \in \mathbb{R}\}.$$

Beweis durch Reduktion auf 2.5. We prove this by an observer transformation to the stationary case in 2.5 and 3.3. Using the abbreviation $B := B(V)$ this is

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) \begin{bmatrix} t^* \\ x^* \end{bmatrix}, \quad DY = \mathbf{L}_c(V, \text{Id}) = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T \\ \gamma V & B \end{bmatrix},$$

hence

$$t = \gamma t^* + \frac{\gamma}{c^2} V^T x^*, \quad x = \gamma t^* V + B x^*, \quad (\text{VI3.8})$$

which in particular implies (see exercise 6.7 for $B - \frac{\gamma}{c^2} V V^T = B^{-1}$)

$$x - tV = \left(B - \frac{\gamma}{c^2} V V^T \right) x^* \quad \text{therefore} \quad x^* = B(x - tV). \quad (\text{VI3.9})$$

With this transformation we apply the transformation rules in (VI3.1)

$$\begin{aligned} D \circ Y &= \gamma B^{-1} D^* - \frac{\gamma}{c^2} B(V \times H^*), \\ H \circ Y &= \gamma V \times (B D^*) + \gamma B^{-1} H^*, \end{aligned}$$

where labeled with a star D^* and H^* are the quantities in 3.3 and 2.5,

$$D^*(x^*) = \frac{\mathbf{Q}}{2\pi} \frac{(x_1^*, x_2^*, 0)}{x_1^{*2} + x_2^{*2}} = \frac{\mathbf{Q}}{2\pi} \frac{\mathbb{I}_2 x^*}{|\mathbb{I}_2 x^*|^2},$$

$$H^*(x^*) = \frac{\mathbf{I}}{2\pi} \frac{(-x_2^*, x_1^*, 0)}{x_1^{*2} + x_2^{*2}} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_3 \times (x_1^*, x_2^*, 0)}{x_1^{*2} + x_2^{*2}} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi} \mathbf{e}_3 \times \frac{\mathbb{I}_2 x^*}{|\mathbb{I}_2 x^*|^2}.$$

With

$$D_0(z) := \frac{\gamma}{2\pi} \frac{B^{-1} \mathbb{I}_2 B z}{|\mathbb{I}_2 B z|^2}$$

the fields D and H become for $x^* = B(x - tV)$

$$\begin{aligned} D(t, x) &= B^{-1}(\gamma D^*(x^*)) - \frac{1}{c^2} B(V \times (\gamma H^*(x^*))) \\ &= \mathbf{Q} D_0(x - tV) - \frac{\mathbf{I}}{c^2} B(V \times (\mathbf{e}_3 \times (B D_0(x - tV)))) , \\ H(t, x) &= V \times (B(\gamma D^*(x^*))) + B^{-1}(\gamma H^*(x^*)) \\ &= \mathbf{Q} V \times (B^2 D_0(x - tV)) + \mathbf{I} B^{-1}(\mathbf{e}_3 \times (B D_0(x - tV))) , \end{aligned}$$

therefore we have the formulas

$$\begin{aligned} D(t, x) &= \mathbf{Q} D_0(x - tV) \\ &\quad - \frac{\mathbf{I}}{c^2} \mathbf{B}(V)(V \times (\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{B}(V) D_0(x - tV)))) \\ H(t, x) &= \mathbf{Q} V \times (\mathbf{B}(V)^2 D_0(x - tV)) \\ &\quad + \mathbf{I} \mathbf{B}(V)^{-1}(\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{B}(V) D_0(x - tV))) . \end{aligned} \tag{VI3.10}$$

We consider two cases. In both cases

$$\mathbb{I}_2 B^k = B^k \mathbb{I}_2 ,$$

so that D_0 above coincides with the definition in the statement. \square

Beweis der rechten Seite. We prove this by an observer transformation of Lorentz type $y = \mathbf{L}_c(V, Q)y^*$, which is

$$t = \gamma t^* + \frac{\gamma}{c^2} V^T Q x^* , \quad x = \gamma t^* V + \mathbf{B}(V) Q x^* . \tag{VI3.11}$$

For the right-hand side of the equation $\text{div} \mathfrak{H} = \mathbf{j}$ we have proved in (VI3.6) the following identity for \mathbf{j} with covariant test functions

$$\langle \zeta^* , \mathbf{j}^* \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} = \langle \zeta , \mathbf{j} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} \quad \text{if } \zeta^* = DY^T \zeta \circ Y . \tag{VI3.12}$$

Nun gilt mit $\mathbf{Q}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}$ und $\Gamma^* := \{(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^4; x^* = s^* \mathbf{e}_3, s^* \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbf{j}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{I} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \mu_{\Gamma^*} , \quad \langle \zeta , \mu_{\Gamma^*} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t^*, s \mathbf{e}_3) ds dt^* ,$$

also

$$\begin{aligned} \langle \zeta^*, j^* \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \zeta^*(t^*, s^* \mathbf{e}_3) \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{I} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} ds dt^* \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \zeta(Y(t^*, s \mathbf{e}_3)) \bullet (DY \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{I} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}) dt^* \right) ds. \end{aligned}$$

Now, $(t, x) = Y(t^*, s \mathbf{e}_3)$ is equivalent to

$$\begin{aligned} t &= \gamma t^* + \frac{\gamma s}{c^2} V \bullet Q \mathbf{e}_3, \\ x &= tV + s(Q \mathbf{e}_3 - \frac{\gamma s}{c^2} V \bullet Q \mathbf{e}_3 V) = tV + s \mathbf{B}(V)^{-1} Q \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

hence $dt = \gamma dt^*$ for given s . Thus the above integral equals

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, tV + s \mathbf{B}(V)^{-1} Q \mathbf{e}_3) \bullet \left(\frac{1}{\gamma} DY \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{I} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \right) ds dt = \langle \zeta, j \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)},$$

if

$$\begin{aligned} \Gamma &:= Y(\Gamma^*) = \{(t, tV + s \mathbf{B}(V)^{-1} Q \mathbf{e}_3); s, t \in \mathbb{R}\}, \\ \langle \eta, \mu_{\Gamma} \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \eta(t, tV + s \mathbf{B}(V)^{-1} Q \mathbf{e}_3) ds dt, \\ j &:= \frac{1}{\gamma} DY \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{I} \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \mu_{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{I}}{c^2} V \bullet Q \mathbf{e}_3 \\ Q V + \frac{\mathbf{I}}{\gamma} \mathbf{B}(V) Q \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \mu_{\Gamma}. \end{aligned}$$

□

Beweis Fall (1). We let $V = V_3 \mathbf{e}_3$. Then $B \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_2 B = \mathbb{I}_2$ and $\mathbb{I}_2(x - tV) = \mathbb{I}_2 x$ hence

$$D_0(x - tV) = D_0(x) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\mathbb{I}_2 x}{|\mathbb{I}_2 x|^2},$$

which means $D_0(x) \in \mathbb{I}_2(\mathbb{R}^3)$. This implies $B^k D_0(x) = D_0(x)$. Therefore

$$H = \mathbf{Q} V \times D_0(x) + \mathbf{I} B^{-1}(\mathbf{e}_3 \times D_0(x)).$$

and by exercise 6.8 and since $V = V \bullet \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$ and $B \widehat{V} = \gamma \widehat{V}$

$$B^{-1}(\mathbf{e}_3 \times D_0(x)) = \frac{1}{\gamma} (B \mathbf{e}_3) \times B D_0(x) = \mathbf{e}_3 \times D_0(x),$$

which gives the stated expression for H . By a general formula

$$B(V \times (\mathbf{e}_3 \times D_0(x))) = B(V \bullet D_0(x) \mathbf{e}_3 - V \bullet \mathbf{e}_3 D_0(x)) = -V \bullet \mathbf{e}_3 D_0(x)$$

since $V \bullet D_0(x) = 0$. This gives the expression for D . □

Beweis Fall (2). We let $V = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2$.

..... □

Beweis directly. □

Referenzen: Für eine gleichförmige bewegte Ladung siehe [84, Kap. V §38], für das Feld allgemeiner bewegter Ladungen siehe [84, Kap. VIII]. —**weitere referenzen**— For the Liénhard-Wiechert potential siehe J.D.Jackson [48, 12.11 and 14.1].

Siehe auch [Wikipedia: Liénhard-Wiechert Potential].

Wir kommen nun zurück zu der Ladung in einem Punkte. Das Liénhard-Wiechert Potential ist eine Lösung des elektromagnetischen Systems in 2.17. Wir benötigen hier eine Version des Fundamentallemmas für die Wellengleichung, wobei wir von einem sich bewegenden Punkt $t \mapsto \xi(t)$ ausgehen, dessen Geschwindigkeit \mathbf{c} nicht überschreitet, der also

$$|\dot{\xi}(t)| < \mathbf{c} \tag{VI3.13}$$

erfüllt.

3.5 Theorem. Sei $t \mapsto \xi(t)$ mit (VI3.13) und $t \mapsto m(t)$ eine gegebene Funktion. Dann ist eine Lösung ϕ von

$$\frac{1}{\mathbf{c}^2} \partial_t^2 [\phi] - \Delta[\phi] = m \mu_\xi$$

mit $\phi(t, x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ gegeben durch

$$\phi(t, x) := \frac{m(s)}{4\pi \left(1 - \frac{\xi'(s)}{\mathbf{c}} \cdot \frac{x - \xi(s)}{|x - \xi(s)|}\right)} \frac{1}{|x - \xi(s)|}$$

mit $t = s + \frac{|x - \xi(s)|}{\mathbf{c}}$.

Diese Lösung ist der Limes von glatten Lösungen zu rechten Seiten, die im Distributionssinn gegen $m \mu_\xi$ konvergieren. *Definition:* Das Maß μ_ξ ist definiert durch

$$\langle \zeta, \mu_\xi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, \xi(t)) dt$$

Beweis. Der Beweis findet sich in [21, Relativistisches Schwerfeld]. Es wird dabei vorausgesetzt, dass man glatte Funktionen ρ_ϵ hat, die für $\epsilon \rightarrow 0$ im Distributionssinn konvergieren, also $[\rho_\epsilon] \rightarrow m \mu_\xi$. Die Lösungen ϕ_ϵ von

$$\frac{1}{\mathbf{c}^2} \partial_t^2 [\phi_\epsilon] - \Delta[\phi_\epsilon] = \rho_\epsilon$$

konvergieren dann im Distributionssinn gegen ϕ . Hierbei wird wesentlich benutzt, dass $t \mapsto \xi(t)$ die Eigenschaft (VI3.13) hat. □

Es folgt

3.6 Liénhard-Wiechert Potential (1898). Sei $t \mapsto \xi(t)$ die Position des geladenen Teilchens, sei $Q \in \mathbb{R}$ dessen Ladung und $V(t) := \dot{\xi}(t)$ dessen Geschwindigkeit, die (VI3.13) erfüllt. Dann ist die Lösung $(-\Phi, A)$ von

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \partial_t^2 [\Phi] - \Delta [\Phi] &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \boldsymbol{\mu}_\xi, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 [A] - \Delta [A] &= \mu_0 Q V \boldsymbol{\mu}_\xi, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t [\Phi] + \operatorname{div} [A] &= 0,\end{aligned}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi(t, x) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(1 - \frac{V(s)}{c} \bullet \mathbf{n}(s, x)\right)} \frac{1}{|x - \xi(s)|}, \\ A(t, x) &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi \left(1 - \frac{V(s)}{c} \bullet \mathbf{n}(s, x)\right)} \frac{V(s)}{|x - \xi(s)|}, \\ \text{mit } t &= s + \frac{|x - \xi(s)|}{c}, \quad \mathbf{n}(s, x) := \frac{x - \xi(s)}{|x - \xi(s)|}.\end{aligned}$$

Remark: In literature $s = t_{ret}$ is the “retarded time” (depending on x).

Beweis. Definiere Distributionen $\boldsymbol{\rho} := Q \boldsymbol{\mu}_\xi$ und $\mathbf{j} := Q V \boldsymbol{\mu}_\xi$, so dass also

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \operatorname{div}_x \mathbf{j} = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4),$$

denn für Testfunktionen ζ

$$\begin{aligned}-\langle \zeta, \partial_t \boldsymbol{\rho} + \operatorname{div}_x \mathbf{j} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} &= \langle \partial_t \zeta, \boldsymbol{\rho} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} + \langle \nabla_x \zeta, \mathbf{j} \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} \\ &= \langle \partial_t \zeta, Q \boldsymbol{\mu}_\xi \rangle + \langle \nabla_x \zeta, Q V \boldsymbol{\mu}_\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} Q (\partial_t \zeta + \dot{\xi} \bullet \nabla_x \zeta)(t, \xi(t)) \, d(t) = 0.\end{aligned}$$

Definiere als Approximation für $\varepsilon > 0$ Funktionen

$$\boldsymbol{\rho}_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{j}_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * \mathbf{j}.$$

Hierbei ist $\varphi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon^4} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\partial_t \boldsymbol{\rho}_\varepsilon + \operatorname{div} \mathbf{j}_\varepsilon &= \partial_t (\varphi_\varepsilon * \boldsymbol{\rho}) + \operatorname{div} (\varphi_\varepsilon * \mathbf{j}) \\ &= \varphi_\varepsilon * (\partial_t \boldsymbol{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j}) = 0.\end{aligned}$$

Zu den glatten Daten $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ und \mathbf{j}_ε gibt es nach dem Theorem 3.5 Funktionen Φ_ε und $A_\varepsilon = (A_{\varepsilon 1}, A_{\varepsilon 2}, A_{\varepsilon 3})$ mit

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi_\varepsilon - \Delta \Phi_\varepsilon = \frac{\boldsymbol{\rho}_\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_\varepsilon - \Delta A_\varepsilon = \mu_0 \mathbf{j}_\varepsilon,$$

also ist, wenn F die Fundamentallösung von $\frac{1}{c^2}\partial_t F - \Delta F$ ist,

$$\Phi_\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \boldsymbol{\rho}_\epsilon(y - \bullet), F \rangle, \quad A_\epsilon(y) = \mu_0 \langle \mathbf{j}_\epsilon(y - \bullet), F \rangle.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi_\epsilon(t, x) + \operatorname{div} A_\epsilon(t, x) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \langle \partial_t \boldsymbol{\rho}_\epsilon((t, x) - \bullet), F \rangle + \mu_0 \langle \operatorname{div} \mathbf{j}_\epsilon((t, x) - \bullet), F \rangle \\ &= \mu_0 \langle \partial_t \boldsymbol{\rho}_\epsilon((t, x) - \bullet) + \operatorname{div} \mathbf{j}_\epsilon((t, x) - \bullet), F \rangle = 0, \end{aligned}$$

also ist auch die Lorenz-Bedingung erfüllt. Nach 3.5 konvergieren diese ϵ -Lösungen gegen die gewünschte Lösung mit der Lorenz-Bedingung. Es ist also

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(1 - \frac{\xi'(s)}{c} \bullet \frac{x - \xi(s)}{|x - \xi(s)|}\right)} \frac{1}{|x - \xi(s)|} \\ A(t, x) &= \frac{\mu_0 Q \xi'(s)}{4\pi \left(1 - \frac{\xi'(s)}{c} \bullet \frac{x - \xi(s)}{|x - \xi(s)|}\right)} \frac{1}{|x - \xi(s)|}, \end{aligned}$$

wobei $s = \widehat{s}(t, x)$ mit $t = s + \frac{1}{c}|x - \xi(s)|$. □

Folgerung: Die Lösungen für E und B sind

4 Magnetohydrodynamik (MHD)

“Magnetohydrodynamics (MHD) couples Maxwells equations of electromagnetism with hydrodynamics to describe the macroscopic behavior of conducting fluids such as plasmas.” [Introduction_to_MHD.pdf]

Referenzen: The equations of MHD you find in Priest [59, 2 The Basis Equations of MHD]. “The basic theory of magnetohydrodynamics (MHD) is summarised by Cowling in his book on the subject.” See Cowling [104].

Wir betrachten zunächst den Limes $\mathbf{c} \rightarrow \infty$ für Lösungen der Elektrodynamik, und zwar untersuchen wir nur den elektrischen Fall ohne Magnetisierung und erhalten so den elektrischen Teil der Magnetohydrodynamik. Außerdem benutzen wir als Approximation des klassischen Falles nur den Lorentz-Fall (*en.*: Lorentz frame), d.h. $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\mathbf{c}}$ und die Koordinaten $y = (t, x)$. Es gilt die fundamentale Gleichung

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{\mathbf{c}^2} \rightarrow 0,$$

die im Limes gegen 0 konvergiert, wobei μ_0 im Limes positiv bleibt. Also wird der Fall betrachtet, dass auch $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. Da E einen Grenzwert besitzt, folgt somit $D = \varepsilon_0 E \rightarrow 0$. Außerdem ist $B = \mu_0 H$, wobei also die Konstante μ_0 im Limes bleibt. Daraus folgt, siehe 4.1, dass

$$\varrho^{el} := \frac{\boldsymbol{\varrho}}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \mathbf{j}^{el} := \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{VI4.1})$$

einen Limes besitzen. Wir erhalten also Folgendes im Limes $\mathbf{c} \rightarrow \infty$.

4.1 Ampère’s circuital law. Es gilt im Limes

$$\operatorname{div}_x E = \varrho^{el}, \quad \operatorname{rot}_x B = \mathbf{j}^{el}.$$

und es ist $\operatorname{div}_x \mathbf{j}^{el} = 0$. *Hinweis:* Während ϱ^{el} und \mathbf{j}^{el} in (VI4.1) die Größen für $\mathbf{c} < \infty$ sind, sind hier die Größen im Limes $\mathbf{c} = \infty$ zu verstehen.

Beweis. Wegen $D = \varepsilon_0 E$ und $B = \mu_0 H$ lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x (\varepsilon_0 E) &= \boldsymbol{\varrho}, \\ -\partial_t (\varepsilon_0 E) + \operatorname{rot}_x \left(\frac{1}{\mu_0} B \right) &= \mathbf{j} \end{aligned}$$

Dann ist mit ϱ^{el} und \mathbf{j}^{el} von (VI4.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x E &= \frac{\boldsymbol{\varrho}}{\varepsilon_0} =: \varrho^{el}, \\ \mathbf{j}^{el} = \mu_0 \mathbf{j} &= -\partial_t (\mu_0 \varepsilon_0 E) + \operatorname{rot}_x B = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathbf{c}^2}\right) + \operatorname{rot}_x B, \end{aligned}$$

und damit im Limes die behaupteten Differentialgleichungen für E und B . Außerdem gilt

$$\mu_0 \mathbf{j} = \begin{bmatrix} \mu_0 \varrho \\ \mu_0 \mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 \varepsilon_0 \varrho^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{c}^2} \varrho^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix},$$

also

$$0 = \mu_0 \operatorname{div}_y \mathbf{j} = \frac{1}{\mathbf{c}^2} \partial_t \varrho^{el} + \operatorname{div}_x \mathbf{j}^{el},$$

also im Limes $\operatorname{div}_x \mathbf{j}^{el} = 0$. Die folgt auch aus der bewiesenen Differentialgleichung für B

$$\operatorname{div}_x \mathbf{j}^{el} = \operatorname{div}_x \operatorname{rot}_x B = 0$$

wegen $\operatorname{div}_x \operatorname{rot}_x = 0$. □

The Faraday's law in the original version is used.

4.2 Faraday's induction law. These laws are

$$\operatorname{div}_x B = 0, \quad \partial_t B + \operatorname{rot}_x E = 0,$$

and they stay in the classical limit. Also the equivalence of these equations with the 4-vector field $\underline{A} = (-\Phi, A)$ satisfying

$$E = -\nabla_x \Phi - \partial_t A, \quad B = \operatorname{rot}_x A$$

in a simply connected domain, remains the same in the limit. *Remark:* The Lorenz condition becomes $\operatorname{div}_x A = 0$.

Beweis Remark. By 2.16 the Lorenz condition is $\frac{1}{\mathbf{c}^2} \partial_t \Phi + \operatorname{div}_x A = 0$. Since Φ and A have limits we get in the limit $\mathbf{c} \rightarrow \infty$ that $\operatorname{div}_x A = 0$. □

Altogether Maxwell equations become

Maxwell-Gleichungen im MHD-Limes:

$$\operatorname{div}_x E = \varrho^{el}, \quad \operatorname{rot}_x B = \mathbf{j}^{el}$$

$$\operatorname{div}_x B = 0, \quad \partial_t B + \operatorname{rot}_x E = 0$$

(VI4.2)

E electric field, B magnetic flux density,
 ϱ^{el} electric charge, $\mathbf{j}^{el} = \mu_0 \mathbf{j}$ electric current.

In Termen von $\underline{A} = (-\Phi, A)$ we obtain the result in 6.9.

Referenzen: See Davidson [33, 2 The Governing Equations of Electrodynamics].

As transformation rule we take a Lorentz transformation as in 3.1 and insert the definition of E and B . One obtains

4.3 Transformation rule. The transformation rules for E and B and for ϱ^{el} and \mathbf{j}^{el} are, if Y is a Newton transformation and writing $V = \dot{X}$,

$$\begin{aligned} E \circ Y &= QE^* - V \times QB^*, & \varrho^{el} \circ Y &= \varrho^{el*} + V \bullet Q \mathbf{j}^{el*} + (Q^T \dot{Q}) \bullet \mathcal{R}(B^*), \\ B \circ Y &= QB^*, & \mathbf{j}^{el} &= Q \mathbf{j}^{el*}. \end{aligned}$$

This we show, if $V = \text{const}$, as a consequence of 3.1 where in the limit the Lorentz transformation becomes a Galilei transformation.

Beweis mittels 3.1. The equations in 3.1

$$\begin{aligned} D \circ Y &= \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q D^* - \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{B}(V) (V \times Q H^*), \\ H \circ Y &= \gamma V \times (\mathbf{B}(V) Q D^*) + \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q H^*, \end{aligned}$$

become with $D = \varepsilon_0 E$ and $B = \mu_0 H$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E \circ Y &= \varepsilon_0 \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q E^* - \frac{\gamma}{\mu_0 c^2} \mathbf{B}(V) (V \times Q B^*), \\ \frac{1}{\mu_0} B \circ Y &= \varepsilon_0 \gamma V \times (\mathbf{B}(V) Q E^*) + \frac{1}{\mu_0} \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q B^*, \end{aligned}$$

also wegen $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$\begin{aligned} E \circ Y &= \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q E^* - \gamma \mathbf{B}(V) (V \times Q B^*), \\ B \circ Y &= \frac{\gamma}{c^2} V \times (\mathbf{B}(V) Q E^*) + \gamma \mathbf{B}(V)^{-1} Q B^*. \end{aligned}$$

Nun können wir zum Limes $c \rightarrow \infty$ übergehen, wobei natürlich gilt, dass $\gamma \rightarrow 1$ und $\mathbf{B}(V) \rightarrow \text{Id}$. Weiter gilt in 3.1

$$\begin{aligned} \varrho \circ Y &= \gamma \varrho^* + \frac{\gamma}{c^2} V \bullet (Q \mathbf{j}^*), \\ \mathbf{j} \circ Y &= \gamma \varrho^* V + \mathbf{B}(V) Q \mathbf{j}^*. \end{aligned} \tag{VI4.3}$$

Wenn man nun $\varrho = \varepsilon_0 \varrho^{el}$ und $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{j}^{el}$ schreibt, erhält man

$$\begin{aligned} \varrho^{el} \circ Y &= \gamma \varrho^{el*} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \mu_0 c^2} V \bullet (Q \mathbf{j}^{el*}), \\ \mathbf{j}^{el} \circ Y &= \varepsilon_0 \mu_0 \gamma \varrho^{el*} V + \mathbf{B}(V) Q \mathbf{j}^{el*}, \end{aligned}$$

und daraus mit $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ im Limes die Behauptung. \square

Beweis allgemeiner Fall. Wir haben kein Analogon zu 3.1 für variables V bewiesen, das wird noch nachgetragen, ggf. in [21]. Eigentlich kommt (VI4.3) aus der Transformationsformel (VI2.4), die lautet $\mathbf{j} \circ Y = D Y \mathbf{j}^*$ und im Lorentz-Fall, also für $D Y = \text{const}$,

$$\begin{bmatrix} \varrho \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} \circ Y = D Y \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \mathbf{j}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c^2} V^T Q \\ \gamma V & \mathbf{B}(V) Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho^* \\ \mathbf{j}^* \end{bmatrix},$$

oder mit (VI4.1), d.h. $\boldsymbol{\rho} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\rho}^{el}$ und $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{j}^{el}$,

$$\frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{c}^2} \boldsymbol{\rho}^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix} \circ Y = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \boldsymbol{\rho}^{el} \\ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix} \circ Y = DY \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \boldsymbol{\rho}^{el*} \\ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{j}^{el*} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} DY \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{c}^2} \boldsymbol{\rho}^{el*} \\ \mathbf{j}^{el*} \end{bmatrix}.$$

Indem wir diese Gleichung mit der Matrix

$$\mu_0 \begin{bmatrix} \mathbf{c}^2 & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix}$$

von links multiplizieren, also

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix} \circ Y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^2 & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} DY \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{c}^2} \boldsymbol{\rho}^{el*} \\ \mathbf{j}^{el*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma V^T Q \\ \frac{\gamma}{\mathbf{c}^2} V & \mathbf{B}(V) Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^{el*} \\ \mathbf{j}^{el*} \end{bmatrix},$$

ergibt sich daraus im Limes $\mathbf{c} \rightarrow \infty$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix} \circ Y = Z \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^{el*} \\ \mathbf{j}^{el*} \end{bmatrix}, \quad Z := \begin{bmatrix} 1 & V^T Q \\ 0 & Q \end{bmatrix}. \quad (\text{VI4.4})$$

Da V und Q konstant sind, ist diese Identität mit der Behauptung identisch.

Wir werden nun beliebige Newton-Transformationen Y zulassen und definieren Z mit Hilfe von $V = \dot{X}$ und $Q = D_{x^*} X$. Es folgt ein Beweis des Satzes, der sich auf das Ergebnis in (I5.11) stützt. Hierzu schreiben wir die Ampère'schen Differentialgleichungen der MHD als System

$$\text{div}_x \begin{bmatrix} E \\ \mathcal{R}(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{div}_x E \\ \text{div}_x \mathcal{R}(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix} \quad (\text{VI4.5})$$

oder als schwache Gleichung für Testfunktionen (φ, ζ)

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left((\partial_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \zeta \end{bmatrix}) \bullet \mathbf{0} + (D_x \begin{bmatrix} \varphi \\ \zeta \end{bmatrix}) \bullet \begin{bmatrix} E \\ \mathcal{R}(B) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi \\ \zeta \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix} \right) dL^4 = 0$$

mit der Maßgabe, dass die Testfunktionen mit der Regel

$$\begin{bmatrix} \varphi^* \\ \zeta^* \end{bmatrix} = Z^T \begin{bmatrix} \varphi \\ \zeta \end{bmatrix} \circ Y$$

transformieren. Nach (I5.11) ist also (VI4.5) objektiv, falls die folgenden Transformationsregeln (es ist $J = \det D_{x^*} X = 1$ und $u = 0$)

$$q_i \circ Y = \sum_j Q_{ij} Z q_j^*, \quad \mathbf{r} \circ Y = \sum_j Z'_{x_j^*} q_j^* + Z \mathbf{r}^*$$

$$q_i := \begin{bmatrix} E_i \\ (\mathcal{R}(B)_{ki})_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^{el} \\ \mathbf{j}^{el} \end{bmatrix}, \quad Z := \begin{bmatrix} 1 & V^T Q \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

gelten. Since

$$Z'_{x_j^*} = \begin{bmatrix} 0 & V'_{x_j^* \text{T}} Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V'_{x_j^* \text{T}} Q e_k = \sum_i V'_{i x_j^*} Q_{ik} = \sum_i \dot{Q}_{ij} Q_{ik} = (Q^{\text{T}} \dot{Q})_{kj}$$

we get

$$\varrho^{el} \circ Y = (Q^{\text{T}} \dot{Q}) \bullet \mathcal{R}(B^*) + \varrho^{el*} + V^{\text{T}} Q j^{el*}, \quad j^{el} \circ Y = Q j^{el*},$$

and the assertions for E and $\mathcal{R}(B)$. \square

Soweit der Limes in dem elektrischen Teil. Darüberhinaus verlangt die MHD die Kopplung mit den üblichen Gleichungen von Masse und Impuls, und diese Kopplung geschieht in dem Kraftterm. Da wir hier im klassischen Fall sind, besteht die Verbindung in der

4.4 Newton- und Lorentz-Kraft. Es wird angenommen, dass der Kraftterm gegeben ist durch

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{fict} + \mathbf{g} \varrho \nabla \phi + \mathbf{j} \times B.$$

Dabei ist $\mathbf{r} = 0$ und \mathbf{f}_{fict} ist die Scheinkraft, die vom Beobachter abhängig ist, und als objektive Vektoren

- $\mathbf{g} \varrho \nabla \phi$ die **Newton-Kraft**, die von der Gravitationsgleichung $-\Delta \phi = \varrho$ induziert wird.
- $\mathbf{j} \times B$ die **Lorentz-Kraft**, die von dem Ampère'schen Durchflutungs-gesetz unter Weglassen der Polarisation induziert wird.

Da hier Übergangskoeffizienten \mathbf{g} und 1 benötigt werden, beweisen wir zunächst folgendes allgemeine Theorem.

4.5 Dimensionstheorem. Ein allgemeines System, das erfüllt ist für Testfunktionen, die einen kovarianten Vektor darstellen, ist im klassischen Fall (und auch im Lorentz-Fall)

$$\begin{aligned} \partial_t(\square[*]) + \operatorname{div}_x\left(\square\left[\frac{*m}{s}\right]\right) &= \square\left[\frac{*}{s}\right], \\ \partial_t\left(\square\left[\frac{*m}{s}\right]\right) + \operatorname{div}_x\left(\square\left[\frac{*m^2}{s^2}\right]\right) &= \square\left[\frac{*m}{s^2}\right]. \end{aligned}$$

Da ∂_t mit der Dimension $[\frac{1}{s}]$ und div_x mit der Dimension $[\frac{1}{m}]$ versehen wird, ist das System konsistent bei jeder festen Wahl von $[*]$. Wird in dem System eine Größe \square mit Maßeinheiten angegeben, so sind damit die Maßeinheiten aller Größen \square festgelegt.

Beim Masse-Impulssystem

$$\begin{aligned}\partial_t(\varrho[*]) + \operatorname{div}_x(\varrho v \left[\frac{*m}{s} \right]) &= \mathbf{r} \left[\frac{*}{s} \right], \\ \partial_t(\varrho v \left[\frac{*m}{s} \right]) + \operatorname{div}_x((\varrho v v^T + \Pi) \left[\frac{*m^2}{s^2} \right]) &= \mathbf{f} \left[\frac{*m}{s^2} \right]\end{aligned}\quad (\text{VI4.6})$$

setzen wir

$$* = \frac{kg}{m^3}, \quad \text{also} \quad \varrho \left[\frac{kg}{m^3} \right], \quad v \left[\frac{m}{s} \right],$$

und damit ist gegeben

$$\mathbf{r} \left[\frac{kg}{m^3 s} \right], \quad \Pi = (p\text{Id} - S) \left[\frac{kg}{m s^2} \right], \quad \mathbf{f} \left[\frac{kg}{m^2 s^2} \right].$$

Bei Ampère's Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned}\partial_t(0[*]) + \operatorname{div}_x(D \left[\frac{*m}{s} \right]) &= \boldsymbol{\varrho} \left[\frac{*}{s} \right], \\ \partial_t(-D \left[\frac{*m}{s} \right]) + \operatorname{div}_x(\mathcal{R}(H) \left[\frac{*m^2}{s^2} \right]) &= \mathbf{j} \left[\frac{*m}{s^2} \right]\end{aligned}\quad (\text{VI4.7})$$

setzen wir

$$\boldsymbol{\varrho} \left[\frac{As}{m^3} \right], \quad \text{also} \quad * = \frac{As^2}{m^3},$$

und damit ist gegeben

$$D \left[\frac{As}{m^2} \right], \quad H \left[\frac{A}{m} \right], \quad \mathbf{j} \left[\frac{A}{m^2} \right].$$

Der einzige Unterschied bei den Massendichten besteht darin, dass bei Ampère As (Ampère-Sekunden) statt bei Masse-Impuls kg benutzt werden.

Wenden wir dies auf die MHD-Gleichungen an, so ergibt sich, wenn wir μ_0 aus (VI2.15) nehmen,

$$\begin{aligned}B = \mu_0 H \text{ hat das Maß } \frac{kg m}{A^2 s^2} \cdot \frac{A}{m} &= \frac{kg}{A s^2} \\ \mathbf{j} \times B \text{ hat das Maß } \frac{A}{m^2} \cdot \frac{kg}{A s^2} &= \frac{kg}{m^2 s^2},\end{aligned}$$

also hat $\mathbf{j} \times B$ dasselbe Maß wie die Kraftdichte \mathbf{f} in der Masse-Impuls Gleichung, deshalb ist der Faktor 1 zulässig. Nun zu der Schwerkraft. Die Gravitationsgleichung ist

$$\partial_t(0[*]) + \operatorname{div}_x(-\nabla_x \phi \left[\frac{*m}{s} \right]) = \varrho \left[\frac{*}{s} \right] \quad (\text{VI4.8})$$

und von oben haben wir

$$\varrho \left[\frac{kg}{m^3} \right], \quad \text{also} \quad * = \frac{kg s}{m^3}, \quad \text{somit} \quad \nabla_x \phi \left[\frac{kg}{m^2} \right],$$

und damit hat

$$\varrho \nabla_x \phi \text{ das Ma\ss } \frac{kg^2}{m^5},$$

also hat, mit $\mathfrak{g} = 4\pi G$ von (I3.13),

$$\mathfrak{g} \varrho \nabla_x \phi \text{ das Ma\ss } \frac{m^3}{kg s^2} \cdot \frac{kg^2}{m^5} = \frac{kg}{m^2 s^2}$$

das gleiche Ma\ss wie wie die Kraftdichte \mathbf{f} in der Masse-Impuls Gleichung, daher ist der Faktor \mathfrak{g} der richtige. Dies rechtfertigt die Aussage in 4.4. Mit den Masse-Impuls Gleichungen von Abschnitt II.3 sind die Magnetohydrodynamik-Gleichungen im Fall $\mathbf{r} = 0$ gleich

Magnetohydrodynamik:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}_x(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathfrak{g} \varrho \nabla \phi + \mathbf{j} \times B + \mathbf{f}_{fict}, \\ -\Delta \phi &= \varrho, \\ \operatorname{rot}_x B &= \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}_x B = 0, \\ \operatorname{div}_x E &= \varrho^{el}, \quad \partial_t B + \operatorname{rot}_x E = 0 \end{aligned}$$

\mathbf{j} erf\u00fcllt ggf. das Ohm'sche Gesetz

(VI4.9)

Es fehlt Energiegleichung und Entropieprinzip

Zum Ohm'schen Gesetz siehe den n\u00e4chsten Abschnitt. Dann lassen sich nach 5.2 die Gleichungen der MHD mit Ohm'schen Gesetz schreiben als

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}_x(\varrho v v^T + \Pi) &= \mathfrak{g} \varrho \nabla \phi + \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot}_x B) \times B + \mathbf{f}_{fict}, \\ -\Delta \phi &= \varrho, \\ \partial_t B - \operatorname{rot}_x(v \times B) - \frac{1}{\mu_0 \sigma_{Ohm}} \Delta_x B &= 0, \quad \operatorname{div}_x B = 0. \end{aligned}$$
(VI4.10)

Die Gleichung $\operatorname{div}_x E = \varrho^{el}$ und auch $\operatorname{rot}_x B = \mu_0 \mathbf{j}$ bleibt hierbei unber\u00fccksichtigt. Zusammen mit dem Ohm'schen Gesetz $\mathbf{j} = \sigma_{Ohm}(E + v \times B)$, was ja in (VI4.10) auch nicht als Gleichung auftritt, lassen sich aus B und v die Gr\u00f6\u00dfen E , ϱ^{el} und $\mu_0 \mathbf{j}$ berechnen.

Für die Gleichungen der Magnetohydrodynamik gibt es im Wesentlichen zwei Anwendungen, einmal ist dies die Untersuchung der Materieströme am Rande der heißen Sonne, zum anderen die Kernverschmelzung, die auf der Erde international betrieben wird.



Abb. 4: Die Sonne nach 'Ingrid Science'

Im Weltall ist natürlich die Massenanziehung, so wie sie in den Gleichungen formuliert ist, wesentlich.

Auf der Erdoberfläche wird $\mathbf{g}\nabla\phi \approx \mathbf{g}\nabla\phi_{Erde} \approx -\vec{g}_{Erde} = -g_{Erde}e$ genommen (siehe Ende des Abschnittes I.4), wobei e die nach außen zeigende Einheitsnormale und g_{Erde} der Betrag der Erdanziehungskraft ist. Dies deshalb, weil $\phi \approx \phi_{Erde}$, wobei ϕ_{Erde} das nur durch die Erde hervorgerufene Anziehungspotential ist. Außerdem ist oft $\mathbf{r} = 0$, und \mathbf{f}_{fict} ist vernachlässigbar (oder ein Teil ist in der Anziehungskraft der Erde enthalten, die ja ohnehin nur als Konstante genommen wird). Diese Gleichungen werden zum Beispiel gebraucht bei der Berechnung der Lösung in einem **Tokamak**, siehe [Wikipedia: Tokamak] "Das Wort ist eine Transliteration des russischen то-камак, eine Abkürzung für тороидалнаја камера в магнитных катушк-ках (toroidalnaja kamera w magnitnych katuschkach) übersetzt 'Toroidale Kammer in Magnetspulen'. Auch verweist die Silbe ток auf Strom und damit den Stromfluss im Plasma, die entscheidende Besonderheit dieses Einschlusskonzepts."

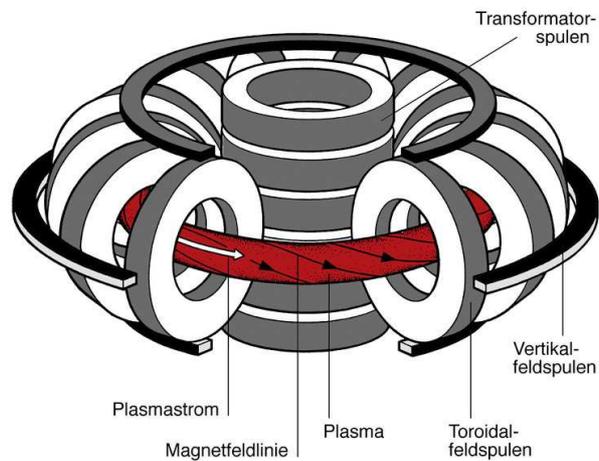


Abb. 5: “Das Spulensystem und Magnetfeld eines Tokamaks” ©IPP

“Das Max-Planck-Institut für Plasmaphysik ist das einzige Fusionszentrum weltweit, das beide Experimentiertypen untersucht - in Garching den Tokamak ASDEX Upgrade, in Greifswald den Stellarator Wendelstein 7-X. Dies ermöglicht den direkten Vergleich.” IPP [www.ipp.mpg.de]

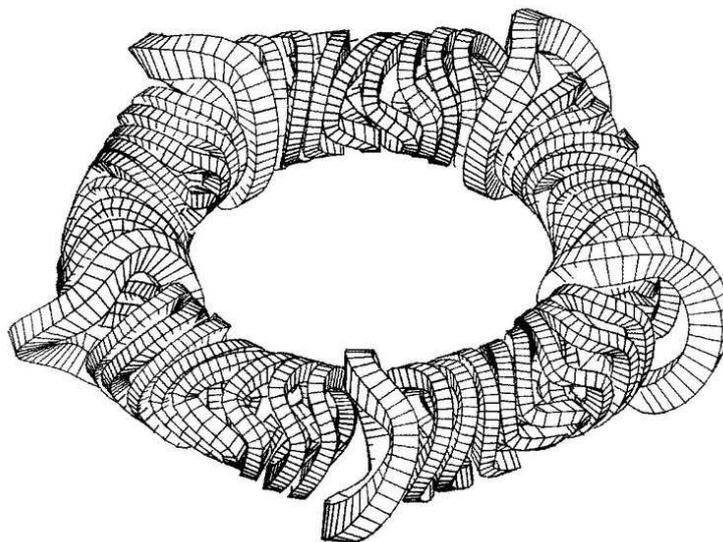


Abb. 6: “Spulensystem des ersten optimierten Stellarators” IPP

5 Ohm'sches Gesetz

Referenzen: Zur Geschichte siehe [Wikipedia: Ohmsches Gesetz], and see [Wikipedia: Ohm's Law]. See Davidson [33, 2.2 Ohm's Law and the Volumetric Lorentz force].

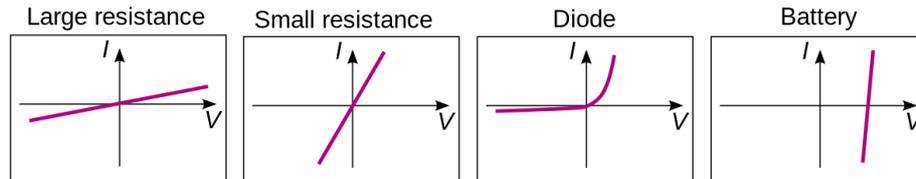


Abb. 7: “The IV curves of four devices: Two resistors, a diode, and a battery. The two resistors follow Ohm’s law: The plot is a straight line through the origin. The other two devices do not follow Ohm’s law.” Aus Wikipedia

Für eine ruhende Probe ist das Ohm’sche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma_{Ohm} \mathbf{E} \quad (\text{in Schaltkreisnotation } I = \frac{U}{R}),$$

ein Gesetz, das z.B. bei einem Strom in Leitungen mit einer Konstanten σ_{Ohm} erfüllt ist, wobei der Kehrwert den **Widerstand** (*en: Resistance*) darstellt (in Abb. 7 ist V die Spannung U). Da aber nur $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (siehe 5.1), wobei \mathbf{v} eine Geschwindigkeit ist, wie \mathbf{j} ein objektiver Vektor ist, ist

$$\mathbf{j} = \sigma_{Ohm} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{VI5.1})$$

wobei σ_{Ohm} ein objektiver Skalar ist, eine gültige konstitutive Gleichung für alle Beobachter nach Abschnitt II.4. Es ist \mathbf{v} die Geschwindigkeit, mit der sich die Probe bewegt, und diese Geschwindigkeit ist auch vom Beobachter abhängig.

5.1 Lemma. Wenn \mathbf{v} eine Geschwindigkeit ist,

$$\begin{aligned} &\text{sind } \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}, \quad \mathbf{j}^{el} \text{ objektive Vektoren,} \\ &\text{und } \varrho^{el} - \mathbf{v} \bullet \mathbf{j}^{el} - D\mathbf{v} \bullet \mathcal{R}(\mathbf{B}) \text{ ist objektiver Skalar.} \end{aligned}$$

Beweis. Dass \mathbf{B} und $\mathbf{j}^{el*} = \mu_0 \mathbf{j}$ objektive Vektoren sind, wurde in 4.3 gezeigt. Ist \mathbf{v} eine Geschwindigkeit, also $\mathbf{v} \circ Y = V + Q\mathbf{v}^*$, so folgt aus 4.3, dass

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \circ Y &= Q\mathbf{E}^* - V \times Q\mathbf{B}^* + (V + Q\mathbf{v}^*) \times Q\mathbf{B}^* \\ &= Q\mathbf{E}^* + (Q\mathbf{v}^*) \times Q\mathbf{B}^* = Q(\mathbf{E}^* + \mathbf{v}^* \times \mathbf{B}^*), \end{aligned}$$

also ist $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ein objektiver Vektor. Nun ist nach 4.3

$$\varrho^{el} \circ Y = \varrho^{el*} + V \bullet Q\mathbf{j}^{el*} + (Q^T \dot{Q}) \bullet \mathcal{R}(\mathbf{B}^*)$$

und es gilt $(v \bullet j^{el}) \circ Y = V \bullet j^{el} + (Qv^*) \bullet (Qj^{el*}) = V \bullet Qj^{el*} + v^* \bullet j^{el*}$, sowie wegen $Dv \circ Y = \dot{Q}Q^T + QDv^*Q^T$ und $\mathcal{R}(B) \circ Y = QR(B^*)Q^T$ gilt insgesamt, dass $\rho^{el} - v \bullet j^{el} - Dv \bullet \mathcal{R}(B)$ ein objektiver Skalar ist. \square

Ohm's law implies that the formula $\partial_t B + \text{rot}_x E = 0$ as part of Maxwell equations can be written in terms of B only.

5.2 Evolution equation for B . The law of Ohm implies

$$\partial_t B - \text{rot}_x(v \times B) - \frac{1}{\mu_0 \sigma_{Ohm}} \Delta_x B = 0$$

in Maxwell equations.

Beweis. Write Ohm's law (VI5.1) as

$$E + v \times B = \frac{1}{\sigma_{Ohm}} j = \frac{1}{\mu_0 \sigma_{Ohm}} \text{rot}_x B$$

by Ampères law $\text{rot}_x B = \mu_0 j$. Then from Faraday's law

$$\partial_t B = -\text{rot}_x E = \text{rot}_x(v \times B) - \frac{1}{\mu_0 \sigma_{Ohm}} \text{rot}_x \text{rot}_x B,$$

that is

$$\partial_t B - \text{rot}_x(v \times B) + \frac{1}{\mu_0 \sigma_{Ohm}} \text{rot}_x \text{rot}_x B = 0.$$

Since by 6.4 we have $\text{rot}_x \text{rot}_x B = -\Delta_x B + \nabla_x \text{div}_x B$ and $\text{div}_x B = 0$ also by Faraday's law. Therefore we get the assertion. \square

will be continued

.....

6 Aufgaben

Beobachtertransformationen

6.1 Klassische Beobachter. Für eine klassische (siehe Abschnitt II.1) Beobachtertransformation gilt $G_\infty = DY G_\infty DY^T$.

Lösung. Wir können die Ableitung von Y schreiben als

$$DY = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V & Q \end{bmatrix},$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Maxwell Gleichungen

6.2 Konstanten. Bestimme Konstanten $\varepsilon^{ijk} \in \{-1, 0, 1\}$, so dass für jedes Vektorfeld $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} B = \sum_{i,j,k=1,2,3} \varepsilon^{ijk} \partial_i B_j \mathbf{e}_k.$$

Hinweis: Es ist $\varepsilon^{123} = 1$ und $(\varepsilon^{ijk})_{i,j,k=1,2,3}$ antisymmetrisch in allen zwei Argumenten.

6.3 Lemma. For $v, w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$v \times \operatorname{rot} w + (v \bullet \nabla) w = (\nabla w) v \quad \left(= \sum_i v_i \nabla w_i \right),$$

although $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{a} \bullet \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \vec{b}$ for vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

Remark: ∇w ist definiert wie in der Bemerkung zu I.1.2(5).

Lösung. Es ist

$$\begin{aligned} v \times \operatorname{rot} w &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 \\ \partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 \\ \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) - v_3(\partial_3 w_1 - \partial_1 w_3) \\ v_3(\partial_2 w_3 - \partial_3 w_2) - v_1(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) \\ v_1(\partial_3 w_1 - \partial_1 w_3) - v_2(\partial_2 w_3 - \partial_3 w_2) \end{bmatrix} \\ &= -(v \bullet \nabla) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \partial_1 w_1 + v_2 \partial_1 w_2 + v_3 \partial_1 w_3 \\ v_2 \partial_2 w_2 + v_3 \partial_2 w_3 + v_1 \partial_2 w_1 \\ v_3 \partial_3 w_3 + v_1 \partial_3 w_1 + v_2 \partial_3 w_2 \end{bmatrix} = -(v \bullet \nabla) w + \sum_i v_i \nabla w_i, \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung. Für Vektoren ist $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{a} \bullet \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \otimes \vec{a}) \vec{c} = \vec{b} \vec{a}^T \vec{c}$ die entsprechende Formel. \square

6.4 Lemma. For $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} u = -\Delta u + \nabla \operatorname{div} u,$$

and for any test function $\zeta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot} \zeta \bullet \operatorname{rot} u \, dL^3 = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \zeta \bullet \nabla u - \operatorname{div} \zeta \cdot \operatorname{div} u) \, dL^3.$$

Lösung. The differential equation follows from the integral relation with integration by parts. For the integrand one computes

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \zeta \bullet \operatorname{rot} u &= \sum_{i < j} (\partial_j \zeta_i - \partial_i \zeta_j)(\partial_j u_i - \partial_i u_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial_j \zeta_i - \partial_i \zeta_j)(\partial_j u_i - \partial_i u_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial_j \zeta_i \partial_j u_i + \partial_i \zeta_j \partial_i u_j - \partial_j \zeta_i \partial_i u_j - \partial_i \zeta_j \partial_j u_i) \\ &= \sum_{i,j} \partial_j \zeta_i \partial_j u_i - \sum_{i,j} \partial_j \zeta_i \partial_i u_j = \nabla \zeta \bullet \nabla u - \sum_{i,j} \partial_j \zeta_i \partial_i u_j \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j \zeta_i \partial_i u_j \, dL^3 &= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i \partial_j \zeta_i \cdot u_j \, dL^3 \\ &= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j \partial_i \zeta_i \cdot u_j \, dL^3 = \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i \zeta_i \partial_j u_j \, dL^3 = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \zeta \cdot \operatorname{div} u \, dL^3, \end{aligned}$$

which gives the result. \square

6.5 Eichinvarianz. Beweise mit Hilfe von Differentialformen die Eichinvarianz 2.12.

Lösung. Für $E = \sum_{k,l \geq 0} E_{kl} dy_k \wedge dy_l$ ist die Voraussetzung $dE = 0$, siehe den Beweis von 2.10(2). Daraus folgt nach dem Poincaré-Lemma, dass es ein $A = \sum_{k \geq 0} A_k dy_k$ gibt mit $dA = E$. Gibt es jetzt noch ein anderes A' mit $dA' = E$, so folgt $d(A' - A) = 0$. Also gibt es nach dem Poincaré-Lemma eine Funktion f mit $df = A' - A$. Daher ist $A' = A + df$ wie in 2.12 gesagt. \square

Bewegte Ladungen

Now some properties about the boost operator.

6.6 Iterated boost operator. For any $V \in \mathbb{R}^3$ with $V \neq 0$ and $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{B}(V)^k = \text{Id} + (\gamma^k - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T.$$

Lösung. Let $V \neq 0$ and let \widehat{V} be the unit vector in direction V and define

$$B_a := \text{Id} + (a - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T \quad \text{for } a \in \mathbb{R}.$$

Then

$$\begin{aligned} B_a B_b &= (\text{Id} + (a - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T)(\text{Id} + (b - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T) \\ &= \text{Id} + ((a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1))\widehat{V}\widehat{V}^T = \text{Id} + (ab - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T = B_{ab}, \end{aligned}$$

that is, $B_a B_b = B_{ab}$. Then inductively $B_a^k = B_{a^k}$ for $k \in \mathbb{N}$ and $B_a^{-1} = B_{1/a}$. \square

6.7 Inverse des Boostoperators. Für $V \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathbf{B}(V) - \frac{\gamma}{c^2} V V^T = \mathbf{B}(V)^{-1}.$$

Lösung. Es gilt für $V \neq 0$

$$\mathbf{B}(V) - \frac{\gamma}{c^2} V V^T = \text{Id} + (\gamma - 1 - \frac{\gamma|V|^2}{c^2})\widehat{V}\widehat{V}^T = \text{Id} + (\frac{1}{\gamma} - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T$$

nach Aufgabe 6.6. \square

6.8 Boost operator and cross product. For all $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{B}(V)z_2) \times (\mathbf{B}(V)z_1) = \gamma \mathbf{B}(V)^{-1}(z_2 \times z_1).$$

Lösung. In section II.2 we had defined $\mathbf{B}(V) = \text{Id} + (\gamma - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T$. And here we start with the general well known formula

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \bullet \vec{c}) \vec{a}$$

which implies for $V \neq 0$ letting \widehat{V} the unit vector in the direction of V , and for $z := z_2 \times z_1$ with $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$

$$(\widehat{V} \times z) \times \widehat{V} = z - z \bullet \widehat{V} \widehat{V} \quad \text{and} \quad z \times \widehat{V} = (z_2 \bullet \widehat{V})z_1 - (z_1 \bullet \widehat{V})z_2,$$

hence

$$z_2 \times z_1 - (z_2 \times z_1) \bullet \widehat{V} \widehat{V} = ((z_1 \bullet \widehat{V})z_2 - (z_2 \bullet \widehat{V})z_1) \times \widehat{V}.$$

Then we compute

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}(V)z_2) \times (\mathbf{B}(V)z_1) &= (z_2 + (\gamma - 1)(\widehat{V} \bullet z_2)\widehat{V}) \times (z_1 + (\gamma - 1)(\widehat{V} \bullet z_1)\widehat{V}) \\
&= z_2 \times z_1 + (\gamma - 1)((\widehat{V} \bullet z_2)\widehat{V} \times z_1 + (\widehat{V} \bullet z_1)z_2 \times \widehat{V}) \\
&= z_2 \times z_1 + (\gamma - 1)((z_1 \bullet \widehat{V})z_2 - (z_2 \bullet \widehat{V})z_1) \times \widehat{V} \\
&= z_2 \times z_1 + (\gamma - 1)(z_2 \times z_1 - (z_2 \times z_1) \bullet \widehat{V} \widehat{V}) \\
&= \gamma(z_2 \times z_1) - (\gamma - 1)\widehat{V} \bullet (z_2 \times z_1)\widehat{V} \\
&= \gamma((z_2 \times z_1) + (\frac{1}{\gamma} - 1)\widehat{V} \bullet (z_2 \times z_1)\widehat{V})(z_2 \times z_1) \\
&= \gamma(\text{Id} + (\frac{1}{\gamma} - 1)\widehat{V}\widehat{V}^T)(z_2 \times z_1) = \gamma\mathbf{B}(V)^{-1}(z_2 \times z_1),
\end{aligned}$$

where $\mathbf{B}(V)^{-1}$ is from 6.6. □

Magnetohydrodynamik (MHD)

6.9 Maxwell-Gleichungen im MHD-Limes. Under Lorenz conditions we obtain

$$-\Delta\Phi = \varrho^{el}, \quad -\Delta A = \mathbf{j}^{el}, \quad \text{div}_x A = 0.$$

Lösung. This follows from 2.17 in the limit $\mathbf{c} \rightarrow \infty$. It follows also from (VI4.2), since

$$\begin{aligned}
\text{div}_x E &= -\text{div}_x(\nabla_x \Phi + \partial_t A) = -\Delta\Phi - \partial_t \text{div}_x A = -\Delta\Phi, \\
\text{rot}_x B &= \text{rot}_x \text{rot}_x A = -\Delta A + \nabla_x \text{div}_x A = -\Delta A.
\end{aligned}$$

see 6.4. □

Figures

Abb. **III1** "Raumzeit" Abb. **III2** "Klassische Beobachter" Abb. **IV3** "Kraftbestandteile auf der Erdoberfläche"

Copyright by H.W.Alt & G.Witterstein

Preliminary Version:

Abb. **I1** "Gas und fester Körper" ????????

Abb. **I2** aus A.H. Zemanian [79, Preface]

Abb. **I4** aus [Wikipedia: Atmosphere of earth]

Abb. **I5** aus A.H. Zemanian [79, Introduction]

Abb. **I8** aus [Wikipedia: Gravity of Earth]

Abb. **I16** "Interface von Wasser und Luft"

Abb. **I19** "Parabelform der Oberfläche"

Abb. **I20** "Wasserbehälter auf rotierender Oberfläche" von

[vlex.physik.uni-oldenburg.de/download/mqc_rotierendesfluid.pdf]

Abb. **I21** *Left*: from [Wikipedia: Sonne]. *Right*: Aufnahme vom 2.1.2013 (Photo von Thorsten Edelmann) aus Sterne und Weltraum 3|2013

Abb. **II4** "Geschichtetes Material" aus dem Buch [4] von Eck & Garcke & Knabner

Abb. **III3** Thermometer aus "Grimsehl's Lehrbuch der Physik".

Abb. **IV1** "Ebbe und Flut" aus [Wikipedia: Tide]

[www.wattwandern-johann.de/watt-lernen/ebbe-und-flut/]

Abb. **IV2** "Zeitlicher Ablauf von Ebbe und Flut" von [Wikipedia: Tide]

Abb. **IV3** "Kraftbestandteile auf der Erdoberfläche" Copyright by H.W.Alt & G.Witterstein

Abb. **IV4** "Ebbe und Flut bei Land-Wasser Verteilung" aus [Wikipedia: Gezeiten]

Abb. **IV5** "Der Zusammenhang zwischen Masse, Stoffmenge, Volumen und Teilchenanzahl" aus [Wikipedia: Molare Masse] von Johannes Schneider

Abb. **IV12**

Abb. **IV20**

Abb. **IV19**

Abb. **IV24** Ein vom Flugzeug aufgenommener Tornado. "A waterspout near the Florida Keys in 1969" aus [Wikipedia: Tornado] von Dr. Joseph Golden, NOAA, Image ID: wea00308, Historic NWS Collection

Abb. **IV35**

Literaturverzeichnis

- [1] D.J. Acheson: *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. Clarendon Press Oxford 1989
- [2] Nikolaus A. Adams: *Fluidmechanik I. Einführung in die Dynamik der Fluide*. Lehrstuhl für Aerodynamik 2008. Technische Universität München, Sep. 2010 [[Adams-Gasdynamik-skript-fm1.pdf](#)]
- [3] Nikolaus A. Adams: *Fluidmechanik II. Einführung in die Dynamik der Fluide*. Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungsmechanik. Technische Universität München, 2015 [[Adams-FM2.pdf](#)]
- [4] Christof Eck, Harald Garcke, Peter Knabner: *Mathematische Modellierung*. 2. überarb. Auflage. Springer 2011
- [5] Ralf Greve: *Kontinuumsmechanik. Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer 2003
- [6] S.R. de Groot, P. Mazur: *Non-Equilibrium Thermodynamics*. North-Holland 1962
- [7] J.L. van Hemmen: *Mechanik der Kontinua*. Skriptum der Vorlesung. Technische Universität München 2006
- [8] Kolumban Hutter: *Fluid- und Thermodynamik. Eine Einführung*. Springer 1995
- [9] Kolumban Hutter, Yongqi Wang: *Fluid and Thermodynamics. Volume 1: Basic Fluid Mechanics, Volume 2: Advanced Fluid Mechanics and Thermodynamic Fundamentals*. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics. Springer 2016
- [10] L.D. Landau, E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band VI. Hydrodynamik*. 3. Auflage. Akademie-Verlag Berlin 1974
- [11] Ingo Müller: *Grundzüge der Thermodynamik*. 2. Auflage. Springer 1999
- [12] Ingo Müller, Wolf Weiss: *Entropy and Energy. A Universal Competition*. Springer 2005
- [13] Ingo Müller, Wolfgang H. Müller: *Fundamentals of Thermodynamics and Applications*. Springer 2009
- [14] Clifford A. Truesdell: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Vol.1 General Concepts, Second Edition. Academic Press 1977
- [15] Krzysztof Wilmański: *Thermomechanics of Continua*. Springer 1998
- [16] G. Witterstein: *Mathematische Modellbildung*. Skript zur Bachelor Vorlesung. Technische Universität München 2013-2017 [[Witterstein-Skript.MaMod.O.pdf](#)]

Arbeiten und Bücher zu speziellen Themen

- [17] H. Abels, M.G. Mora, S. Müller: *The time-dependent von Karman plate equation as a limit of 3D nonlinear elasticity*. Preprint 01/2010 Mathematik Uni Regensburg. 2010
- [18] H.W. Alt, I. Pawlow: *On the entropy principle of phase transition models with a conserved order parameter*. Advances Math. Sci. and Appl. (AMSA) 6, pp.291-376. 1996
- [19] H.W. Alt: *Entropy principle and interfaces. Fluids and Solids*. Advances in Mathematical Sciences and Applications (AMSA), Vol. 19, pp. 585-663. 2009
- [20] H.W. Alt, G. Witterstein: *Free Energy Inequality in the Limit of Phase Transition*. AMSA 24, pp.11-65. 2014
- [21] H.W. Alt, G. Witterstein: *Mathematical continuum mechanics. Kompendium*. Faculty of Mathematics, TUM Munich. 2014-2017
[alt-witterstein-exercises.pdf]
- [22] H.W. Alt: *Mathematical continuum mechanics. Interfaces*. In preparation.
- [23] H.W. Alt: *Mathematical continuum mechanics. Relativity*. In preparation.
- [24] D. Ambrosi, A. Guillou: *Growth and dissipation in biological tissues*. Cont. Mech. Thermodyn. 19, pp.245-251. 2007
- [25] D. Bershader: *Compressible vortices*. In: S.I. Green (ed.), Fluid vortices, pp.291-316. 1995
- [26] Diete Bothe, Wolfgang Dreyer: *Continuum Thermodynamics of Chemically Reacting Fluid Mixtures*. Acta Mechanica Volume 226, pp.17571805. June 2015
[BotheDreyer-1401.5991.pdf]
- [27] Ray M. Bowen: *Continuum Physics - Mixtures and EM Field Theories*. In: A. Eringen (ed.): Continuum Physics Vol.III. Academic Press 1976
- [28] S. Chandrasekhar: *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover Publications 1967
- [29] S. Chandrasekhar: *Continuum theory of the nematic state*. Second Edition. Cambridge University Press 1992
- [30] C.I. Christov: *On frame indifferent formulation of the Maxwell-Cattaneo model of finite-speed heat conduction*. Mechanics Research Communications 36, pp.481-486. 2009
[doi:10.1016/j.mechrescom.2008.11.003]
- [31] Philippe G. Ciarlet: *Mathematical Elasticity. Volume I: Three-dimensional Elasticity*. Elsevier Science Publ. 1988
- [32] James E. Coleman, Reza Malek-Madani, David R. Smith: *Visualization of Fluid Flows using Matematica*. 1972
- [33] P.A. Davidson: *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press 2001
- [34] William Devenport, Leifner Thor Leifsson: *Advanced Aero- and Hydrodynamics*. Department of Engineering Science and Mechanics. Virginia Polytechnic Institute 2007
[http://www2.esm.vt.edu/~dtmook/AOE5104_ONLINE/]
- [35] R.J. DiPerna, P.L. Lions: *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability*. Ann. Math. 130, pp. 321-366. 1989
[DiPerna.Lions_1971423.pdf]
- [36] Qiang Du, Max D. Gunzburger: *Analysis of a Ladyzhenskaya Model for Incompressible Viscous Flow*. J. Math. Anal. Appl. 155, pp. 21-45. 1991

- [37] J. Ernest Dunn, Roger L. Fosdick: *Thermodynamics, Stability and Boundedness of Fluids of Complexity 2 and Fluids of Second Grade*. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 56, pp. 191-252. 1974
- [38] G. Duvaut, J.L. Lions: *Inequalities in Mechanics and Physics*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer 1976
- [39] Eduard Feireisl: *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 26. Oxford Univ. Press 2004
- [40] Eduard Feireisl, Antonín Novotný: *Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids*. Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhäuser 2009
- [41] George R. Gavalas: *Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems*. Springer Tracts in Natural Philosophy, Volume 17. Springer 1968
- [42] Dario B. Giaiotti, Fulvio Stel: *The Rankine Vortex Model*. PhD - Environmental Fluid Mechanics - Physics of the Atmosphere. University of Trieste - International Centre for Theoretical Physics 2006 [[rankine-vortex-notes.pdf](#)]
- [43] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, T. Ott: *Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center*. The Astrophysical Journal 692:1075–1109. 2009
[\[doi:10.1088/0004-637X/692/2/1075\]](#)
- [44] S. Gillessen, F. Eisenhauer, T. K. Fritz, H. Bartko, K. Dodds-Eden, O. Pfuhl, T. Ott, R. Genzel: *The Orbit of the Star S2 Around SGR A* from Very Large Telescope and Keck Data*. The Astrophysical Journal 707:114–117. 2009
[\[doi:10.1088/0004-637X/707/2/L114\]](#)
- [45] L. Herrera, N. Falcón: *Heat waves and thermohaline instability in a fluid*. Phys. Lett. A, Vol. 201, pp. 33-37. 1995
- [46] Dirk Husfeld: *Astronomical Time Keeping*. Last modified: C.Kronberg 96/11/30 smil@agleia.de. 1996 [[AstronomicalTime.pdf](#)]
- [47] Kolumban Hutter, Klaus Jöhnk: *Continuum Methods of Physical Modeling. Continuum Mechanics, Dimensional Analysis, Turbulence*. Springer-Verlag 2004
- [48] J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*. 3rd edition. John Wiley & Sons 1999
- [49] Georg Joos, Ira M. Freeman: *Theoretical Physics*. 3rd edition. Blackie & Son 1958
- [50] Piaras Kelly: *Solid Mechanics Part III: Foundations of Continuum Solid Mechanics*. Lecture Notes. 2013
[\[http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/index.html\]](http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/index.html)
- [51] Dietmar Kröner: *Numerical Schemes for Conservation Laws*. Wiley Teubner 1997
- [52] B. Larrourou: *Recent Advances in Combustion Modelling*. Series in Advances in Mathematics for Applied Sciences 6. World Scientific 1991
- [53] Pierre-Louis Lions: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume 1: Incompressible Models*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Application 3. Oxford Science Publications 1996
- [54] Pierre-Louis Lions: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume 2: Compressible Models*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Application 10. Oxford Science Publications 1998
- [55] Jerold E. Marsden, Thomas J.R. Hughes: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall 1983
- [56] František Maršík, Václav Klika, Hynek Chlup: *Remodelling of living bone induced by dynamic loading and drug delivery – Numerical modelling and clinical treatment*. Mathematics and Computers in Simulation 80, pp.1278-1288. Elsevier 2010

- [57] Ingo Müller, Tommaso Ruggeri: *Extended Thermodynamics*. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 37. Springer 1993
- [58] Marek Niezgodka, Jürgen Sprekels: *Existence of Solutions for a Mathematical Model of Structural Phase Transitions in Shape Memory Alloys*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 10, pp.197–223. 1988
- [59] Eric Priest: *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press. 2014
- [60] K. R. Rajagopal, L. Tao: *Mechanics of Mixtures*. World Scientific Publishing 1995
- [61] Stefan Rill: *Aerodynamik des Flugzeugs*. Hochschule Bremen 1996
[<http://homepages.hs-bremen.de/~kortenfr/Aerodynamik/script/>]
- [62] Yoshihiro Shibata, Senjo Shimizu: *Free boundary problems for a viscous incompressible fluid*. ????? [ShibataShimizu-B1-21.pdf]
- [63] James Serrin: *The Swirling Vortex*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 271, No. 1214 (Jan. 27, 1972), pp.325-360. The Royal Society 1972 [Serrin.pdf]
- [64] V.A. Solonnikov: *On the stability of uniformly rotating viscous incompressible self-gravitating liquid*. Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 348 (2007), English: J. Math. Sci. (N. Y.) 152 (2008), no.5, pp.713-740. MR 2743018 (2011i:35200).
[<http://dx.doi.org/10.1007/s10958-008-9090-7>] [Solonnikov_article_V_18juillet.pdf]
- [65] Christian Stemmer: *Grenzschichttheorie*. Lehrstuhl für Ärodynamik, TUM München
- [66] B. Straughan: *Tipping points in Cattaneo-Christov thermohaline convection*. Proc. R. Soc. A. 2010
[doi:10.1098/rspa.2010.0104]
- [67] C. Truesdell, W.Noll: *Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Third Edition. Springer-Verlag 2004
- [68] Abraham A. Ungar: *The Relativistic Composition Paradox and the Thomas Rotation*. Foundations of Physics, Vol.19, pp.1385-1396. 1989 [Ungar-fulltext.pdf]
- [69] C.-C. Wang, C. Truesdell: *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden 1973
- [70] Frank M. White: *Viscous Fluid Flow*. 3rd edition. McGraw-Hill 2006

Literatur über Distributionen

- [71] Hans Wilhelm Alt: *Distributions*. Script. Technical Univ. Munich TUM 2014-2017
- [72] Hans Wilhelm Alt: *Lineare Funktionalanalysis*. Kapitel 3. Ed.6, Springer 2012
- [73] Hans Wilhelm Alt: *Lineare Funktional Analysis*. Chapter 5. Springer 2016
- [74] I.M. Gelfand, G.E. Schilow: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*. Hochschulbücher für Mathematik, Band 48. Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962
- [75] David Kent, Lindsay Mercer: *On Radon Measure*. Cornell University. 12/3/2016
[math6210Radon.pdf]
- [76] Laurent Schwartz: *Théorie des distributions*. Hermann 1973
- [77] Luc Tartar: *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer 2007
- [78] Wolfgang Walter: *Einführung in die Theorie der Distributionen*. 3. ed. BI-Wissenschaftsverlag, 1994
- [79] A.H. Zemanian: *Distribution Theory and Transform Analysis*. Dover Publications 1965

- [80] Klaus-Heinrich Peters: *Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen*. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades des Fachbereichs Mathematik der Universität Hamburg, 2004 [[Peters-dokserv.pdf](#)]

Weitere Bücher und Vorlesungen

- [81] Sydney Chapman, Thomas George Cowling: *The mathematical theory of non-uniform gases: an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction, and diffusion in gases*. ISBN 0-521-40844-X. Cambridge University Press 1990
- [82] D. Jou, J. Casas-Vázquez, G. Lebon: *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer 1993
- [83] Friedrich Kohlrausch: *Praktische Physik*. Bände 1-3 und Tabellen, 24. Auflage. Teubner-Verlag Stuttgart 1996
- [84] L.D. Landau, E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band II. Klassische Feldtheorie*. 12. Auflage. Akademie-Verlag Berlin 1992
- [85] L.D. Landau, E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band V. Statistische Physik Teil 1*. 8. Auflage. Akademie-Verlag Berlin 1978
- [86] I-Shih Liu: *Continuum Mechanics*. Springer 2002
- [87] Ingo Müller: *Thermodynamics*. Interaction of mechanics and mathematics series. Pitman 1985
- [88] Ingo Müller, Tommaso Ruggeri: *Rational Extended Thermodynamics*. Second Edition. Springer 1998
- [89] Benoît Perthame: *Growth, reaction, movement and diffusion from biology*. Laboratoire J.-L. Lions. Université Pierre et Marie Curie 2012 [[Perthame-cours.M2.pdf](#)]
- [90] Benoît Perthame: *Parabolic equations in Biology*. Growth, reaction, movement and diffusion. Springer 2015
- [91] I. Prigogine, R. Defay: *Chemical Thermodynamics*. Longmans Green 1954
- [92] Andrzej Słuzalec: *Introduction to Nonlinear Thermomechanics. Theory and Finite-Element Solutions*. Springer 1992
- [93] Joel Smoller: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 258. Springer 1982
- [94] Roger M. Temam, Alain M. Miranville: *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. 2nd edition. Cambridge Univ. Press 2005
- [95] C. Truesdell: *Rational Thermodynamics*. Series in Modern Applied Mathematics. McGraw-Hill 1969
- [96] C. Truesdell: *The tragicomical history of thermodynamics 1822-1854*. Springer 1980

Historische Originalliteratur

- [97] G.I. Barenblatt: *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*. Prikladnaja Matematika i Mekhanika 16, pp.67-78. 1952
- [98] L. Boltzmann: *Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. 1*. Leipzig 1909.
- [99] Sadi Carnot: *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu*. Éditions 1990 Jacques Gubay. Paris 1824 [[N0029063.PDF.1.130.pdf](#)]
- [100] N.-L.-Sadi Carnot: *Reflections on the Motive Power of Heat*. From the original French 1824 and contributions of Émile Clapeyron and R. Clausius. Wiley & Sons 1897
- [101] C. Cattaneo: *Sulla conduzione del calore*. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3, pp.83-101. 1948

- [102] Émile Clapeyron: *Memoir on the Motive on Power of Heat*. Journal de l'École Polytechnique XIV p.153, and Poggendorf's Annalen der Physik LXXIX pp.368-500. 1834 and 1843
- [103] Rudolf Clausius: *On the Motive on Power of Heat, and on the Laws which can be deduced from it for the Theory of Heat*. Poggendorf's Annalen der Physik LXXIX pp.368-500. 1850
- [104] T.G. Cowling: *Magnetohydrodynamics*. Interscience, New York. 1958
- [105] Robert Emden: *Gaskugeln. Anwendungen der Mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme*. B. Teubner 1907
- [106] Joseph Fourier: *Theorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot Père et Fils, Paris. 1822
- [107] A.E. Green, P.M. Naghdi: *A theory of mixtures*. Arch. Rat. Mech. Anal. 24, pp.243-???. 1967
- [108] Harold Grad: *On the kinetic theory of rarefied gases*. Comm. Appl. Math. 2, pp.331-407. 1949
- [109] Maurice L. Huggins: *Theory of Polymer Fractionation Efficiency*. Journal of Polymer Science (Part A-2) Vol.5, pp.1221-1234. 1967
[[Huggins-1967-Journal_of_Polymer_Science_Part_A-2__Polymer_Physics.pdf](#)]
- [110] H. von Helmholtz: *Vorlesungen über Theorie der Wärme*. Vorlesungen über Theoretische Physik. Band VI. Zweiter durchgesehener Abdruck. Verlag von Johann Ambrosios Barth. Leipzig 1922
- [111] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov: *Some Problems of Vector Analysis and Generalized Formulations of Boundary-Value Problems for the Navier-Stokes Equations*. J. Soviet Math. 10, pp. 254-285 (1978), Russian: Zap. Nauchn. Sem. LOMI 59, pp.81-116 (1976). [[LadyzhenskayaSolonnikov-BF01566606.pdf](#)]
- [112] I-Shih Liu: *Method of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Principle*. Arch. Rational Mech. Anal. 46. 1972
- [113] Hendrik Antoon Lorentz: *De relatieve beweging van de aarde en den aether*. Zittingsverlag Akad. v. Wet. 1, pp.74-??. Amsterdam (1892)
[http://en.m.wikisource.org/wiki/Translation:The_Relative_Motion_of_the_Earth_and_the_Aether]
- [114] Hendrik Antoon Lorentz: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. E.J. Brill, Leiden (1895)
[http://de.m.wikisource.org/wiki/Versuch_einer_Theorie_der_...]
- [115] L. Lorenz: *On the identity of the vibrations of light with electrical currents*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 34:230, 287-301. 1867
[DOI: [10.1080/14786446708639882](https://doi.org/10.1080/14786446708639882)]
- [116] Ingo Müller: *A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids*. Arch. Rat. Mech. Anal. 28, pp.1-38. 1968
- [117] Ingo Müller: *On the Entropy Inequality*. Arch. Rational Mech. Anal. 26 ???. 1967
- [118] Isaac S. Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1686
- [119] Isaac Newton: *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Translated into English by Andrew Motte 1729. Published by Daniel Adee, New York, 1846
[[\[Isaac_Newton,_Translated_by_Motte\]_Mathematical_Principles.pdf](#)]
- [120] Isaac Newton: *The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy*. New Translation by I.Bernhard Cohen and Anne Whitman. 1999

- [121] William Thomson (Lord Kelvin): *On an absolute thermometric scale founded on Carnot's theory on the motive power of heat*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1 p.66. 1848
- [122] C. Truesdell: *Sulle Basi della Termodinamica*. Acc. Naz. dei Lincei, **8, 22**, 33 ?????. 1957
- [123] C.A. Truesdell, R.A. Toupin: *The Classical Field Theories*. In: Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, pp.226-793, ed. by S. Flügge. Springer 1957
- [124] C. Truesdell, W. Noll: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. In: Handbuch der Physik, Vol. III/3, ed. by S. Flügge. Springer 1957

Aus dem Internet

- [125] CHEMIE.DE: *Universelle Gaskonstante*. [[Chemie–Universelle Gaskonstante](#)]
- [126] Glenn Elert: *The Physics Hypertextbook. The Nature of Sound*. 1998-2017 Glenn Elert. [[Hypertextbook–Nature of Sound](#)]
- [127] engineeringtoolbox.de: *Air - Composition and Molecular Weight*. [[engineeringtoolbox.com/air-composition-d 212.html](#)]
- [128] Jeff Tollefson: *Ozean in Aufruhr*. Spektrum Spezial 4.17 und Nature 539, pp.346-348. www.nature.com 17 Nov. 2016 [[Antarctis.539346a1.pdf](#)]
- [129] Wikipedia: *Atmosphere of Earth*. [[Atmosphere of Earth - Wikipedia, the free encyclopedia.pdf](#)]
- [130] Wikipedia: *Electromagnetism*. [[Electromagnetism.pdf](#)]
- [131] Wikipedia: *Foucault Pendel*. [[Foucaultsches Pendel](#)] [[Foucaultpendel](#)] [[Foucault pendulum](#)]
- [132] Wikipedia: *Reflektion (Physik)*. [[Reflektion \(Physik\)](#)] [[Reflection \(physics\)](#)]
- [133] Wikipedia: *Second Law of Thermodynamics*. [[Second.Law.of.Thermodynamics.pdf](#)]

Spezielles aus der Presse

- [134] *Newtons Eimerversuch*. Leserbrief in Sterne und Weltraum, Jun. 2011. [[NewtonEimer.pdf](#)] (Zur rotierenden Flüssigkeit mit Schwerkraft **I.4.4**)
- [135] *Alarm im "entrauten Gebiet"*. Prisma 2011. [[hochwasser.pdf](#)]
- [136] *Himmelskörper im freien Fall*. Monatszeitschrift Spektrum der Wissenschaft, Jan. 2014. (Zum Abschnitt über Ebbe und Flut **IV.1**)
- [137] *Ferne Sterne und Planeten*. Spektrum der Wissenschaft Spezial 2/2014.